Στοιχεία Ηλεκτροστατικής

Το υλικό [1] που περιλαμβάνεται στις σελίδες που ακολουθούν δεν αποτελεί κατ΄ ουδένα τρόπο πλήρεις σημειώσεις, αλλά έναν οδηγό για την παρακολούθηση του μαθήματος και την μελέτη των προτεινόμενων συγγραμμάτων.

Διδάσκοντες

Βούλγαρης Γ. Μαϊντάς Ξ.
Διαμάντης Γ. Σαουλίδου Ν.

[1] Τα σχήματα 1, 2, 3, 4, 5, έχουν ληθφεί από τις σημειώσεις του μαθήματος 8.02 του Πανεπιστημίου MIT με την φιλική συγκατάθεση του καθηγητού G. S.F. Stephans

1 Νόμος του Coulomb - Ηλεκτρικό Πεδίο

1.1 Νόμος Coulomb

- Διατύπωση του νόμου.
  Ας θεωρήσουμε φορτίο q_1 στο σημείο P_1 και φορτίο q_2 στο σημείο P_2. Η ηλεκτρική δύναμη την οποία ασκεί το ένα φορτίο στο άλλο είναι:
  ★ Ανάλογη του γινομένου των απολύτων τιμών των φορτίων.
  ★ Αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης μεταξύ των φορτίων.
  ★ Έχει διεύθυνση την ευθεία που ορίζουν τα δύο φορτία.
  ★ Είναι απωστική εάν τα φορτία είναι ομόσημα.
  ★ Είναι ελκτική εάν τα φορτία είναι ετερόσημα.

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{\mathrm{r}^2}\hat{\mathrm{r}}, \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 10^{-7}c^2\frac{Nt\,s^2}{C^2}$$

  όπου r είναι η απόσταση μεταξύ των δύο φορτίων και $\hat{\mathrm{r}}$ το μοναδιαίο άνυσμα στην κατεύθυνση από το φορτίο q_1 στο φορτίο q_2 .

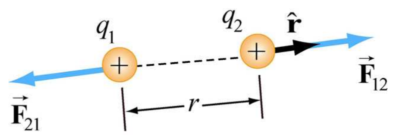
- Η δύναμη Coulomb ικανοποιεί τον νόμο δράσης αντίδρασης.

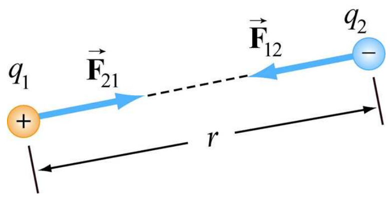
- Σε ένα σύστημα αναφοράς

$$\mathrm{r} = \mid \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \mid = \sqrt{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\cdot(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}, \quad \hat{\mathrm{r}} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\mathrm{r}} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\mid \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \mid}$$

- και επομένως

$$\boxed{\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\mathrm{r}^2}\hat{\mathrm{r}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\mid \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \mid^3}}$$





Σχήμα 1: Η δύναμη μεταξύ δύο φορτίων είναι απωστική (ελκτική) εάν τα φορτία είναι ομόσημα (ετερόσημα).

1.2 Επαλληλία

Εάν θεωρήσουμε φορτία $q_1,\, q_2,\, \ldots\, q_n$ στίς θέσεις $\vec{r}_1,\, \vec{r}_2, \ldots\, \vec{r}_n$, αντίστοιχα τότε η δύναμη που ασκείται σε φορτίο q στην θέση $\vec{r}$ είναι το ανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων που ασκεί κάθε ένα εκ των φορτίων στο φορτίο q

$$\begin{aligned}
\vec{F}_q &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_1}{\mathfrak{r}_1^2}\hat{\mathfrak{r}}_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_2}{\mathfrak{r}_2^2}\hat{\mathfrak{r}}_2 + \cdots + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_n}{\mathfrak{r}_n^2}\hat{\mathfrak{r}}_n \\
&= \frac{qq_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} + \cdots + \frac{qq_n}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_n}{|\vec{r}-\vec{r}_n|^3} \\
&= \sum_{i=1}^{i=n}\frac{qq_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}
\end{aligned}$$

όπου προφανώς $\mathfrak{r}_i$ είναι η απόσταση του φορτίου q_i από το φορτίο q και $\hat{\mathfrak{r}}_i$ το μοναδιαίο άνυσμα με κατεύθυνση από το φορτίο q στο φορτίο q_i.

1.3 Ηλεκτρικό Πεδίο

- Το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο του χώρου ισούται με την ηλεκτρική δύναμη την οποίαν δέχεται φορτίο q στο σημείο αυτό προς το φορτίο (δύναμη ανά μονάδα φορτίου)

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}_q}{q}}$$

- Φορτίο q ευρισκόμενο σε ηλεκτρικό πεδίο εντάσεως $\vec{E}$ δέχεται δύναμη

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E}}$$

- **Ηλεκτρικό πεδίο Coulomb**

  Ηλεκτρικό φορτίο q στο σημείο $\vec{r}_q$ δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο σε όλο τον χώρο

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_q}{|\,\vec{r}-\vec{r}_q\,|^3}}$$

- **Επαλληλία**

  Το ηλεκτρικό πεδίο το οποίο δημιουργούν φορτία $q_1,\ q_2,\ \ldots\ q_n$ στίς θέσεις $\vec{r}_1,\ \vec{r}_2, \ldots\ \vec{r}_n$, αντίστοιχα

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) &= \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\tfrac{q_1}{\mathfrak{r}_1^2}\hat{\mathfrak{r}}_1 + \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\tfrac{q_2}{\mathfrak{r}_2^2}\hat{\mathfrak{r}}_2 + \cdots + \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\tfrac{q_n}{\mathfrak{r}_n^2}\hat{\mathfrak{r}}_n \\
&= \tfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\tfrac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} + \cdots + \tfrac{q_n}{4\pi\varepsilon_0}\tfrac{\vec{r}-\vec{r}_n}{|\vec{r}-\vec{r}_n|^3} \\
&= \sum_{i=1}^{i=n}\tfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\tfrac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}
\end{aligned}$$

1.4 Συνεχείς κατανομές φορτίου

- Γραμμική κατανομή

$$dq(\vec{r}\,') = \lambda(\vec{r}\,')dl(\vec{r}\,'), \qquad \vec{r}\,' \in C$$

- Επιφανειακή κατανομή

$$dq(\vec{r}\,') = \sigma(\vec{r}\,')ds(\vec{r}\,'), \qquad \vec{r}\,' \in S$$

- Χωρική κατανομή

$$dq(\vec{r}\,') = \varrho(\vec{r}\,')dl(\vec{r}\,'), \qquad \vec{r}\,' \in V$$

  Οι ποσότητες $\lambda,\ \sigma,\ \varrho,$ καλούνται, **γραμμική, επιφανειακή** και **χωρική**, πυκνότητες φορτίου αντίστοιχα.

- Το στοιχειώδες ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο του χώρου $\vec{r}$

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{(|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|)^3}$$

- Το ολικό ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο του χώρου $\vec{r}$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \frac{\lambda(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{(|\vec{r}-\vec{r}'|)^3}dl(\vec{r}') \\ \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{(|\vec{r}-\vec{r}'|)^3}ds(\vec{r}') \\ \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\varrho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{(|\vec{r}-\vec{r}'|)^3}dv(\vec{r}') \end{cases}}$$

Προφανώς στην περίπτωση που έχουμε διακριτά φορτία και πολλές συνεχείς κατανομές διαφόρων μορφών η επαλληλία μας δίνει πάλι το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο.

1.5 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1.

Κυκλικός δακτύλιος ακτίνας R φέρει ομογενή γραμμική κατανομή φορτίου πυκνότητος λ. Να ευρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στα σημεία του άξονα του δακτυλίου, δηλαδή στα σημεία της ευθείας η οποία είναι κάθετη στο επίπεδο του δακτυλίου και διέρχεται από το κέντρο του.

Λύση.

Θεωρώντας τον δακτύλιο στο επίπεδο $x-y$ με το κέντρο του στην αρχή των αξόνων, τα σημεία του παρίστανται από τα ανύσματα

$$\vec{r}' = R\,cos\varphi'\hat{i} + R\,sin\varphi'\hat{j}$$

όπου $0 \leq \varphi' \leq 2\pi$, η γωνία του ανύσματος με τον άξονα x.

Τα σημεία του άξονα επί του οποίου ζητούμε το ηλεκτρικό πεδίο είνα τα σημεία του άξονα z παριστάμενα από τα ανύσματα $\vec{r} = z\hat{k}$.

Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί στοιχειώδες φορτίο επί του δακτυλίου δίνεται από την σχέση

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{(\mid \vec{r}-\vec{r}' \mid)^3}$$

όπου

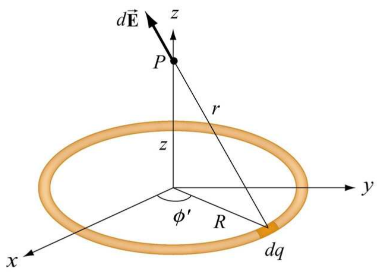
$$dq(\vec{r}') = \lambda(\vec{r}')dl(\vec{r}') = R\lambda d\varphi'$$

και

$$\vec{r}-\vec{r}' = -R\,cos\varphi'\hat{i} - R\,sin\varphi'\hat{j} + z\hat{k}, \qquad \mid \vec{r}-\vec{r}' \mid = (R^2+z^2)^{1/2}$$

Επομένως το ολικό ηλεκτρικό πεδίο στο τυχαίο σημείο P του άξονα z δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \frac{\lambda(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{(|\vec{r}-\vec{r}'|)^3}dl(\vec{r}') \\
&= \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} \frac{-R\,cos\varphi'\hat{i} - R\,sin\varphi'\hat{j} + z\hat{k}}{(R^2+z^2)^{3/2}}d\varphi' \\
&= \frac{\lambda R z 2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k} \\
&= \boxed{\frac{\lambda R z}{2\varepsilon_0}\frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k} = \frac{Q_\delta z}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}}
\end{aligned}$$



Σχήμα 2: Το στοιχειώδες φορτίο $dq = R\lambda d\varphi'$ δημιουργεί στο σημείο P το στοιχειώδες ηλεκτρικό πεδίο $d\vec{E}$. Το ολικό πεδίο ευρίσκεται με ολοκλήρωση σε όλο το μήκος του δακτυλίου.

όπου $Q_\delta = \lambda 2\pi R$ το συνολικό φορτίο της κατανομής.

Παρατηρήσεις

- Εάν $\mid z \mid \gg R$ τότε

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q_\delta}{4\pi\varepsilon_0}\frac{sign(z)}{z^2}\hat{k}$$

  δηλαδή το ηλεκτρικό πεδίο τείνει στο πεδίο Coulomb που οφείλεται στο ολικό φορτίο της κατανομής εάν αυτό ευρίσκετο στην αρχή των αξόνων. (Σε αποστάσεις πολύ μεγαλύτερες της ακτίνας χάνονται οι λεπτομέρειες της γεωμετρίας της κατανομής.)

