Ηλεκτρομαγνητισμός – Διάλεξη 4η (27/Φεβ./2024)

Κοσμάς Λ. Τσακμακίδης

Επίκ. Καθηγητής

(http://www.ktsakmakidis.com/)

1837 2017 ΧΡΟΝΙΑ

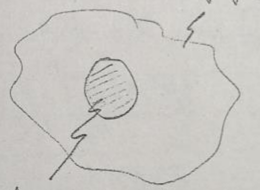
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών

Σε καλό αγωγό (π.χ. χαλκό) η ισορροπία
επιτυγχάνεται σε χρόνους ~ κλάσμα του sec.

▷ Σε αγωγό σε <u>στατική ισορροπία</u> κάθε πρόσθετο φορτίο που τοποθετείται (π.χ. από επαφή) <u>παραμένει στην επιφάνειά του.</u>

<u>Απόδειξη με νόμο Gauss:</u>

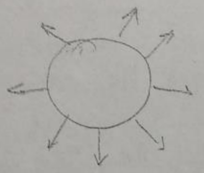


$$\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Όμως $\vec{E}=0$ οπότε $\underline{Q_{enc}=0}$.

⟹ τα φορτία του αγωγού δεν είναι στο εσωτερικό του αλλά στην επιφάνειά του.

▷▷ $\boxed{\text{Το ηλ. πεδίο στο εξωτερικό του αγωγού σε στατική ισορροπία είναι } \perp \text{ στην επιφάνεια}}$



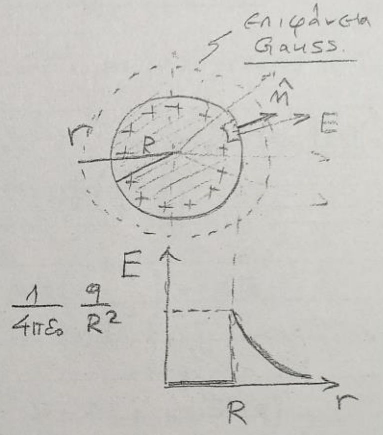
Αν <u>δεν</u> ήταν θα υπήρχε και συνιστώσα του ηλ. πεδίου εφαπτόμενη στην επιφάνεια ⟹ τα ηλεκτρόνια θα εκινούντο πάνω στην επιφάνεια ⟹ η κατανομή φορτίου <u>δεν</u> θα ήταν σε ισορροπία (άτοπο!)

Παράδειγμα [Young, p. 849]

Τοποθετείται φορτίο q πάνω σε συμπαγή αγώγιμη σφαίρα. Να υπολογιστεί το πεδίο παντού (μέσα και έξω από τη σφαίρα).

— Μέσα στη σφαίρα $E = 0$.

— Έξω παίρνουμε επιφάνεια Gauss ακτίνας $r > R$



Νόμος Gauss:

$$\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_A E \cancel{\cos\theta}^{\,\theta=0}\, dA =$$

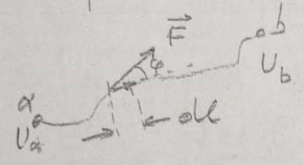
$$= E\left(4\pi r^2\right) = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}}$$

Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια
(Ηλεκτρικό δυναμικό)

Από Μηχανική: Αν δύναμη $\vec{F}$ ενεργεί σε σωματίδιο και το μετακινεί από το α στο b τότε το έργο

$$W_{\alpha \to b} = \int_\alpha^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_\alpha^b F \cdot \cos\varphi \, dl$$



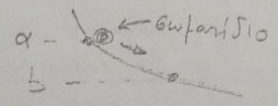
Αν η δύναμη είναι διατηρητική (δηλ. το παραγόμενο έργο εξαρτάται μόνο από τα α, b και όχι από το δρόμο α → b). τότε

$$W_{\alpha \to b} = U_\alpha - U_b = -(U_b - U_\alpha) = -\Delta U$$

U: δυναμική ενέργεια

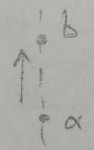
▷ Αν $W_{\alpha \to b} > 0 \Rightarrow U_\alpha > U_b$ και $\Delta U < 0$

όπως σε ένα σώμα που πέφτει από το α στο b υπό την επίδραση της βαρύτητας.



