Τμήμα Μαθηματικών
Μάθημα: Ηλεκτρομαγνητισμός
Εξέταση Ιουνίου (09-06-2022)

<u>Θέμα 1</u> Λεπτός φορτισμένος δακτύλιος ακτίνας R, φέρει γραμμική πυκνότητα φορτίου λ_0.
α. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}(z)$ στον άξονα του δακτυλίου και το $\vec{E}(z=0)$ στο κέντρο του δακτυλίου.
β. Ο δακτύλιος αντικαθίσταται μέ άλλον ίδιας ακτίνας αλλά με γραμμική πυκνότητα φορτίου $\lambda = \lambda_0 cos\varphi$. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}(z=0)$ στο κέντρο του νέου δακτυλίου.
(Δίνεται το ολοκλήρωμα: $\int_0^{2\pi} cos^2\varphi \, d\varphi = \pi$.)

<u>Θέμα 2.</u> **α.** Σημειακό φορτίο q ευρίσκεται σε απόσταση d από άπειρη επίπεδη αγώγιμη γειωμένη πλάκα. Να δείξετε ότι η επαγώμενη πυκνότητα φορτίου στην πλάκα είναι:

$$\sigma_{\varepsilon\pi}(\rho) = -\frac{q}{2\,\pi}\frac{d}{(d^2+\rho^2)^{3/2}},$$

όπου ρ η απόσταση από την προβολή του q πάνω στην πλάκα.

β. Αντικαθιστούμε το φορτίο q με λεπτό φορτισμένο δακτύλιο ακτίνας R και γραμμικής πυκνότητας λ, παράλληλο στην πλάκα. Να βρεθεί η επαγώμενη πυκνότητα φορτίου $\sigma(K)$ όπου K η προβολή του κέντρου του δακτυλίου πάνω στην πλάκα.

<u>Θέμα 3.</u> Τετράγωνος βρόχος πλευράς a διαρρέεται από ρεύμα έντασης I.
α. Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}(z)$ πάνω στον άξονα του βρόχου.
(Δίνεται ότι: $\int \frac{du}{(u^2+b^2)^{3/2}} = \frac{u}{b^2\sqrt{u^2+b^2}}$.)
β. Για $|z| \gg a$ επιβεβαιώστε ότι:

$$\vec{B}(z) \cong \frac{\mu_0}{4\,\pi}\frac{3\,(\vec{m}\cdot\hat{z})\,\hat{z} - \vec{m}}{|z|^3},$$

όπου $\vec{m}$ η μαγνητική ροπή του βρόχου.

Καλή Επιτυχία!

Λύσεις

Θ1α Απο τον νομο Coulomb

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint d\ell \, \frac{\lambda(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

και για $d\ell = R\,d\varphi$, $\vec{r} = (0,0,z)$ και $\vec{r}\,' = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0)$ εχουμε:

$$\vec{E}(z) = \frac{\lambda_0 R}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{(-R\cos\varphi)\hat{\imath} + (-R\sin\varphi)\hat{\jmath} + z\hat{k}}{(R^2+z^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\lambda_0}{2\varepsilon_0}\frac{Rz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}$$

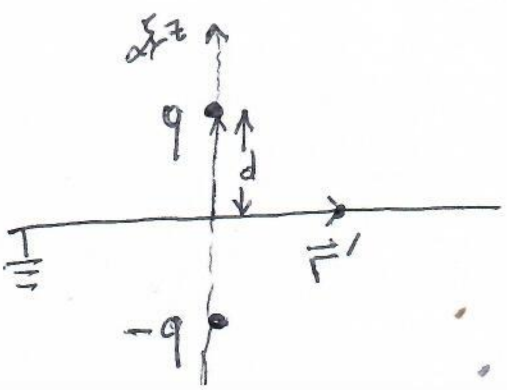
και $\vec{E}(z=0) = 0$.

Θ1β.

$$\vec{E}_k = \frac{R}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{\lambda_0\cos\varphi\left[-R\cos\varphi\,\hat{\imath} - R\sin\varphi\,\hat{\jmath}\right]}{R^3}$$

$$= -\frac{\lambda_0 \pi}{2\varepsilon_0 R}\hat{\imath}$$

Θ2α



Χρησιμοποιώντας και το ειδωλο συμμετρικά ως προς τη πλακα.