- Γενικώτερα για μή ομογενή κατανομή $\lambda(\varphi')$ σε τμήμα δακτυλίου $\varphi_1 \leq \varphi' \leq \varphi_2$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_x(\vec{r})\hat{\imath} + E_y(\vec{r})\hat{\jmath} + E_z(\vec{r})\hat{k}$$

  όπου

$$\begin{aligned} E_x(\vec{r}) &= \tfrac{R^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\tfrac{-\lambda(\varphi')\,cos\varphi'}{(R^2+z^2)^{3/2}}d\varphi' \\ E_y(\vec{r}) &= \tfrac{R^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\tfrac{-\lambda(\varphi')\,sin\varphi'}{(R^2+z^2)^{3/2}}d\varphi' \\ E_z(\vec{r}) &= \tfrac{Rz}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\tfrac{\lambda(\varphi')}{(R^2+z^2)^{3/2}}d\varphi' \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.

Κυκλικός δίσκος ακτίνας R φέρει ομογενή επιφανειακή κατανομή φορτίου πυκνότητος σ. Να ευρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στα σημεία του άξονα του δίσκου, δηλαδή στα σημεία της ευθείας η οποία είναι κάθετη στο επίπεδο του δίσκου και διέρχεται από το κέντρο του.

Λύση.

Θεωρώντας τον δίσκο στο επίπεδο $x-y$ με το κέντρο του στην αρχή των αξόνων, τα σημεία του παρίστανται από τα ανύσματα

$$\vec{r}' = r'\, cos\varphi'\hat{i} + r'\, sin\varphi'\hat{j}$$

όπου $0 \leq \varphi' \leq 2\pi$, η γωνία του ανύσματος με τον άξονα x και $0 \leq r' \leq R$.

Τα σημεία του άξονα επί του οποίου ζητούμε το ηλεκτρικό πεδίο είνα τα σημεία του άξονα z παριστάμενα από τα ανύσματα $\vec{r} = z\hat{k}$.

Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί στοιχειώδες φορτίο επί του δακτυλίου δίνεται από την σχέση

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{(\mid \vec{r}-\vec{r}' \mid)^3}$$

όπου

$$dq(\vec{r}') = \sigma(\vec{r}')ds(\vec{r}') = \sigma r' dr' d\varphi'$$

και

$$\vec{r}-\vec{r}' = -r'\, cos\varphi'\hat{i} - r'\, sin\varphi'\hat{j} + z\hat{k}, \qquad \mid \vec{r}-\vec{r}' \mid = (r'^2+z^2)^{1/2}$$

Επομένως το ολικό ηλεκτρικό πεδίο στο τυχαίο σημείο P του άξονα z δίνεται από το ολοκλήρωμα

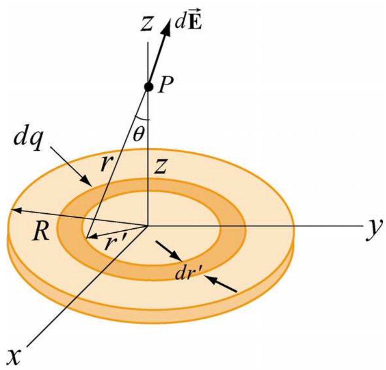
$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \tfrac{\lambda(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{(|\vec{r}-\vec{r}'|)^3}ds(\vec{r}') \\ &= \tfrac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\tfrac{-r'\, cos\varphi'\hat{i} - r'\, sin\varphi'\hat{j} + z\hat{k}}{(r'^2+z^2)^{3/2}}r'dr'd\varphi'.\end{aligned}$$

Η φ' ολοκλήρωση γίνεται απλά μηδενίζοντας τις συνιστώσες στο επίπεδο και δίνοντας

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma z 2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\hat{k}\int_0^R \frac{r'}{(r'^2+z^2)^{3/2}}dr'.$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα με την αλλαγή μεταβλητής $t = r'^2 \Rightarrow 2r'dr' = dt$,

$$\int_0^R \frac{r'}{(r'^2+z^2)^{3/2}}dr' = \frac{1}{2}\int_0^{R^2}\frac{1}{(t+z^2)^{3/2}}dt = -\frac{1}{(t+z^2)^{1/2}}\Big|_0^{R^2} = \frac{1}{\mid z \mid} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}.$$



Σχήμα 3: Ο δακτύλιος ακτίνας r' και στοιχειώδους πάχους dr' έχει φορτίο δQ_δ και δημιουργεί στο σημείο P το στοιχειώδες ηλεκτρικό πεδίο $d\vec{E}$. Το ολικό πεδίο ευρίσκεται με ολοκλήρωση σε όλο το εύρος των ακτίνων των στοιχειωδών δακτυλίων $0 \leq r' \leq R$.

Επομένως

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) \;=\; \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{\mid z\mid} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\hat{k} \;=\; \frac{Q_\Delta}{2\pi R^2 \varepsilon_0}\left(\frac{z}{\mid z\mid} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\hat{k}}$$

όπου $Q_\Delta \;=\; \sigma\pi R^2$ το συνολικό φορτίο της κατανομής.

Παρατηρήσεις

- Το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να υπολογισθεί και θεωρώντας το ηλεκτρικό πεδίο στοιχειωδών δακτυλίων ακτίνας r', πάχους dr' και αθροίζοντας ώστε να σαρωθεί όλος ο δίσκος, $0 \leq r' \leq R$. Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα το ηλεκτρικό πεδίο κάθε τέτοιου δακτυλίου είναι:

$$d\vec{E}(\vec{r}) \;=\; \frac{\delta Q_\delta z}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(r'^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}$$

όπου $\delta Q_\delta \;=\; \sigma 2\pi r' dr'$. Επομένως το ολικό ηλεκτρικό πεδίο ευρίσκεται με ολοκλήρωση της ανωτέρω έκφρασης μεταξύ των ορίων του r':

$$\vec{E}(\vec{r}) \;=\; \int_0^R d\vec{E}(\vec{r}) \;=\; \frac{\sigma z 2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\hat{k}\int_0^R \frac{r'}{(r'^2+z^2)^{3/2}}dr'$$

δηλαδή το ολοκλήρωμα το οποίο υπολογίσθηκε προηγουμένως, οδηγώντας προφανώς στο αυτό αποτέλεσμα.

- Εάν $\mid z \mid \gg R$ τότε

$$\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \;=\; \frac{z}{\mid z\mid}\left(1 - \frac{R^2}{2\,z^2}\right)$$

οπότε

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q_\Delta}{4\pi\varepsilon_0}\frac{sign(z)}{z^2}\hat{k}$$

δηλαδή και σε αυτήν την περίπτωση, το ηλεκτρικό πεδίο τείνει στο πεδίο Coulomb που οφείλεται στο ολικό φορτίο της κατανομής εάν αυτό ευρίσκετο στην αρχή των αξόνων. (Σε αποστάσεις πολύ μεγαλύτερες της ακτίνας χάνονται οι λεπτομέρειες της γεωμετρίας της κατανομής.)

- Γενικώτερα για μή ομογενή κατανομή $\sigma(r', \varphi')$ σε τμήμα δίσκου $r_1 \leq r' \leq r_2$, $\varphi_1 \leq \varphi' \leq \varphi_2$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_x(\vec{r})\hat{\imath} + E_y(\vec{r})\hat{\jmath} + E_z(\vec{r})\hat{k}$$

όπου

$$\begin{aligned}
E_x(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{-\sigma(r',\varphi')r'^2\,cos\varphi'}{(r'^2+z^2)^{3/2}}dr'd\varphi' \\
E_y(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{-\sigma(r',\varphi')r'^2\,sin\varphi'}{(r'^2+z^2)^{3/2}}dr'd\varphi' \\
E_z(\vec{r}) &= \frac{z}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\sigma(r'\,\varphi')r'}{(r'^2+z^2)^{3/2}}dr'd\varphi'
\end{aligned}$$

Προβλήματα.

1. Σε ράβδο αμελητέας διατομής και μήκους L υπάρχει ομοιόμορφη κατανομή φορτίου λ. Να ευρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο σε όλο τον χώρο. Να γραφεί το άνυσμα $\vec{E}(\vec{R})$ εάν η ράβδος τοποθετηθεί επί του άξονα z καταλαμβάνοντας το ευθύγραμμο τμήμα $0 \leq z \leq L$.

2. Σε ράβδο αμελητέας διατομής και απείρου μήκους υπάρχει ομοιόμορφη κατανομή φορτίου λ. Να ευρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο σε όλο τον χώρο. Να γραφεί το άνυσμα $\vec{E}(\vec{r})$ εάν η ράβδος τοποθετηθεί επί του άξονα z καταλαμβάνοντας το ευθύγραμμο τμήμα $-\infty < z < \infty$.

3. Τα αυτά ερωτήματα να απαντηθούν για ομοιόμορφη γραμμική κατανομή φορτίου λ σε ημιευθεία ($0 \leq z < \infty$). Να ευρεθούν τα σημεία του χώρου στα οποία το ηλεκτρικό πεδίο σχηματίζει γωνία 45° με την ευθεία της κατανομής.

4. Σε δακτύλιο ακτίνας R ο οποίος είναι τοποθετημένος στο επίπεδο $x - y$, με το κέντρο του στην αρχή των αξόνων, υπάρχει γραμμική κατανομή φορτίου $\lambda(\varphi) = \lambda_0\, sin\varphi$, όπου φ η γωνία της ακτίνας που διέρχεται από κάθε σημείο του με τον άξονα x. Ποίο είναι το ολικό φορτίο της κατανομής; Να ευρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στα σημεία του άξονα του δακτυλίου. Να συζητηθεί η συμπεριφορά του ηλεκτρικού πεδίου όταν $\mid z \mid\gg R$

5. Σε κυκλική στεφάνη, η οποία τοποθετείται όπως περιγράφεται στο προηγούμενο πρόβλημα, η οποία καθορίζεται από $R_1 \leq r \leq R_2$ υπάρχει επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma(r, \varphi) = rcos\varphi$. Να ευρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στα σημεία του άξονα του δακτυλίου. Να συζητηθεί η συμπεριφορά του ηλεκτρικού πεδίου όταν $\mid z \mid \gg R_2$

2 Ο Νόμος του Gauss

Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου από μία στοιχειώδη επιφάνεια είναι:

$$\Delta\Phi = \vec{E}(P)\cdot\hat{n}\Delta A,$$

όπου P ένα σημείο της στοιχειώδους επιφάνειας, $\hat{n}$ το μοναδιαίο άνυσμα το κάθετο στην επιφάνεια και ΔA το εμβαδόν αυτής.
Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου από μία επιφάνεια S δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$\Phi = \int_S \vec{E}\cdot\hat{n}da.$$

και συμβολίζεται $\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}da$ εάν η επιφάνεια είναι κλειστή, όπου τώρα το μοναδιαίο άνυσμα $\hat{n}$ είναι αυτό που δείχνει προς το εξωτερικό της περιοχής που καθορίζει η κλειστή επιφάνεια.