▷ Αν $W_{\alpha \to b} < 0 \Rightarrow U_\alpha < U_b$ και $\Delta U > 0$

όπως όταν πετάμε μια μπάλα προς τα πάνω



▷ Θεώρημα έργου ενέργειας:

$$K_b - K_\alpha = -\Delta U = -(U_b - U_\alpha) \Rightarrow \boxed{K_\alpha + U_\alpha = K_b + U_b}$$

κιν. ενέργεια

ολ. ενέργεια = σταθ.

$$W_{\alpha\to b} = \int_\alpha^b \vec{F}\cdot d\vec{l} = -\Delta U = -(U_b - U_\alpha)$$

δυναμική ενέργεια

Στην περίπτωση ηλ. δύναμης (⟹ παρουσίας ηλ. πεδίου)

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \Rightarrow \vec{F} = q\vec{E}$$

οπότε

$$\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{l} = -U_b + U_\alpha \Rightarrow -q\int_\alpha^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = U_b - U_\alpha$$

Ορίζουμε: ηλεκτροστατικό δυναμικό στο σημείο P: $\boxed{V_P = \frac{U_P}{q}}$

δυναμική ενέργεια σημ. φορτίου

φορτίο

οπότε $V_P = -\int_\alpha^b \vec{E}\cdot d\vec{l} + V_{P_0}$

σταθερά που επιλέγεται αυθαίρετα → συνήθως = 0

Επίσης: διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων P_1 κ' P_2:

$$V_{P_2} - V_{P_1} = -\int_{P_0}^{P_2}\vec{E}\cdot d\vec{l} + V_{P_0} - \left(-\int_{P_0}^{P_1}\vec{E}\cdot d\vec{l} + V_{P_0}\right)$$

$$= -\left(\int_{P_1}^{P_0}\vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{P_0}^{P_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}\right)$$

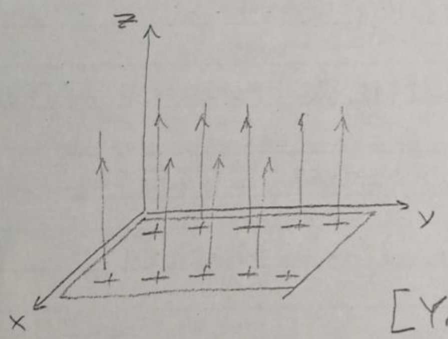
$$\boxed{V_{P_2} - V_{P_1} = -\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

[Μονάδες: V = J·C]

Άρα: διαφορά δυναμικού $V_{P_2} - V_{P_1} = W_{P_1\to P_2}$

έργο για να πάει το φορτίο $P_1 \to P_2$

Παράδειγμα



Μεγάλη επίπεδη αγώγιμη επιφάνεια φέρει ομοιόμορφο ηλ. φορτίο. Ποιό είναι το ηλ. δυναμικό σε απόσταση z από την επιφάνεια?

[Υποθέτουμε πάνω στην επιφάνεια V=0]

Είναι $E_z = E = \overset{=\frac{\sigma}{2\varepsilon}}{\text{σταθ.}}$ (ανεξάρτητο από το z)

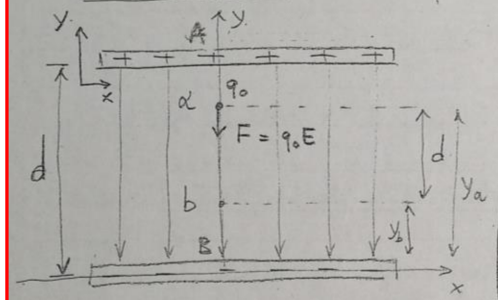
Αν P είναι ένα οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας

$$\underbrace{\cancel{V(P_0)}}_{0} - V(z) = -\int_0^z \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\underbrace{\cancel{\int E_x\,dx}}_{0} - \underbrace{\cancel{\int E_y\,dy}}_{0} - \int E_z\,dz$$

$$= -\int_0^z E_z\,dz = -Ez$$

Δηλ. $\boxed{V = Ez}$ ~ απόσταση από την επιφάνεια

Παράδειγμα: Ηλεκτρική δυν. ενέργεια σε ομογενές πεδίο



$$W_{\alpha \to b} = Fd = q_0 E d \quad (1).$$

[ανάλογα με ένα σωματίδιο μάζας m στο οποίο ασκείται

$\vec{F} = m\vec{g} \Rightarrow F_y = -mg$

Δυν. ενέργεια: $U = mgy$]

