



Τμήμα Φυσικής

Δυναμική Ατμόσφαιρας

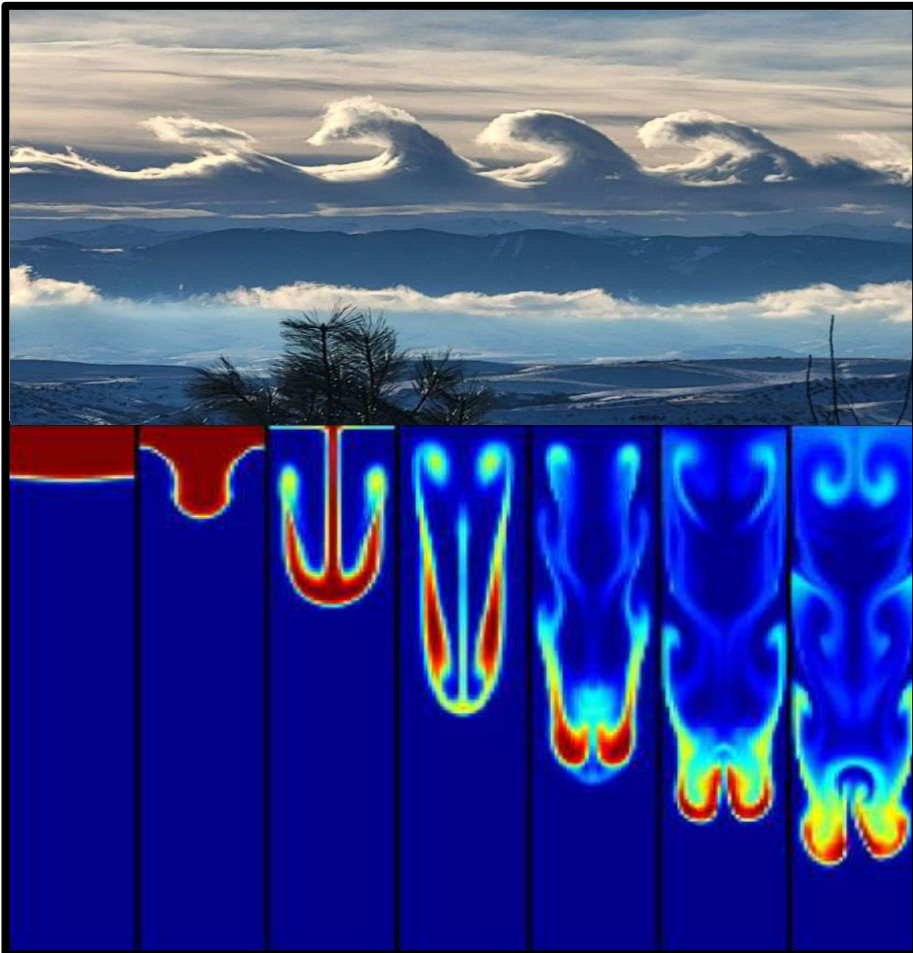
Ευάγγελος Τυρλής

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Τομέας Φυσικής Περιβάλλοντος & Μετεωρολογίας

5. Δυναμική Αστάθεια



- Αστάθεια διάτμησης σε παράλληλες ροές
- Αστάθεια παρουσία οριζόντιας / κατακόρυφης διάτμησης ροής
- Αστάθεια ροής με κατακόρυφη διάτμηση: ασυνεχές προφίλ
- Αστάθεια Kelvin - Helmholtz
- Αστάθεια Rayleigh - Taylor
- Αστάθεια ροής με κατακόρυφη διάτμηση: συνεχές προφίλ

1. Δυναμική ευστάθεια/αστάθεια

Ελέγχουμε την ευστάθεια ως προς μια ή κάποιο υποσύνολο διαδικασιών με αποτέλεσμα να μελετάμε:

Static (gravitational/vertical) Stability

Στατική ευστάθεια

Αγνοούμε όλες τις διαδικασίες πλην της πλευστότητας (άνωση-βαρύτητα). Καθορίζεται από το αποτέλεσμα κατακόρυφης μετακίνησης στοιχείου αέρα, υπό την επίδραση της δύναμης πλευστότητας.

Η Ατμόσφαιρα βρίσκεται σε υδροστατική ισορροπία.

Dynamic Stability

Δυναμική ευστάθεια

Εκτός από την δύναμη πλευστότητας μελετάμε και την επιρροή πχ των μεταβολών της ταχύτητας της ροής σε οριζόντια & κατακόρυφη διεύθυνση:

Κατακόρυφη & οριζόντια διάτμηση της ταχύτητας του ανέμου (horizontal & vertical wind shear).