Για το πεδίο Coulomb (σημειακού φορτίου q) η ροή του πεδίου από στοιχειώδη επιφάνεια εξαρτάται μόνο από την στερεά γωνία υπό την οποίαν το φορτίο ¨βλέπει¨ την επιφάνεια,

$$\Delta\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r}\cdot\hat{n}\Delta A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}r^2\Delta\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Delta\Omega.$$

Αυτό έχει ως συνέπεια:

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}da = \begin{cases} \frac{q}{\varepsilon_0}, & q \in V(S) \\ 0, & q \notin V(S). \end{cases}$$

Η αρχή της επαλληλίας επάγει τον νόμο της ηλεκτρικής ροής (Gauss) :

Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου από μία κλειστή επιφάνεια ισούται με το φορτίο που περικλείει η επιφάνεια αυτή προς ε_0.

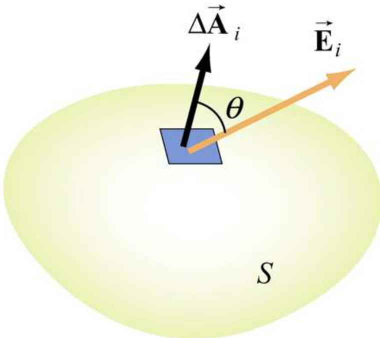
$$\boxed{\oint_{S(V)} \vec{E}\cdot\hat{n}da = \frac{Q_V}{\varepsilon_0}}$$

Ο ανωτέρω νόμος οδηγεί στην πρώτη εξίσωση της ηλεκτροστατικής με την χρήση του θεωρήματος Gauss:

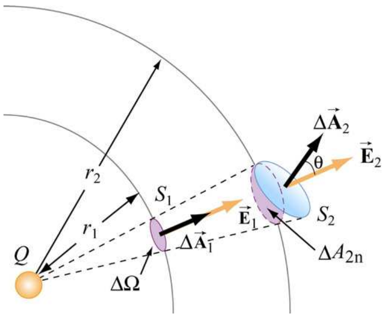
$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}dv = \oint_{S(V)} \vec{E}\cdot\hat{n}da$$

Πράγματι εφαρμόζοντας το θεώρημα, το αριστερό μέλος του νόμου της ηλεκτρικής ροής γράφεται ως ένα ολοκλήρωμα στην περιοχή του χώρου η οποία περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια ενώ το δεξιό μέλος γράφεται:

$$\frac{Q_V}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \varrho dv,$$



Σχήμα 4: Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου από στοιχειώδες τμήμα ΔA_i επιφάνειας S ορίζεται ως : $\Delta\Phi_i = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$ όπου $\vec{E}_i$ το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο του τμήματος και $\Delta\vec{A}_i$ άνυσμα κάθετο στην επιφάνεια στο σημείο αυτό μέτρου ίσου με το εμβαδόν αυτής $\Delta\vec{A}_i = \hat{n}\Delta A_i$.



Σχήμα 5: Η ροή του πεδίου σημειακού ηλεκτρικού φορτίου από στοιχειώδη επιφάνεια εξαρτάται μόνο από την στερεά γωνία υπό την οποίαν το φορτίο ¨βλέπει¨ την επιφάνεια.

όπου ϱ η χωρική πυκνότητα φορτίου. Επομένως:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \varrho dv.$$

Για να ισχύει η ανωτέρω σχέση για κάθε περιοχή του χώρου V, πρέπει οι ολοκληρωτέες συναρτήσεις να είναι ίσες και επομένως:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}}$$

Παράδειγμα 3. Σφαίρα ακτίνας a είναι φορτισμένη με ομογενή χωρική κατανομή φορτίου πυκνότητος κ. Να ευρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο σε όλο τον χώρο.

Λύση.

Το πρόβλημα έχει σφαιρική συμμετρία, δηλαδή:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r},$$

σε σύστημα αναφοράς με αρχή το κέντρο της σφαιρικής κατανομής. Λόγω της μορφής του ηλεκτρικού πεδίου, αυτό μπορεί να υπολογισθεί με την εφαρμογή του νόμου της ηλεκτρικής ροής (Gauss). Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου από οιαδήποτε σφαίρα ακτίνας r με κέντρο το κέντρο της συμμετρίας (αρχή των αξόνων) δίνεται πολύ απλά από την σχέση:

$$\Phi_{S(r)} = \oint_{S(r)} E(r)\hat{r}\cdot\hat{r}da = E(r)4\pi r^2, \quad (da = r^2 d\Omega,\ d\Omega = sin\theta d\theta d\varphi),$$

οπότε ο νόμος της ηλεκτρικής ροής δίνει:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{V(r)}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{V(r)}}{r^2}$$

και

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{V(r)}}{r^2}\hat{r}.$$

Επομένως για κάθε σημείο του χώρου το οποίο απέχει απόσταση r από το κέντρο της κατανομής, αρκεί να υπολογισθεί πόσο φορτίο περικλείεται σε σφαίρα ακτίνας r.

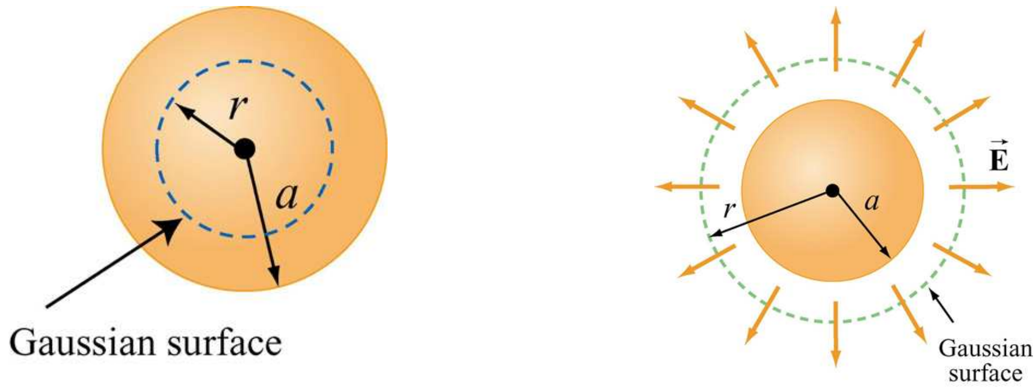
$$Q_{V(r)} = \begin{cases} \frac{4\pi r^3\kappa}{3}, & r < a \\ \\ \frac{4\pi R^3\kappa}{3}, & r > a \end{cases}$$

Κατά συνέπειαν

$$E(r) = \begin{cases} \frac{r\kappa}{3\varepsilon_0}, & r < a \\ \\ \frac{a^3\kappa}{3\varepsilon_0 r^2}, & r > a \end{cases} \Rightarrow \vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{r\kappa}{3\varepsilon_0}\hat{r}, & r < a \\ \\ \frac{a^3\kappa}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r}, & r < a \end{cases}$$

Παρατήρηση. Η σφαιρική συμμετρία επιτρέπει τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου για κάθε χωρική κατανομή $\varrho(r)$. Σε αυτήν την περίπτωση

$$Q_{V(r)} = \int_{V(r)} \varrho(r')dv = \int_{V(r)} \varrho(r')r'^2 dr' d\Omega = 4\pi \int_0^r \varrho(r')r'^2 dr'.$$



Σχήμα 6: Κατάλληλες επιφάνειες Gauss για τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου στις περιπτώσεις $r < a$ και $r > a$.

Παράδειγμα 4. Σφαιρική επιφάνεια ακτίνας a είναι φορτισμένη με ομογενή επιφανειακή κατανομή φορτίου πυκνότητος σ. Να ευρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο σε όλο τον χώρο.

Λύση.

Το πρόβλημα έχει σφαιρική συμμετρία, δηλαδή:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r},$$

οπότε με βάση την ανάλυση του προηγουμένου παραδείγματος για να υπολογισθεί το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο που απέχει απόσταση r από το κέντρο της σφαιρικής συμμετρίας αρκεί να ευρεθεί το φορτίο που περικλείεται σε σφαίρα ακτίνας r:

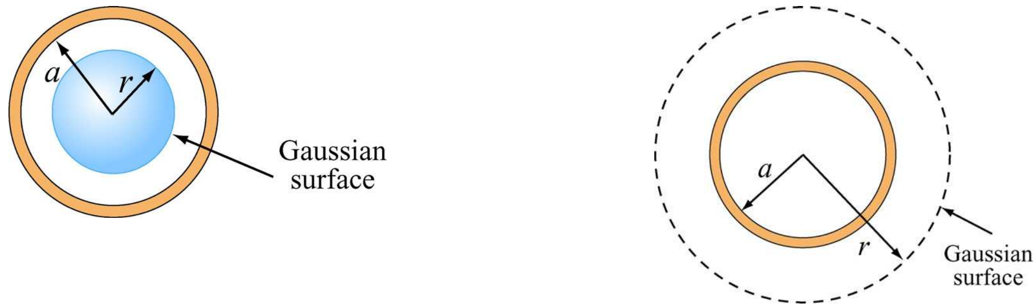
$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{V(r)}}{r^2}\hat{r}.$$

Για την κατανομή του παραδείγματος :

$$Q_{V(r)} = \begin{cases} 0, & r < a \\ \\ 4\pi a^2\sigma, & r > a \end{cases}$$

Κατά συνέπειαν

$$E(r) = \begin{cases} 0, & r < a \\ \\ \frac{a^2\sigma}{\varepsilon_0 r^2}, & r > a \end{cases} \Rightarrow \vec{E}(r) = \begin{cases} 0, & r < a \\ \\ \frac{a^2\sigma}{\varepsilon_0 r^2}\hat{r}, & r > a \end{cases}$$



Σχήμα 7: Κατάλληλες επιφάνειες Gauss για τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου στις περιπτώσεις $r < a$ και $r > a$.