Όταν το φορτίο κινείται από το $\alpha \to b$:

$$W_{\alpha \to b} = -\Delta U = -(U_b - U_a) =$$

$$= -(q_0 E y_b - q_0 E y_a) = +q_0 E (y_a - y_b) = q_0 \overset{V}{Ed}$$

όπως στην (1).

Επίσης: $V_A - V_B = Ed = \frac{\rho d}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\rho = \varepsilon_0 \frac{V_{AB}}{d}}$

Διαγνωστικό για μέτρηση του ρ.

Γενική συμπεριφορά:

Αν το φορτίο (+ ή −) κινείται αντίθετα με τη δύναμη $\vec{F} = q_0 \vec{E}$ $\Rightarrow U \nearrow$

Αν το φορτίο (+ ή −) κινείται στην ίδια κατ/ση με την $\vec{F} = q_0 \vec{E}$ $\Rightarrow U \searrow$

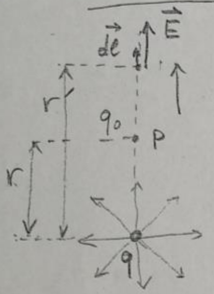
Ίδια συμπεριφορά με τη βαρυτική δυναμική ενέργεια:

▷▷ Αν η μάζα κινείται προς τα πάνω $\Rightarrow U \nearrow$
(αντίθετα με $\vec{g} = -g\hat{y}$)

▷▷ Αν η μάζα κινείται προς τα κάτω $\Rightarrow U \searrow$

Παράδειγμα

Δυναμικό που οφείλεται σε σημειακό φορτίο



▷ Θεωρούμε το φορτίο q (και το πεδίο γύρω του)

▷ Θεωρούμε ένα δοκιμαστικό φορτίο q_0 το οποίο μετακινούμε από το P ως το ∞.

Τότε: $\vec{E}\cdot\vec{dl} = E\underbrace{\cancel{\cos\theta}}_{1}\, \underbrace{dl}_{dl=dr} = E\,dr'$

$(\theta=0 \Rightarrow \cos\theta = 1)$

Από ορισμούς: $\underbrace{\cancel{V_\infty}}_{0} - V_p = -\int_r^{+\infty} E\,dr' \Rightarrow$

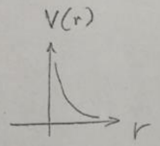
$$\Rightarrow V_p = \int_r^{\infty} E\,dr'$$

Επίσης: $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r'^2}$

$$\Rightarrow V_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^{+\infty}\frac{dr'}{r'^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'}\Big|_r^{\infty} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}}$$

{ Θετικό φορτίο ⟶ θετικό ηλ. δυναμικό
Αρνητικό –"– ⟶ αρνητικό –"– }



(*) Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και πάνω ή έξω από σφαιρική κατανομή φορτίου ⟶ νόμος Gauss (και επιφάνεια Gauss με r > R)

βλ. p.24

▷▷ Δυναμική ενέργεια του q_0: $\boxed{U = q_0 V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_0 q}{r}}$

Επίσης ; αφού $U = q_0 V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r^2}$

$\Rightarrow$ Συνολική μηχ. ενέργεια σημειακού φορτίου που κινείται σε ηλ. πεδίο:

$$\boxed{E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r} = σταθ.}$$

Παράδειγμα: Διηλεκτρική σφαίρα ακτίνας R φέρει συνολικό φορτίο Q ομοιόμορφα κατανεμημένο στον όγκο της. Να βρεθεί το ηλ. δυναμικό μέσα κι έξω απ' τη σφαίρα.

