1) Δίνεται σφαιρικά συμμετρική κατανομή φορτίου στο χώρο $\rho(r)$, $\left(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$, τέτοια ώστε το ολικό φορτίο Q να είναι πεπερασμένο.

$$Q=4\pi\int_0^\infty dr\, r^2\rho(r)$$

(i) Εφαρμόστε το νόμο της ηλεκτρικής ροής για να δείξετε ότι το ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο είναι

$$\vec{E}=E_r(r)\hat{r}\ ,\quad E_r(r)=\frac{1}{\epsilon_0 r^2}\int_0^r r'^2\rho(r')dr'$$

(ii) Δείξτε ότι το δυναμικό που μηδενίζεται στο άπειρο είναι:

$$\phi(r)=\frac{1}{\epsilon_0 r}\int_0^r r'^2\rho(r')dr'+\frac{1}{\epsilon_0}\int_r^\infty \rho(r')r'dr'$$

(iii) Εφαρμόστε τα παραπάνω στη περίπτωση

$$\rho(r)=\begin{cases}\rho_0=\text{σταθ}, & r\le R\\ 0 & , r>R\end{cases}$$

---

2) Γραμμική κατανομή φορτίου λ, έχει το σχήμα ορθογωνίου διαστάσεων $2a\times 2b$. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ πάνω στον άξονά του, πού είναι ο άξονας-z.

3) Λεπτός δακτύλιος, ακτίνας R, φέρει γραμμική πυκνότητα φορτίου λ. Ο δακτύλιος τοποθετείται στό $(x-y)$ επίπεδο μέ κέντρο την αρχή των αξόνων και άξονα τον άξονα-z.

(i) Βρείτε δυναμικό και πεδίο πάνω στον άξονα.

(ii) Δύο παράλληλοι ομοαξονικοί δακτύλιοι, ίδιας ακτίνας R, φέρουν γραμμικές πυκνότητες φορτίου λ και $-\lambda$ αντίστοιχα. Αν τα κέντρα τους απέχουν απόσταση $2d$ να βρεθούν δυναμικό και ηλεκτρικό πεδίο πάνω στον κοινό άξονα.

---

4) Η συνάρτηση $\frac{1}{r}$, όπου $r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, είναι αρμονική $\left(\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=0\right)$ για κάθε $r>0$. Προφανώς και η συνάρτηση

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{z}{r^3},$$

είναι επίσης αρμονική.

Αγώγιμη ουδέτερη σφαίρα, ακτίνας R, τοποθετείται εντός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}=\mathcal{E}_0\hat{k}$ ($\hat{k}$ στον αξ-z), μέ κέντρο της σφαίρας την αρχή των αξόνων.

(i) Θεωρείστε ότι το δυναμικό έξω από τη σφαίρα έχει τη μορφή

$$\Phi=-\mathcal{E}_0 z+B\frac{z}{r^3}\quad (z=r\cos\theta,\ r\geq R),$$

και προσδιορίστε τη σταθερά B.

(ii) Βρείτε την επαγόμενη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma_{\varepsilon\pi}(\theta)$ πάνω στη σφαίρα.

(iii) Είναι η λύση του ερωτήματος (ii) μοναδική;
(Συνοριακές $\Phi|_{r=R}$ = σταθερά , $\Phi|_{r=\infty} = -\mathcal{E}_0 z$; $Q_{επαγ} = 0$).

---

5) Λεπτός αγώγιμος δίσκος ακτίνας R φορτίζεται μέ φορτίο Q. Ο δίσκος είναι στο επίπεδο (x-y) καί το κέντρο του είναι η αρχή των αξόνων.

(i) Αν η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σε κάθε πλευρά του δίσκου είναι

$$\sigma(\rho) = \frac{A}{\sqrt{R^2-\rho^2}}, \quad \left(\rho = \sqrt{x^2+y^2}\right).$$

να δείξετε ότι

$$A = \frac{Q}{4\pi R}$$

$\left(Q = \iint_\Delta 2\sigma(\rho)\, dS \right.$, $\left. dS = \rho\, d\rho\, d\varphi \right)$

(ii) Βρείτε τό δυναμικό του δίσκου, υπολογίζοντας τό δυναμικό στό κέντρο του. $\left(\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1}(u) \right)$

(iii) Αν V_0 είναι το δυναμικό του δίσκου, βρείτε τήν χωρητικότητά του $C_\Delta = Q/V_0$ $\left(Απ\ C_\Delta = 8\epsilon_0 R\right)$.

---

6) Λεπτός γειωμένος αγώγιμος φλοιός, ακτίνας R, φέρει στο εσωτερικό του σημειακό φορτίο Q σε απόσταση z_0 από το κέντρο του. Η ευθεία κέντρου και φορτίου είναι ο άξονας-z.

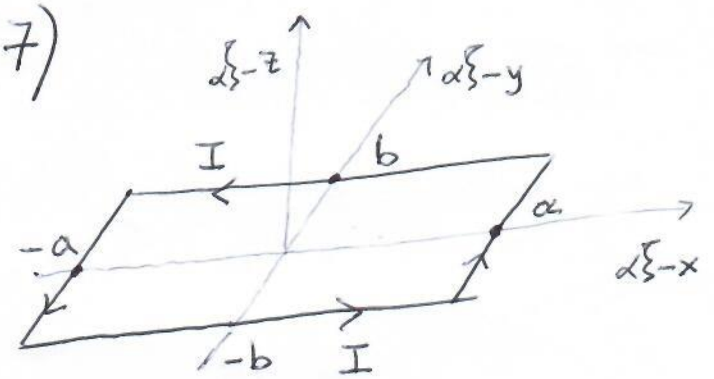
(i) Να βρεθεί το δυναμικό $\Phi(r,\theta)$, όπου r η απόσταση από τό κέντρο $(r<R)$ και θ η γωνία με τον άξονα-z.

(ii) Νά βρεθεί η επαγώμενη πυκνότητα φορτίου $\sigma(\theta)$ στήν εσωτερική επιφάνεια του φλοιού.

(iii) Ολοκληρώστε τήν $\sigma(\theta)$ για να δείξετε ότι το ολικό επαγώμενο φορτίο είναι $(-Q)$.

(Υποδ. Νά γίνει χρήση σημειακού ειδώλου $Q' = -Q\,R/z_0$, έξω από τόν φλοιό στη θέση $z_0' = R^2/z_0$)

7)



Λεπτός ορθογώνιος βρόχος, διαστάσεων $2a \times 2b$, διαρρέεται από ρεύμα έντασης I όπως στο σχήμα.

(i) Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}(z)$ στόν άξονά του, (άξονας-z). (Νόμος Biot-Savart).

(ii) Υπολογίστε το όριο $a \to \infty$ και επιβεβαιώστε έτσι το αποτέλεσμα τού άπειρου ευθύγραμμου αγωγού.

---

8)(i) Στόν ρευματοφόρο βρόχο της άσκησης (7), να βρείτε διανυσματικό δυναμικό από τήν έκφραση

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{(\beta\rho\acute{o}\chi o\varsigma)} \frac{d\vec{\ell}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

όπου $\vec{r}\,'$ πάνω στό βρόχο και $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$(-a < x < a \;,\; -b < y < b)$.

$$\left(\int_{-c}^{c} \frac{du}{\sqrt{(u-B)^2 + d^2}} = \ln\left[\frac{B + c + \sqrt{(B+c)^2 + d^2}}{B - c + \sqrt{(B-c)^2 + d^2}} \right] \right)$$