3 Ηλεκτρικό Δυναμικό

Εάν θεωρήσουμε το έργο το οποίο καταναλώνουν οι δυνάμεις του ηλεκτρικού πεδίου κατά την μετάβαση φπρτίου από την θέση A στην θέση B κινούμενου κατά μήκος καμπύλης γραμμής C, ανά μονάδα φορτίου, δηλαδή :

$$W_{A \xrightarrow{C} B} = -\int_C \vec{E} \cdot \vec{dl}.$$

Ο νόμος του Coulomb και η γραμμική επαλληλία επάγουν ότι το έργο αυτό είναι ανεξάρτητο του δρόμου C, εξαρτάται μόνο από τα σημεία A και B ορίζοντας έτσι την διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο σημείων :

$$W_{A \xrightarrow{C} B} = -\int_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} = \phi(B) - \phi(A).$$

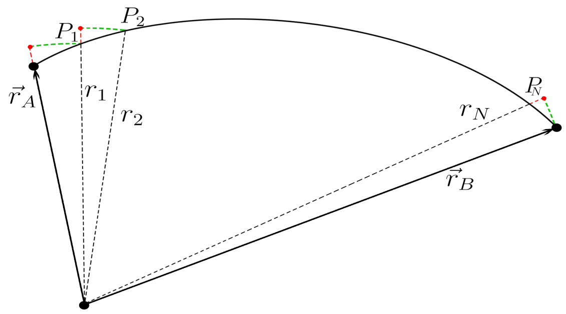
Η συνάρτηση του βαθμωτού δυναμικού ορίζεται ως :

$$\phi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

όπου το σημείο μηδενικού δυναμικού το οποίο είναι αυθαίρετο. Οι διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου αυτού. Πράγματι

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1) &= -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{E} \cdot \vec{dl} - \left(-\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{E} \cdot \vec{dl} \right) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{E} \cdot \vec{dl} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{E} \cdot \vec{dl} \\ &= \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{E} \cdot \vec{dl} - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot \vec{dl} \end{aligned}$$

που συμπίπτει με την διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων χωρίς αναφορά σε κάποιο ¨σημείο αναφοράς¨. Τα πεδία για τα οποία ισχύει ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμά τους



Σχήμα 8: Το όριο της έγχρωμης γραμμής όταν το πλήθος των όρων της διαμέρισης τείνει στο άπειρο με το μήκος κάθε στοιχείου της να τείνει στο μηδέν, είναι η τυχαία γραμμή μεταξύ των δύο σημείων. Ο υπολογισμός της ποσότητας $-\int \vec{E}\cdot\vec{dl}$ κατά μήκος της εν λόγω γραμμής δεικνύει την ανεξαρτησία της από την διαδρομή.

κατά μήκος μίας καμπύλης εξαρτάται μόνο από τα άκρα της καμπύλης ονομάζονται *διατηρητικά*. Αυτή η ιδιότητα εκφράζεται, όπως είναι γνωστό, με οποιαδήποτε από τις ακόλουθες ισοδύναμες προτάσεις (οι οποίες θα διατυπωθούν για το ηλεκτροστατικό αλλά ισχύουν για κάθε διατηρητικό πεδίο):

- Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα
  $W_{A \xrightarrow{C} B} = -\int_C \vec{E}\cdot\vec{dl}$
  είναι ανεξάρτητο του δρόμου C.

- Η κυκλοφορία του πεδίου κατά μήκος οιασδήποτε κλειστής καμπύλης μηδενίζεται: $\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\vec{dl} = 0$.

- Το πεδίο είναι αστρόβιλο: $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$.

- Το πεδίο είναι η βαθμίδα μίας βαθμωτής συνάρτησης $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$.

Ας σημειωθεί εδώ ότι η ισοδυναμία της μηδενικής κυκλοφορίας με το αστρόβιλο του πεδίου προκύπτει μέσω του θεωρήματος Stokes

$$\boxed{\oint_{\Gamma(S)} \vec{E}\cdot\vec{dl} = \int_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,da}$$

Για κατανομές φορτίου που περιορίζονται σε πεπερασμένη περιοχή του χώρου, επιλέγεται συνήθως το άπειρο ως σημείο μηδενισμού του δυναμικού. Με την ανωτέρω επιλογή το δυναμικό σημειακού φορτίου q στην αρχή των αξόνων είναι :

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}.$$

Εάν το φορτίο ευρίσκαται στην θέση $\vec{r}_1$ η ανωτέρω έκφραση γίνεται :

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\mid \vec{r}-\vec{r}_1 \mid}$$

Στην περίπτωση πολλών διακριτών φορτίων η πεπερασμένων συνεχών κατανομών φορτίου η αρχή της επαλληλίας του δυναμικού δίνει

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{i=N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{\mid \vec{r}-\vec{r}_i \mid}$$

για διακριτά σημειακά φορτία $q_1,\, q_2,\, \cdots\, q_N$ στις θέσεις $\vec{r}_1,\, \vec{r}_2,\, \cdots\, \vec{r}_N$, αντίτοιχα και

$$\phi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \frac{\lambda(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dl \\ \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}ds \\ \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\varrho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv \end{cases}$$

για συνεχείς (γραμμική, επιφανειακή και χωρική) κατανομές φορτίου.

Παράδειγμα 5.

α. Στα παραδείγματα 1 και 2 να υπολογισθεί το βαθμωτό δυναμικό στα σημεία του άξονα του δακτυλίου και του δίσκου αντίστοιχα.

β. Στα παραδείγματα 3 και 4 να υπολογισθεί το βαθμωτό δυναμικό σε όλο τον χώρο.

Λύση.

α. Για την περίπτωση του δακτυλίου ο δυναμικό του στοιχειώδους φορτίου dq, στα σημία του άξονα z είναι:

$$d\phi(z\hat{k}) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{\lambda R d\varphi'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

όπου $r = \sqrt{R^2+z^2}$ η απόσταση του στοιχειώδους φορτίου από το αντίστοιχο σημείο του άξονα. Ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$\phi(z\hat{k}) = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0\, r}\int_0^{2\pi} d\varphi' = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\, r}$$

Για την περίπτωση του δίσκου αντίστοιχα:

$$d\phi(z\hat{k}) \;=\; \frac{\sigma r' dr' d\varphi'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r'^2 + z^2}},$$

οπότε με την ολοκλήρωση:

$$\phi(z\hat{k}) \;=\; \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{r' dr' d\varphi'}{\sqrt{r'^2 + z^2}} \;=\; \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r' dr'}{\sqrt{r'^2 + z^2}}.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα πάλι με την αλλαγή μεταβλητής $t = r'^2$ γίνεται:

$$\int_0^R \frac{r' dr'}{\sqrt{r'^2 + z^2}} \;=\; \frac{1}{2} \int_0^{R^2} \frac{dt}{\sqrt{t + z^2}} \;=\; \sqrt{t + z^2}\Big|_0^{R^2} \;=\; \sqrt{R^2 + z^2} - \mid z \mid .$$

Συνεπώς

$$\phi(z\hat{k}) \;=\; \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (\sqrt{R^2 + z^2} - \mid z \mid).$$

Παρατήρηση.
Γνωρίζοντας την συνάρτηση δυναμικού στον άξονα z, δηλαδή στα σημεία του άξονα νωρίζουμε μόνο την εξάρτηση από την συντεταγμένη z, επειδή οι άλλες δύο συντεταγμένες (x, y) είναι μηδέν, μπορούμε σε αυτά τα σημεία να υπολογίσουμε, από το δυναμικό, μόνο την z συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου

$$E_z(z\hat{k}) \;=\; -\frac{\partial \phi(z\hat{k})}{\partial z}$$

η οποία λόγω της συμμετρίας των προβλημάτων είναι και η μοναδική. Εφαρμόζοντας την ανωτέρω σχέση ευρίσκεται απλά το αποτέλεσμα των παραδειγμάτων 1 και 2.
β. Σε αυτήν την περίπτωση η ολοκλήρωση είναι τεχνικά αρκετά επίπονη, οπότε θα χρησιμοποιηθεί το ηλεκτρικό πεδίο το οποίο υπολογίσθηκε εύκολα με χρήση του νόμου της ηλεκτρικής ροής. Ειδικότερα:

$$\phi(r) \;=\; \int_r^\infty E(r')\, dr'.$$

(Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας η συνάρτηση δυναμικού εξαρτάται μόνον από την απόσταση του κάθε σημείου από το κέντρο της συμμετρίας και για τον υπολογισμό της ολοκληρώνουμε στην ακτινική ημιευθεία από το σημείο έως το άπειρο.)

$$r > a,\;\; \phi(r) \;=\; \int_r^\infty \frac{a^3\kappa}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r'^2} dr' \;=\; -\frac{a^3\kappa}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r'}\Big|_r^\infty \;=\; \frac{a^3\kappa}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

και

$$r < a,\;\; \phi(r) \;=\; \int_r^\infty E(r')\, dr' \;=\; \int_r^a \frac{\kappa r'}{3\varepsilon_0} dr' + \int_a^\infty \frac{a^3\kappa}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r'^2} dr' \;=\; \frac{\kappa}{6\varepsilon_0}(a^2 - r^2) + \frac{a^2\kappa}{3\varepsilon_0} \;=\; \frac{\kappa}{2\varepsilon_0} a^2 - \frac{\kappa}{6\varepsilon_0} r^2$$

Επομένως το αποτέλεσμα για την σφαίρα (παράδειγμα 3) είναι:

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{a^3\kappa}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r}, & r > a \\ \\ \frac{\kappa}{2\varepsilon_0}a^2 - \frac{\kappa}{6\varepsilon_0}r^2, & r < a \end{cases}$$

ενώ για την σφαιρική επιφάνεια (παράδειγμα 4), ακολουθώντας την ίδια διαδικασία:

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{a^2\sigma}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}, & r > a \\ \\ 0, & r < a \end{cases}$$

Παρατήρηση.
Η συνάρτηση δυναμικού είναι συνεχής. Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας :

$$E(r)\hat{r} = -\vec{\nabla}\phi(r) \Longrightarrow E(r) = -\frac{\phi(r)}{dr}$$

οπότε ο υπολογισμός γίνεται απλά με τις προκύπτουσες σταθερές να υπολογίζονται από την συνθήκη συνέχειας του δυναμικού και τον μηδενισμό του στο άπειρο. Για παράδειγμα στην περίπτωση της σφαίρας

$$r > a, \quad E(r) = \frac{a^3\kappa}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = -\frac{d\phi(r)}{dr} \Rightarrow \phi(r) = \frac{a^3\kappa}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} + c_1$$

και

$$r < a, \quad E(r) = \frac{\kappa r}{3\varepsilon_0} = -\frac{d\phi(r)}{dr} \Rightarrow \phi(r) = -\frac{\kappa}{6\varepsilon_0}r^2 + c_2.$$

Ο μηδενισμός του δυναμικού στο άπειρο δίνει $c_1 = 0$ και η συνέχεια του δυναμικού στην επιφάνεια $r = a$ δίνει $c_2 = \frac{\kappa}{2\varepsilon_0}a^2$ δίνοντας προφανώς το αποτέλεσμα που ευρέθηκε με την ολοκλήρωση.