Για $\vec{r}'=(x,y,0)$ πάνω στη πλάκα έχουμε.

$$\sigma(\vec{r}') = -\varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial z}\Big|_{z=0}$$

όπου $$\phi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[x^2+y^2+(z+d)^2]^{1/2}}\right\}$$

απο τη έκφραση παραπάνω προκύπτει

$$\sigma(\rho) = -\frac{q}{(2\pi)}\frac{d}{(\rho^2+d^2)^{3/2}} \quad , \rho^2 = x^2+y^2$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αν αντί του δυναμικού χρησιμοποιήσουμε το ηλεκτρικό πεδίο των 2 φορτίων.

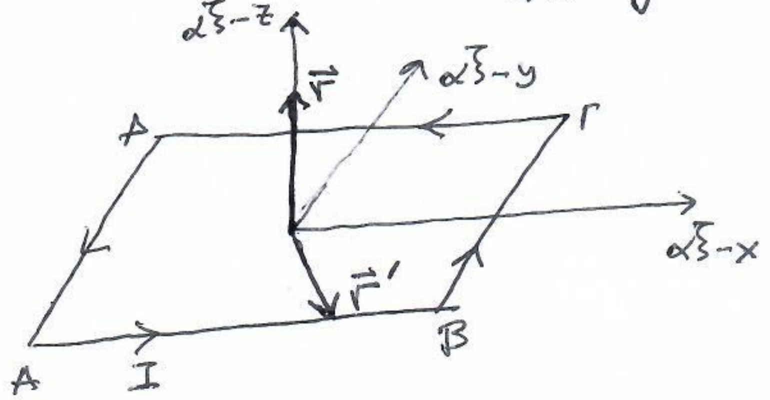
2ος τρόπος Στο παραπάνω αποτέλεσμα καταλήγουμε χρησιμοποιώντας τη συνθήκη $\vec{E}=0$, για $z<0$.

Θ2β Σύμφωνα με το προηγούμενο αποτέλεσμα

έχουμε: $$\sigma_K = \int_0^{2\pi} d\varphi\, R\lambda \left[\frac{-d}{2\pi(R^2+d^2)^{3/2}}\right] = -\frac{\lambda R d}{(R^2+d^2)^{3/2}}$$

2ος τρόπος Χρησιμοποιώντας τον δακτύλιο είδωλο με πυκνότητα $(-\lambda)$ και το αποτέλεσμα Θ1α καταλήγουμε στην ίδια πυκνότητα σ_K

Θ3α
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$



$\vec{r} = (0,0,z)$ και για την πλευρά AB $\vec{r}\,'_{AB} = (x, -a/2, 0)$

$$\vec{B}_{AB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} dx \, \frac{\hat{i} \times (z\hat{k} - x\hat{i} + a/2\, \hat{j})}{(x^2 + a^2/4 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} dx \, \frac{-z\hat{j} + a/2\, \hat{k}}{(x^2 + a^2/4 + z^2)^{3/2}}$$

Ομοιως $\vec{B}_{\Gamma\Delta} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} dx \, \frac{z\hat{j} + a/2\, \hat{k}}{(x^2 + a^2/4 + z^2)^{3/2}}$

Απο τις 4 πλευρές συνολικά $\vec{B}(z) = \hat{k} \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi}\right) \frac{a}{2} \cdot 4 \int_{-a/2}^{a/2} \frac{du}{(u^2+b^2)^{3/2}}$

οπου $b^2 = z^2 + a^2/4$. Τελικώς
$$\vec{B}(z) = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \frac{2(a^2 I)\hat{k}}{(z^2 + a^2/4)\sqrt{a^2/2 + z^2}}.$$

Θ3β για $|z| \gg a$ προφανως $\vec{B}(z) \simeq \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \frac{3(\vec{m}\cdot\hat{k})\hat{k} - \vec{m}}{|z|^3}$

οπου $\vec{m} = (a^2 I)\hat{k}$