▷ Έξω από τη σφαίρα:

$$\boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}\ ,\quad r \geq R}$$

[γιατί $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$ και $\cancel{V_\infty} - V(r) = -\int_r^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r'^2}dr' \Rightarrow$

$\Rightarrow V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$]

▷ Μέσα στη σφαίρα: $\boxed{E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qr}{R^3}\ ,\quad r \leq R}$

Διαφορά δυναμικού μεταξύ R και r:

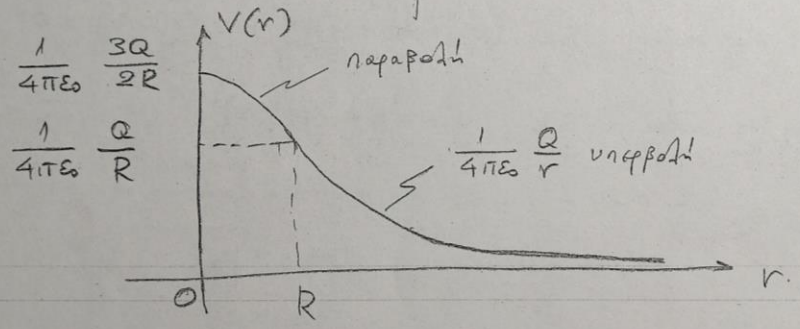
$$V(r) - V(R) = -\int_R^r \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qr'}{R^3}dr' = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2R^3} - \frac{1}{2R}\right)$$

Άρα: $V(r) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2R^3} - \frac{1}{2R}\right) + V(R)$

Όμως αφού $V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$, για $r \geq R$

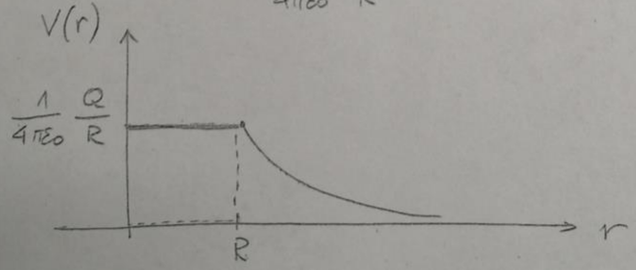
βρίσκουμε ότι για $r = R$: $V(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow V(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qr^2}{2R^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q}{2R} \quad \text{για } r \leq R$$



Αν η σφαίρα ήταν μεταλλική:

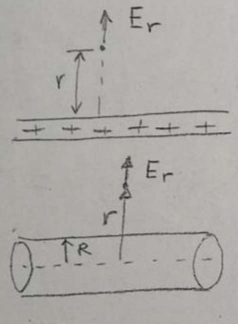
$$V(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}, & r \geq R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}, & r \leq R \end{cases}$$



Παράδειγμα:

Άπειρη γραμμική κατανομή φορτίου $\rightarrow$ αγώγιμος φορτισμένος κυλινδρικός αγωγός

Να βρεθεί το δυναμικό σε απόσταση r σε αγωγό με γραμμική πυκνότητα φορτίου ρ.



Είχαμε βρεί: $E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho}{r}$

οπότε

$$V_P - V_{P_0} = \int_P^{P_0} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_P^{P_0} E_r dr \quad (*)$$

$$= \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_P}^{r_{P_0}} \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_{P_0}}{r_P}\right)$$

Επιλέγουμε: P_0 έτσι ώστε $V_{P_0} = 0$ στο σημείο P_0 σε απόσταση $r_{P_0} = r_0$

Τότε $V_P \equiv V(r)$ σε απόσταση r και $r = r_P$

$$V(r) - 0 = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r} \searrow \text{ καθώς } r \nearrow$$

Μπορούμε επίσης να επιλέξουμε $r_0 = R$ ακτίνα του αγωγού

οπότε $\forall r > R$: $\boxed{V(r) = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r}}$, $r \geq R$

Έτσι $\vec{E} = 0$ μέσα στον αγωγό και

$V = 0$ —— " ——

(*) $V = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^R \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r}$