4 Εξισώσεις της Ηλεκτροστατικής

Συνοψίζοντας

$$\oint_{S(V)} \vec{E}\cdot\hat{n}da = \frac{Q_V}{\varepsilon_0}, \qquad \oint_{\Gamma(S)} \vec{E}\cdot\vec{dl} = 0.$$

$$\text{(Θ. Gauss)}\Big\Updownarrow \qquad\qquad \text{(Θ. Stokes)}\Big\Updownarrow$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0.$$

5 Ενέργεια Ηλεκτροστατικού Πεδίου

Θεωρούμε ως ηλεκτροστατική ενέργεια μίας κατανομής φορτίου την ενέργεια η οποία καταναλώνεται για να αποκατασταθεί η κατανομή.

Διακριτά φορτία.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε διακριτά σημειακά φορτία $q_1,\ q_2,\ \ldots q_n$ στις θέσεις $\vec{r}_1,\ \vec{r}_2,\ \ldots \vec{r}_n$. Ως ηλεκτροστατική ενέργεια του εν λόγω συστήματος ορίζουμε την ενέργεια η οποία καταναλώνεται για να έλθουν τα φορτία αυτά στις θέσεις τους. Είναι απολύτως λογικό να θεωρήσουμε ότι η ενέργεια η οποία καταναλώθηκε για τον σκοπό αυτό είναι και η ενέργεια του ηλεκτροστατικού πεδίου το οποίο δημιουργούν τα φορτία. Για να βρούμε την ενέργεια που απαιτείται για την αποκατάσταση του συστήματος υποθέτουμε ότι κατ αρχήν όλα τα φορτία ευρίσκονται στο άπειρο μακριά το ένα από το άλλο και τα φέρνουμε ένα προς ένα στις θέσεις τους. Το φορτίο q_1 μπορεί να έλθει στην θέση του χωρίς κατανάλωση ενέργειας εφ' όσον κινείται σε μηδενικό ηλεκτρικό πεδίο. Έχοντας έλθει το φορτίο στην θέση του το φορτίο q_2 κινείται στο πεδίο που έχει δημιουργήσει το q_1 οπότε για να έλθει στην θέση του απαιτείται ενέργεια:

$$W_2 \,=\, \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\mid \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \mid}$$

Εν συνεχεία το q_3 θα έλθει στην θέση του κινούμενο στο πεδίο των δύο άλλων φορτίων και η ενέργεια η οποία απαιτείται είναι

$$W_3 \,=\, \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\mid \vec{r}_3 - \vec{r}_1 \mid} \,+\, \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\mid \vec{r}_3 - \vec{r}_2 \mid}$$

Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο το τελευταίο φορτίο q_n θα έλθει στην θέση $\vec{r}_n$ κινούμενο στο ηλεκτρικό πεδίο των $n-1$ φορτίων τα οποία έχουν ήδη αποκασταθεί οπότε θα απαιτηθεί ενέργεια

$$W_n \,=\, \frac{q_1 q_n}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\mid \vec{r}_n - \vec{r}_1 \mid} \,+\, \frac{q_2 q_n}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\mid \vec{r}_n - \vec{r}_2 \mid} \,+\, \cdots \frac{q_{n-1} q_n}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\mid \vec{r}_n - \vec{r}_{n-1} \mid}$$

Επομένως η συνολική ενέργεια του ηλεκτροστατικού πεδίου των φορτίων είναι

$$W \,=\, W_2 \,+\, W_3 \,+\, \cdots \,+\, W_n \,=\, \sum_{\substack{i,\,j\,=\,1 \\ i\,<\,j}}^{n} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\mid \vec{r}_i - \vec{r}_j \mid}.$$

Η ανωτέρω έκφραση μπορεί να γραφεί πιο συμμετρικά ως

$$W \,=\, \sum_{\substack{i,\,j\,=\,1 \\ i\,<\,j}}^{n} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\mid \vec{r}_i - \vec{r}_j \mid} \,=\, \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\mid \vec{r}_i - \vec{r}_j \mid}.$$

Με την τελευταία γραφή είναι φανερό ότι η ενέργεια του πεδίου είναι ανεξάρτητη με την σειρά με την οποίαν απεκατεστάθη η κατανομή όπως είναι αναμενόμενο. Συνεχής χωρική κατανομή : Η έκφραση για την ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου διακριτών σημειακών φορτίων επεκτείνεται εύκολα στην περίπτωση συνεχών κατανομών αρκεί το κάθε άθροισμα να αντικατασταθεί με ολοκλήρωμα στα φορτία της συνεχούς κατανομής. Για χωρική κατανομή φορτίου

$$W = \frac{1}{2}\int\int \frac{\varrho(\vec{r})\,\varrho(\vec{r}\,')}{\mid \vec{r}-\vec{r}\,' \mid} dv\, dv'$$

όπου οι μεταβλητές έχουν αντικαταστήσει τους διακριτούς δείκτες.

Η τελευταία έκφραση είναι κατάλληλη για την εξαγωγή μίας έκφρασης για την ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου η οποία να περιέχει μόνο την έντασή του. Πράγματι

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int\int \frac{\varrho(\vec{r})\,\varrho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dv\, dv' = \frac{1}{2}\int \varrho(\vec{r})\phi(\vec{r}) dv \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int \phi(\vec{r})\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r})\, dv = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int \vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\, dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{E}(\vec{r})\, dv \end{aligned}$$

Η ανωτέρω έκφραση υποδεικύει ότι ένα ηλεκτρικό πεδίο έχει σε κάθε σημείο $\vec{r}$ του χώρου μία πυκνότητα ενέργειας

$$w(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{E}(\vec{r})$$

δηλαδή η ενέργεια σε στοιχειώδη περιοχή γύρω από το σημείο είναι

$$dw = w\, dv$$

και η ολική ενέργεια του πεδίου

$$\boxed{W = \int w\, dv, \qquad w = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}\cdot\vec{E}}$$

Πρόβλημα.

Να υπολογισθεί η ηλεκτροστατική ενέργεια για τις περιπτώσεις των παραδειγμάτων 3 (σφαίρα ομογενώς φορτισμένη με χωρική κατανομή φορτίου) και 4 (σφαιρική επιφάνεια ομογενώς φορτισμένη με επιφανειακή κατανομή φορτίου)

5.1 Μονοσήμαντο της λύσης.

Οι δύο εξισώσεις της ηλεκτροστατικής δίνουν τελικά την εξίσωση

$$\vec{\nabla}^2\phi = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}.$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο λύσεις $\varphi_1,\ \varphi_2$ αυτής της εξίσωσης σε μία περιοχή του χώρου V η οποία καθορίζεται από την κλειστή επιφάνεια $S(V)$.

Έστω $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, τότε

$$\vec{\nabla}^2\varphi = 0$$

και

$$\int_V \varphi\vec{\nabla}^2\varphi dv = 0.$$

Το ανωτέρω ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\int_V \varphi\vec{\nabla}^2\varphi dv = -\int_V \vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\varphi + \int_V \vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{\nabla}\varphi)dv$$

και με εφαρμογή του θεωρήματος Gauss:

$$\int_V \varphi\vec{\nabla}^2\varphi dv = -\int_V \vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\varphi + \oint_{S(V)} \varphi\vec{\nabla}\varphi\cdot\hat{n}da.$$

Λόγω της εξίσωσης που ικανοποιεί η συνάρτηση το αριστερό μέλος είναι μηδέν:

$$-\int_V \vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\varphi + \oint_{S(V)} \varphi\vec{\nabla}\varphi\cdot\hat{n}da = 0.$$

Στον επιφανειακό ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της εξίσωσης ανωτέρω, φ είναι η διαφορά των δύο λύσεων στην επιφάνεια ενώ $-\vec{\nabla}\varphi\cdot\hat{n}$ είναι η διαφορά των καθέτων συνιστωσών των ηλεκτρικών πεδίων που προκύπτουν από τις δύο λύσεις, στην επιφάνεια. Επομένως εάν είναι γνωστό το δυναμικό ή η κάθετη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια τότε οι δύο λύσεις θα ικανοποιούν την σχέση $\varphi_1 = \varphi_2$ η την

$$\vec{\nabla}\varphi_1\cdot\hat{n} = \vec{\nabla}\varphi_2\cdot\hat{n}$$

στην επιφάνεια S οπότε ο δεύτερος όρος της σχέσης μηδενίζεται και καταλήγουμε ότι

$$\int_V \vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\varphi = 0.$$

Επειδή η ολοκλητωτέα ποσότητα είναι μη αρνητική παντού για να μηδενίζεται το ολοκλήρωμα προφανώς πρέπει

$$\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\varphi = 0$$

δηλαδή να μηδενίζεται το μέτρο ενός ανύσματος, επομένως να μηδενίζεται το άνυσμα $\vec{\nabla}\varphi$. Καταλήγουμε ότι στην περιοχή του χώρου V

$$\vec{\nabla}\varphi = 0 \ \Rightarrow\ \varphi = c \ \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 + c$$

προδιορίζεται δηλαδή το δυναμικό μέχρι μία σταθερά και επομένως το ηλεκτρικό πεδίο προσδιορίζεται μονοσήμαντα.

6 Ηλεκτρικό Δίπολο - Πλειονοπολικό Ανάπτυγμα

Ας θεωρήσουμε δύο αντίθετα φορτία στίς θέσεις και αντίστοιχα. Η συνάρτηση δυναμικού του συστήματος είναι:

$$\phi(\vec{r}) \;=\; \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\mid \vec{r}-\frac{\vec{d}}{2}\mid} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\mid \vec{r}+\frac{\vec{d}}{2}\mid}$$

η σε διαφορετική μορφή:

$$\phi(\vec{r}) \;=\; \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{d^2}{4r^2}-\frac{d}{r}cos\gamma}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{d^2}{4r^2}+\frac{d}{r}cos\gamma}}\right)$$

όπου γ η γωνία μεταξύ των ανυσμάτων $\vec{r}$ και $\vec{d}$ ($\vec{r}\cdot\vec{d} = rdcos\gamma$) Οι ανωτέρω συναρτήσεις μπορούν να αναπτυχθούν κατά Taylor δίνοντας το αποτέλεσμα [2]

$$\phi(\vec{r}) \;=\; \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left(\frac{dcos\gamma}{r} \;+\; \mathcal{O}\left(\frac{d^3}{r^3}\right)\right).$$

---

[2]Υπενθυμίζεται το ανάπτυγμα

$$f(x) \;=\; f(0) \;+\; \frac{df}{dx}(0)\,x \;+\; \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(0)\,x^2 \;+\; \frac{1}{3!}\frac{d^3f}{dx^3}(0)\,x^3 \;+\; \frac{1}{4!}\frac{d^4f}{dx^4}(0)\,x^4 \;+\;\cdots$$

Για την συνάρτηση

$$\frac{1}{\mid \vec{r}-\vec{a}\mid} \;=\; \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2racos\gamma}} \;=\; \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{r^2}-2\frac{a}{r}cos\gamma}}$$

θεωρούμε

$$f(x) \;=\; \left(1-2xcos\gamma+x^2\right)^{-1/2}, \quad x=\frac{a}{r}$$

Η ανωτέρω συνάρτηση αναπτύσσεται κατά Taylor ως ακολούθως :

$$f(x) \;=\; \left(1-2xcos\gamma+x^2\right)^{-1/2} \qquad\Longrightarrow\qquad f(0) \;=\; 1$$

$$\tfrac{df(x)}{dx} \;=\; (cos\gamma - x)\tfrac{1}{(1-2xcos\gamma+x^2)^{3/2}} \qquad\Longrightarrow\qquad \tfrac{df}{dx}(0) \;=\; cos\gamma$$

$$\tfrac{d^2f(x)}{dx^2} \;=\; \tfrac{-x}{(1-2xcos\gamma+x^2)^{3/2}} + \tfrac{3(cos\gamma-x)^2}{(1-2xcos\gamma+x^2)^{5/2}} \qquad\Longrightarrow\qquad \tfrac{d^2f}{dx^2}(0) \;=\; 3cos^2\gamma-1$$

δηλαδή

$$f(x) \;=\; 1 \;+\; cos\gamma\,x \;+\; \frac{1}{2}(3cos^2\gamma-1)\,x^2 \;+\;\cdots.$$

Επομένως

$$\frac{1}{\mid \vec{r}-\vec{a}\mid} \;=\; \frac{1}{r}\left(1 \;+\; cos\gamma\,\frac{a}{r} \;+\; \frac{1}{2}(3cos^2\gamma-1)\frac{a^2}{r^2} \;+\;\cdots\right) \;=\; \frac{1}{r} \;+\; \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3} \;+\; \frac{3(\vec{a}\cdot\vec{r})^2-\vec{a}^{\,2}\vec{r}^{\,2}}{r^5} \;+\;\cdots$$

όπου στην δεύτερη εκ των ανωτέρω ισοτήτων επαναφέρθηκε ο ανυσματικός συμβολισμός ($arcos\gamma = \vec{a}\cdot\vec{r},\ a^2=\vec{a}^{\,2}=\vec{a}\cdot\vec{a},\ r^2=\vec{r}^{\,2}=\vec{r}\cdot\vec{r}$).

Επαναφέροντας την ανυσματική μορφή:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q\vec{d}\cdot\vec{r}}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{d^3}{r^3}\right)\right).$$

Ο πρώτος μη μηδενικός όρος στο ανάπτυγμα του δυναμικού δύο αντίθετων φορτίων (q και $-q$) είναι το δυναμικό ηλεκτρικού διπόλου (τοποθετημένου στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων) διπολικής ροπής $\vec{p} = q\vec{d}$, όπου $\vec{d}$ το άνυσμα από το αρνητικό φορτίο στο θετικό

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}}.$$

Για δίπολο στην θέση $\vec{r}_0$:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)}{\mid\vec{r}-\vec{r}_0\mid^3},$$

Στοιχειώδες δίπολο διπολικής είναι σύστημα δύο αντίθετων φορτίων που απέχουν απόσταση d στο όριο $q \to \infty,\ d \longrightarrow 0$ έτσι ώστε το γινόμενο qd να διατηρείται σταθερό όπως και η κατεύθυνση του ανύσματος από το αρνητικό φορτίο στο θετικό. Είναι προφανές ότι σε αυτό το όριο από το ανάπτυγμα του δυναμικού των δύο φορτίων επιζεί μόνο ο πρώτος όρος εφ' όσον όλοι οι άλλοι έχουν μόνον μία δύναμη του q και περισσότερες του d. Το ηλεκτρικό πεδίο διπόλου προκύπτει εύκολα από την σχέση $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})^2 - \vec{p}^2\vec{r}^2}{r^5}$$

6.1 Πλεινοπολικό ανάπτυγμα

Ας θεωρήσουμε μία χωρική κατανομή φορτίου ϱ η οποία περιορίζεται σε μία (πεπερασμένη) περιοχή του χώρου V. Η συνάρτηση δυναμικού, που προκύπτιε από την κατανομή αυτή, στο τυχαίο σημείο του χώρου $\vec{r}$ δίνεται από την έκφραση :

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\varrho(\vec{r}\,')}{\mid\vec{r}-\vec{r}\,'\mid}\,dv'$$

Ο παρονομαστής αναπτύσσεται σύμφωνα με τα προηγούμενα ως :

$$\frac{1}{\mid\vec{r}-\vec{r}\,'\mid} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^3} + \frac{3(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')^2 - \vec{r}\,'^2\vec{r}^2}{r^5} + \cdots$$

Εισάγοντας το ανάπτυγμα στην έκφραση για την συνάρτηση δυαμικού και δεδομένου ότι το άνυσμα $\vec{r}$ είναι σταθερό ως προς την ολοκλήρωση στις συντεταγμένες των $\vec{r}\,'$ της περιοχής V παίρνουμε :

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\vec{P}}{r^3} + \cdots$$

όπου

$$Q = \int_V \varrho(\vec{r}\,')\, dv'$$

το συνολικό φορτίο της κατανομής. Ο πρώτος όρος του αναπτύγματος είναι το δυναμικό Coulomb που δημιουργεί φορτίο ίσο με το ολικό φορτίο της κατανομής, ευρισκόμενο στην αρχή του συστήματος αναφοράς. Ο δεύτερος όρος είναι το δυναμικό διπόλου διπολικής ροπής

$$\vec{P} = \int_V \varrho(\vec{r}\,')\, \vec{r}\,'\, dv'$$

στην αρχή του συστήματος αναφοράς. Η $\vec{P}$ καλείται **διπολική ροπή** της κατανομής.
Οι επόμενοι όροι του αναπτύγματος ορίζουν τις ροπές ανώτερης τάξης της κατανομής (τετραπολική, οκταπολική, ...) και οι αντίστοιχοι όροι της έκφρασης του δυναμικού ορίζουν την συνάρτηση δυναμικού ηλεκτρικού τετραπόλου, οκταπόλου, ... αντίστοιχα.

7 Αγωγοί - Μέθοδος των Ειδώλων

Βασικές ιδιότητες των αγωγών:

- Το ηλεκτρικό πεδίο εντός των αγωγών είναι μηδενικό.
- Η επιφάνεια του αγωγού είναι ισοδυναμική.
- Τα φορτία ενός αγωγού κατανέμονται στην επιφάνειά του.
- Το ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια του αγωγού είναι:

  $$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

  όπου σ η πυκνότητα φορτίου στα σημεία της επιφάνειας του αγωγού και $\hat{n}$ το μοναδιαίο άνυσμα το κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού.

7.1 Μέθοδος των Ειδώλων

Πρόβλημα 1. Φορτίο q ευρίσκεται σε απόσταση d από άπειρο επίπεδο αγωγό ο οποίος είναι γειωμένος.

α. Να ευρεθεί η συνάρτηση δυναμικού και το ηλεκτρικό πεδίο σε όλο τον χώρο.

β. Να ευρεθεί η πυκνότητα φορτίου και το συνολικό φορτίο που επάγονται στον αγωγό.

γ. Να ευρεθεί η δύναμη που ασκείται στο φορτίο από τον αγωγό.

δ. Να ευρεθεί η δυναμική ενέργεια του συστήματος φορτίου αγωγού.

Λύση

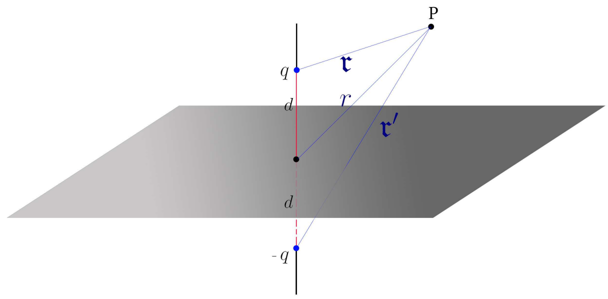
α. Θεωρούμε τον αγωγό να καταλαμβάνει το επίπεδο και το φορτίο να ευρίσκεται στον άξονα στο σημείο . Η ύπαρξη του γειωμένου αγωγού χωρίζει τον χώρο σε δύο ημιχώρους των οποίων το σύνορο είναι (κλειστές) επιφάνειες δυναμικού μηδέν (το άπειρο και το επίπεδο). Στον ένα ημιχώρο δεν υπάρχουν φορτία και η συνοριακή επιφάνεια έχει δυναμικό μηδέν. Επομένως η προφανής λύση

$$\phi(x,\, y,\, z < 0) \,=\, 0$$

είναι και η μοναδική λόγω του μονοσήμαντου της λύσης με καθορισμένο δυναμικό στο σύνορο.

Στον άνω ημιχώρο υπάρχει σημειακό φορτίο αλλά η λύση δεν μπορεί να είναι απλά δυναμικό γιατί εδώ έχουμε μία ισοδυναμική επιφάνεια με σχήμα επίπεδο ενώ στο δυναμικό οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι σφαίρες με κέντρο το φορτίο. Το μονοσήμαντο της λύσης υπαγορεύει ότι το δυναμικό στον άνω ημιχώρο θα είναι μοναδικό αρκεί να περιλαμβάνει το φορτίο και να ικανοποιεί τον μηδενισμό στο επίπεδο (και στο άπειρο). Η μέθοδος των ειδώλων συνίσταται στην εύρεση φορτίων με τα οποία επιτυγχάνεται η συνοριακή συνθήκη και τα οποία δεν αλλάζουν την κατανομή φορτίου στην περιοχή που αναζητούμε την λύση, ευρίσκονται δηλαδή εκτός αυτής (φοτρία είδωλα). Στην περίπτωσή μας μπορούμε ελεύθερα να θεωρήσουμε φορτία στον κάτω ημιχώρο ($z < 0$) έτσι ώστε το δυναμικό του επιπέδου να μηδενιστεί. Για την απλή γεωμετρία του προβλήματος η λύση είναι σχεδόν προφανής. Αρκεί το επίπεδο να είναι το μεσοκάθετο επίπεδο ευθυγράμμου τμήματος στα άκρα του οποίου να ευρίσκονται δύο αντίθετα φορτία. Επομένως εάν θεωρήσουμε φορτίο είδωλο στο σημείο έχουμε το επιθυμητό δυναμικό σε όλη την συνοριακή επιφάνεια χωρίς να αλλάξουμε την κατανομή φορτίου στον άνω ημιχώρο.

Άρα η συνάρτηση δυναμικού στο άνω ημιχώρο είναι η επαλληλία των δυναμικών του φορτίου και του ειδώλου του



Σχήμα 9: Το είδωλο του φορτίου q είναι φορτίο $-q$ σε θέση συμμετρική ως προς το επίπεδο του αγωγού. Το ηλεκτρικό πεδίο στο τυχαίο σημείο P του άνω ημιχώρο είναι η επαλληλία των πεδίων του φορτίου και του ειδώλου του. Στον κάτω ημιχώρο το ηλεκτρικό πεδίο και το δυναμικό μηδενίζονται.

$$
\begin{aligned}
\phi(x,\, y,\, z>0) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-d\hat{k}|} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}+d\hat{k}|} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+d^2-2dz}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+d^2+2dz}}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2+d^2-2dz}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2+d^2+2dz}}\right)
\end{aligned}
$$

όπου $\rho^2 = x^2 + y^2$ η απόσταση της προβολής στο επίπεδο του τυχαίου σημείου του ημιχώρου από την αρχή των αξόνων. Φαίνεται ύκολα από την ανωτέρω έκφραση ότι για $z = 0$ το δυναμικό μηδενίζεται ικανοποιώντας ως ανεμένετο την οριακή συνθήκη και εξασφαλίζοντας την συνέχεια του δυναμικού σε όλο τον χώρο.

Το ηλεκτρικό πεδίο προκύπτει ομοίως:

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(x,\, y,\, z>0) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{r}-d\hat{k}}{|\vec{r}-d\hat{k}|^3} - \frac{\vec{r}+d\hat{k}}{|\vec{r}+d\hat{k}|^3}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x\hat{i}+y\hat{j}+(z-d)\hat{k}}{(\rho^2+z^2+d^2-2dz)^{3/2}} - \frac{x\hat{i}+y\hat{j}+(z+d)\hat{k}}{(\rho^2+z^2+d^2+2dz)^{3/2}}\right)
\end{aligned}
$$

Για $z = 0$ η έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο γίνεται:

$$\vec{E}(x,\, y,\, z = 0) \;=\; -\frac{qd}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}\hat{k}.$$

β. Παρατηρούμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στο επίπεδο όπως αναμένεται εφ' όσον το επίπεδο είναι επιφάνεια αγωγού. Επί πλέον αυτή η κάθετη συνιστώσα σε κάθε σημείο του επιπέδου δίνει και την πυκνότητα του επαγώμενου στον αγωγό φορτίου:

$$\sigma(\rho) \;=\; -\frac{qd}{2\pi}\frac{1}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}.$$

Το ολικό επαγώμενο φορτίο ευρίσκεται με ολοκλήρωση της πυκνότητας σε όλη την επιφάνεια του αγωγού:

$$\begin{aligned} q_{\epsilon\pi} \;&=\; \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \sigma(\rho)\rho d\rho d\varphi \;=\; -qd\int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(\rho^2+d^2)^{3/2}} \\ &=\; -\frac{qd}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{(t+d^2)^{3/2}} \;=\; -\frac{qd}{2}\frac{-2}{\sqrt{t+d^2}}\bigg|_0^\infty \;=\; -q \end{aligned}$$

Το επαγώμενο φορτίο στον αγωγό ισούται με το είδωλο. Αυτό συνάγεται και απλούστερα εφαρμόζοντας τον νόμο της ηλεκτρικής ροής σε επιφάνεια Gauss η οποία να περιλαμβάνει όλο τον άνω ημιχώρο διερχόμενη μέσα από τον αγωγό.

γ. Η δύναμη την οποία ασκεί ο αγωγός στο φορτίο περιμένουμε διαισθητικά να ισούται με την δύναμη που θα ακούσε το είδωλο εάν υπήρχε. Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί ολοκληρώνοντας τις δυνάμεις που ασκεί κάθε στοιχειώδες μέρος του επαγόμενου φορτίου:

$$dq \;=\; \sigma(\rho)\rho d\rho d\varphi \;=\; -\frac{qd}{2\pi}\frac{\rho d\rho d\varphi}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

το οποίο ευρίσκεται στην θέση:

$$\vec{r}\,' \;=\; \rho\hat{\rho} \;=\; \rho cos\varphi\hat{i} + \rho sin\varphi\hat{j}$$

του επιπέδου στο φορτίο το οποίο ευρίκεται στην θέση $\hat{r} = d\hat{k}$.
Πράγματι

$$d\vec{F} \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,dq(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\;\vec{r} - \vec{r}\,'\;|^3} \;=\; -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{2\pi}\frac{\rho d\rho d\varphi}{(\rho^2 + d^2)^3}(d\hat{k} - \rho cos\varphi\hat{i} - \rho sin\varphi\hat{j}).$$

Η ολική δύναμη υπολογίζεται ολοκληρώνοντας σε όλη την κατανομή του επαγώμενου φορτίου. Το ολοκλήρωμα είναι απλό με αποτέλεσμα:

$$\vec{F} \;=\; -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d^2}\hat{k}$$

που είναι ακριβώς η ελκτική δύναμη μεταξύ αντίθετων φορτίων και που απέχουν απόσταση d.

δ. Για την δυναμική ενέργεια του συστήματος αρκεί να βρούμε το έργο της δύναμης που ασκεί ο γειωμένος αγωγός στο φορτίο όταν αυτό έρχεται από το άπειρο στην θέση

$$W = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0}\int_d^\infty \frac{dr}{r^2} = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d}.$$

Παρατηρούμε ότι η δυναμική ενέργεια είναι το μισό αυτής που θα είχαν τα δύο φορτία εάν ήταν και τα δύο πραγματικά. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι εάν και τα δύο φορτία ήταν πραγματικά θε υπήρχε ηλεκτρικό πεδίο σε όλο τον χώρο ενώ με την παρουσία του αγωγού το ηλεκτρικό πεδίο περιορίζεται μόνο στον άνω ημιχώρο.

Πρόβλημα 2. Φορτίο q ευρίσκεται σε απόσταση d από σφαιρικό αγωγό ακτίνας a ο οποίος είναι γειωμένος. Να ευρεθεί η συνάρτηση δυναμικού και το ηλεκτρικό πεδίο σε όλο τον χώρο. Να ευρεθεί η πυκνότητα φορτίου και το συνολικό φορτίο που επάγονται στον αγωγό. Να ευρεθεί η δύναμη που ασκείται στο φορτίο από τον αγωγό. Να ευρεθεί η δυναμική ενέργεια του συστήματος φορτίου αγωγού.

Λύση

Προφανώς η συνάρτηση δυναμκού εντός του αγωγού είναι σταθερή και ισούται με την τιμή της στην επιφάνεια, δηλαδή μηδενίζεται. Εκτός του αγωγού υπάρχει μόνο ένα φορτίο αλλά το δυναμικό Coulomb του φορτίου αυτού δεν είναι η λύση του προβλήματος γιατί οι ισοδυναμικές του επιφάνειες είναι σφαίρες με κέντρο το φορτίο ενώ η ύπαρξη του αγωγού επιβάλλει σε μία σφαίρα μη ομόκεντρη με αυτές ναείναι και αυτή ισοδυναμική. Η λύση του προβλήματος επιτυγχάνεται με την μέθοδο των ειδώλων. Αναζητούμε φορτίο είδωλο εντός της σφαίρας σε απόσταση από το κέντρο αυτής και επί της ευθείας την οποίαν ορίζει το κέντρο της σφαίρας και το πραγματικό φορτίο, έτσι ώστε το δυναμικό στην επιφάνεια της σφαίρας να μηδενίζεται. Εάν συμβεί αυτό η λύση του προβλήματος εκτός της σφαίρας είναι απλά η επαλληλία των δύο φορτίων. Ο προσδιορισμός του φορτίου ειδώλου και της θέσης του επιτυγχάνεται εύκολα από την απαίτηση του μηδενισμού του δυναμικού στα δύο αντιδιαμετρικά σημεία της σφαίρας στα οποία η ευθεία την οποίαν ορίζει το κέντρο της σφαίρας και το πραγματικό φορτίο τέμνει την σφαίρα. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, η ανωτέρω απαίτηση οδηγεί στις σχέσεις

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\tfrac{q}{d-a}+\tfrac{q'}{a-d'}\right) &= 0 \\ \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\tfrac{q}{d+a}+\tfrac{q'}{a+d'}\right) &= 0 \end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} q' &= -q\tfrac{a}{d}, \\ d' &= \tfrac{a^2}{d}. \end{cases}$$

Ο προσδιορισμός του φορτίου ειδώλου και της θέσης του δεν αρκούν για την λύση του προβλήματος. Πρέπει να ελεγχθεί ότι όλα τα σημεία της σφαίρας έχουν δυναμικό μηδέν. Θεωρούμε την συνάρτηση δυναμικού των δύο εν λόγω φορτίων

$$\phi(\vec{r}) \;=\; \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\,cos\gamma}}-\frac{a}{d}\frac{1}{\sqrt{r^2+\frac{a^4}{d^2}-2r\frac{a^2}{d}\,cos\gamma}}\right].$$

Στην ανωτέρω έκφραση έχουν αντικασταθεί το φορτίο είδωλο και η απόστασή του από την αρχή των αξόνων. Η γωνία γ είναι η γωνία που σχηματίζει το άνυσμα $\vec{r}$ με τα ανύσματα $d\hat{n}$ και $d'\hat{n}$ των θέσεων των φορτίων. Βγάζοντας από το δεύτερο κλάσμα τον a^2/d^2 παράγοντα έξω από την ρίζα παίρνουμε

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\,cos\gamma}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2d^2}{a^2}+a^2-2rd\,cos\gamma}}\right]$$

οπότε φαίνεται απλά ότι στα σημεία της σφαίρας $\vec{r}) = a\hat{r}$ το δυναμικό μηδενίζεται

$$\phi(a\hat{r}) = 0.$$

Το μονοσήμαντο της λύσης μας επιβεβαιώνει ότι το δυναμικό στον χώρο έξω από την σφαίρα είναι πράγματι η επαλληλία των δυναμικών του πραγματικού φορτίου και του φορτίου ειδώλου. (Το δυναμικό εντός της σφαίρας μηδενίζεται όπως ήδη έχει αναφερθεί.)

Όσον αφορά το ηλεκτρικό πεδίο είναι προφανές ότι

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{r}-d\hat{n}}{(r^2+d^2-2rd\,cos\gamma)^{3/2}} - \frac{a}{d}\frac{\vec{r}-\frac{d}{a^2}\hat{n}}{(r^2+\frac{a^4}{d^2}+-2r\frac{a^2}{d}\,cos\gamma)^{3/2}}\right],$$

και με την εξαγωγή του κοινού παράγοντα

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{r}-d\hat{n}}{(r^2+d^2-2rd\,cos\gamma)^{3/2}} - \frac{\frac{d^2}{a^2}\vec{r}-d\hat{n}}{(\frac{d^2r^2}{a^2}+a^2-2rd\,cos\gamma)^{3/2}}\right].$$

Παρατηρούμε ότι στα σημεία της σφαίρας το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στην επιφάνειά της

$$\vec{E}(a\hat{r}) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{d^2}{a^2}-1}{(d^2+a^2-2rd\,cos\gamma)^{3/2}}a\hat{r} = -\frac{q}{4\pi a^2\varepsilon_0}\frac{\frac{d^2}{a^2}-1}{(\frac{d^2}{a^2}+1-2\frac{d}{a}\,cos\gamma)^{3/2}}\hat{r}.$$

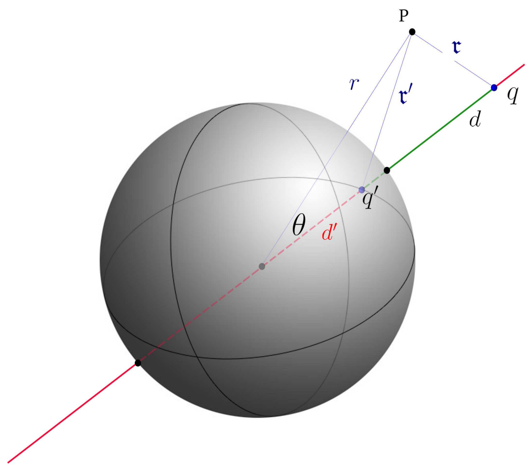
Η κάθετη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου δίνει και την πυκνότητα του επαγώμενου στην επιφάνεια ηλεκτρικού φορτίου

$$\sigma(\gamma) = -\frac{q}{4\pi a^2}\frac{\frac{d^2}{a^2}-1}{(\frac{d^2}{a^2}+1-2\frac{d}{a}\,cos\gamma)^{3/2}}.$$

Το συνολικό επαγώμενο φορτίο ευρίσκεται με ολοκλήρωση της πυκνότητας επί της επιφανείας της σφαίρας

$$Q_{\epsilon\pi} = \int\sigma(\gamma)ds = -\frac{q}{4\pi a^2}\frac{\frac{d^2}{a^2}-1}{1}2\pi a^2\int_0^\pi\frac{1}{(\frac{d^2}{a^2}+1-2\frac{d}{a}\,cos\gamma)^{3/2}}sin\gamma d\gamma = -q\frac{a}{d},$$

ισούται δηλαδή με το φορτίο είδωλο όπως και ήταν αναμενόμενο.



Σχήμα 10: Φορτίο q ευρίκεται εκτός αγώγιμης γειωμένης σφαίρας. Η επίλυση γίνεται με ανζήτηση φορτίου ειδώλου q' εντός της σφαίρας έτσι ώστε η επιφάνεια της σφαίρας να γίνει ισοδυναμική μηδενικού δυναμικού.

Η δύναμη μεταξύ φορτίου q και αγωγού ισούται με την δύναμη μεταξύ πραγματικού φορτίου και ειδώλου και η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι το ήμισυ της δυναμικής ενέργειας αλληλεπίδρασης φορτίου ειδώλου.

Προβλήματα

1. Δίδεται γειωμένος αγωγός σχήματος ορθής δίεδρης γωνίας. Φορτίο ευρίσκεται εντός της δίεδρης γωνίας σε αποστάσεις d_1 και d_2 από τις πλευρές της. Να ευρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο σε όλο τον χώρο.

2. Φορτίο q ευρίσκεται σε απόσταση d από το κέντρο κοίλου γειωμένου σφαιρικού αγωγού, εσωτερικής ατίνας a ($d < a$). Να ευρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο σε όλο τον χώρο.

3. Φορτίο q ευρίσκεται σε απόσταση d από το κέντρο σφαιρικού αφόρτιστου αγωγού ακτίνας $a(d > a)$. Να ευρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο σε όλο τον χώρο.

8 Παράρτημα.

Α. Η απόκλιση σε Καρτεσιανές συντεταμένες.

Από την ¨σχέση ορισμού¨

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_{S(\Delta V)}\vec{E}\cdot\vec{da}}{\Delta V}$$

για να υπολογισθεί η απόκλιση του ανυσματικού πεδίου σε σημείο P με συντεταγμένες (x, y, z), αρκεί να υπολογισθεί η ροή του από κατάλληλη επιφάνεια η οποία να περικλείει το σημείο. Για τον σκοπό αυτό επιλέγεται παραλληλεπίδο ακμών Δx Δy και Δz, με το σημείο P στο κέντρο του. Η ροή του πεδίου από τις έδρες του είναι:

$$\begin{aligned}
\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}da &= \int_{S_1}\vec{E}\cdot\hat{n}_1 da + \int_{S_2}\vec{E}\cdot\hat{n}_2 da + \int_{S_3}\vec{E}\cdot\hat{n}_3 da \\
&+ \int_{S_4}\vec{E}\cdot\hat{n}_4 da + \int_{S_5}\vec{E}\cdot\hat{n}_5 da + \int_{S_6}\vec{E}\cdot\hat{n}_6 da \\
&= \left[E_z(x,y,z+\tfrac{\Delta z}{2}) - E_z(x,y,z-\tfrac{\Delta z}{2})\right]\Delta x\,\Delta y \\
&+ \left[E_y(x,y+\tfrac{\Delta y}{2},z) - E_y(x,y-\tfrac{\Delta y}{2},z)\right]\Delta x\,\Delta z \\
&+ \left[E_x(x+\tfrac{\Delta x}{2},y,z) - E_x(x-\tfrac{\Delta y}{2},y,z)\right]\Delta x\,\Delta z.
\end{aligned}$$

Αναπτύσσοντας τις τιμές των συνιστωσών του πεδίου γύρω από την τιμή τους στο σημείο $(x,\ y,\ z)$, για παράδειγμα:

$$E_z(x,y,z+\frac{\Delta z}{2}) = E_x(x,y,z) + \frac{\Delta z}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{(\Delta z)^2}{8}\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \cdots ,$$

καταλήγουμε ότι:

$$\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}da = \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} + \cdots\right]\Delta x\,\Delta y\,\Delta z,$$

όπου οι όροι στα αποσιωπητικά περιέχουν τουλάχιστον μία δύναμη του Δx η του Δy η του Δz. Κατά συνέπειαν διαιρώντας με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου ($\Delta V = \Delta x\,\Delta y\,\Delta z$) και λαμβάνοντας το όριο με τις τρείς πλευρές να τείνουν στο μηδέν, όλοι αυτοί οι όροι μηδενίζονται και έχουμε:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}}$$

Β. Ο στροβιλισμός σε Καρτεσιανές συντεταμένες.

Από την ¨σχέση ορισμού¨

$$(\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot\hat{n} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\vec{dl}}{\Delta S}$$

για να υπολογισθεί π.χ. η z συνιστώσα του στροβιλισμού αρκεί να μελετηθεί η ανωτέρω ποσότητα σε κατάλληλη καμπύλη, σε επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο $x - y$, η οποία να διαγράφεται δεξιόστροφα. Για το σκοπό αυτό επιλέγεται παραλληλλόγραμμο πλευρών $\Delta x,\ \Delta y$ τέτοιο ώστε το σημείο P στο οποίο υπολογίζουμε τον στροβιλισμό να ευρίσκεται στο κέντρο του. Η κυκλοφορία του ανυσματικού πεδίου κατά μήκος της κλειστής γραμμής $[ABCD]$ ισούται με :

$$\begin{aligned}\oint_{[ABCD]} \vec{E}\cdot d\vec{l} &= \int_{[AB]} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{[BC]} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{[CD]} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{[DA]} \vec{E}\cdot d\vec{l} \\ &= E_x(x, y - \tfrac{\Delta y}{2}, z)\Delta x + E_y(x + \tfrac{\Delta x}{2}, y, z)\Delta y \\ &- E_x(x, y + \tfrac{\Delta y}{2}, z)\Delta x - E_y(x - \tfrac{\Delta x}{2}, y, z)\Delta y.\end{aligned}$$

Αναπτύσσοντας πάλι τις τιμές των συνιστωσών του πεδίου γύρω από την τιμή τους στο σημείο $(x,\ y,\ z)$, για παράδειγμα:

$$E_x(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z) \,=\, E_x(x, y, z) - \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{(\Delta y)^2}{8}\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \cdots ,$$

όπου οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στο σημείο $(x,\ y,\ z)$, καταλήγουμε στην έκφραση :

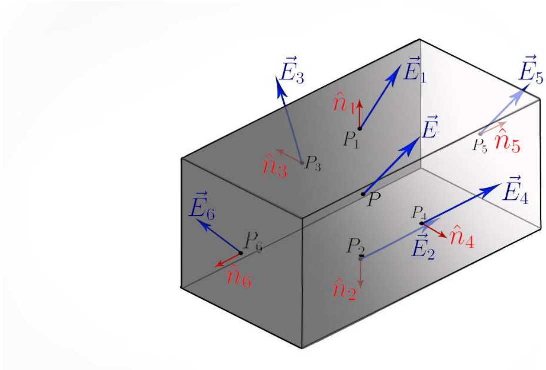
$$\oint_{[ABCD]} \vec{E}\cdot d\vec{l} \,=\, \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} \,-\, \frac{\partial E_x}{\partial y} \,+\, \cdots\right]\Delta x\,\Delta y$$

όπου οι όροι στα αποσιωπητικά περιέχουν τουλάχιστον μία δύναμη του Δx η του Δy . Κατά συνέπειαν διαιρώντας με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ($\Delta S \,=\, \Delta x\,\Delta y$) και λαμβάνοντας το όριο με τις δύο πλευρές να τείνουν στο μηδέν, όλοι αυτοί οι όροι μηδενίζονται και έχουμε:

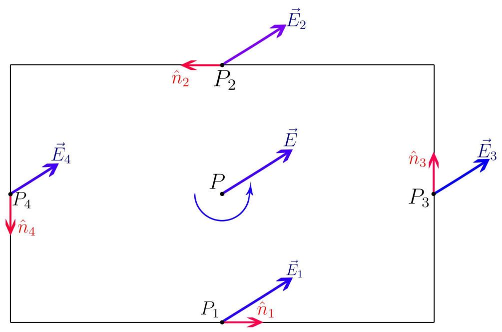
$$(\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{E}}) \cdot \hat{\mathbf{k}} \,=\, (\vec{\nabla} \times \vec{E})_z \,=\, lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_{[ABCD]} \vec{E}\cdot d\vec{l}}{\Delta S} \,=\, \frac{\partial \mathbf{E_y}}{\partial \mathbf{x}} \,-\, \frac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \mathbf{y}}$$

Θεωρώντας αντίστοιχα παραλληλόγραμμα στα επίπεδα $y - z$ και $z - x$ υπολογίζουμε τις x και y συνιστώσες του στροβιλισμού σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Τελικά :

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} \,=\, \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \,-\, \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} \,-\, \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} \,-\, \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{k}}$$



Σχήμα 11: Κατάλληλη στοιχειώδης κλειστή επιφάνεια για την σύνδεση της απόκλισης και της ροής διανυσματικού πεδίου.



Σχήμα 12: Κατάλληλη στοιχειώδης κλειστή γραμμή για την σύνδεση του στροβιλισμού με την κυκλοφορία διανυσματικού πεδίου.