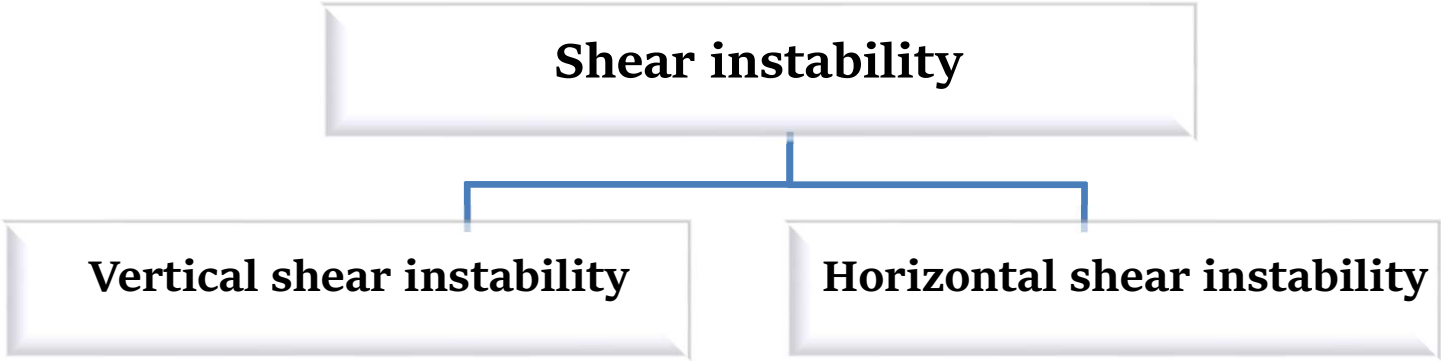
Δυναμική ευστάθεια/αστάθεια: εξετάζουμε το αποτέλεσμα εισαγωγής μικρής μετατόπισης πακέτου αέρα ή συνηθέστερα μικρής κυματικής διαταραχής σε ροή. Η προκύπτουσα αστάθεια χαρακτηρίζει την προσέγγιση του συστήματος εξισώσεων κίνησης και την επικρατούσα ισορροπία.

Parcel instability: Μετατόπιση πακέτου αέρα & μελέτη της κίνησής του, πχ στη στατική ευστάθεια.

Wave instability: Απαιτεί την εισαγωγή κυματικής διαταραχής (σύνηθες στην Ατμόσφαιρα).

Centrifugal Instability	Symmetric Instability	Inertial Instability
Horizontal Shear Instability	Vertical Shear Instability	Barotropic – Baroclinic Instability

2. Shear instabilities in parallel flows

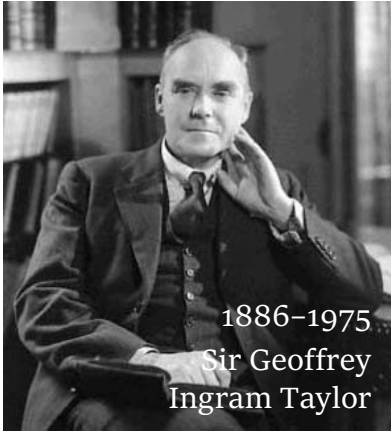
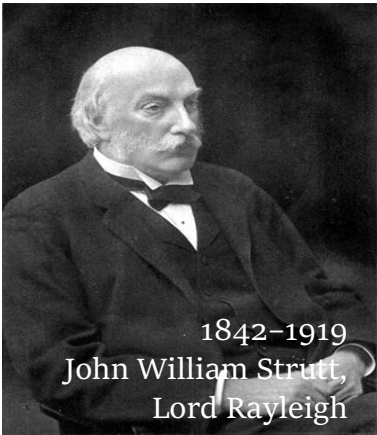
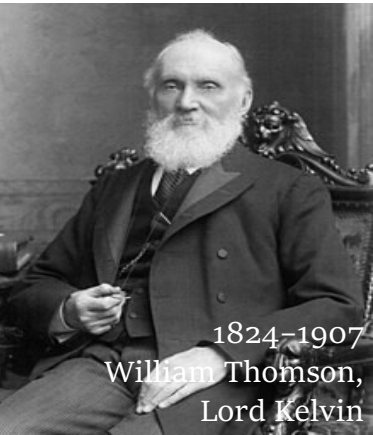
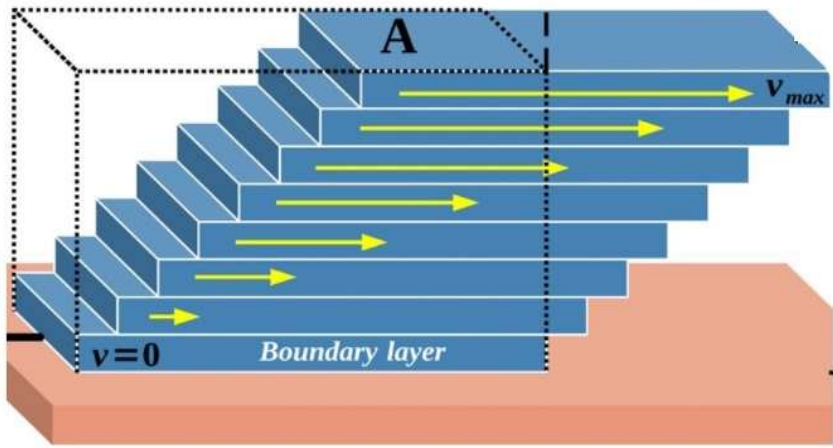


Shear instability - αστάθεια σε ροές διάτμησης: η μελέτη ευστάθειας/αστάθειας σε παράλληλες ροές.

Parallel flows – παράλληλες ροές: “flows in which all but one of the mean velocity components are zero”

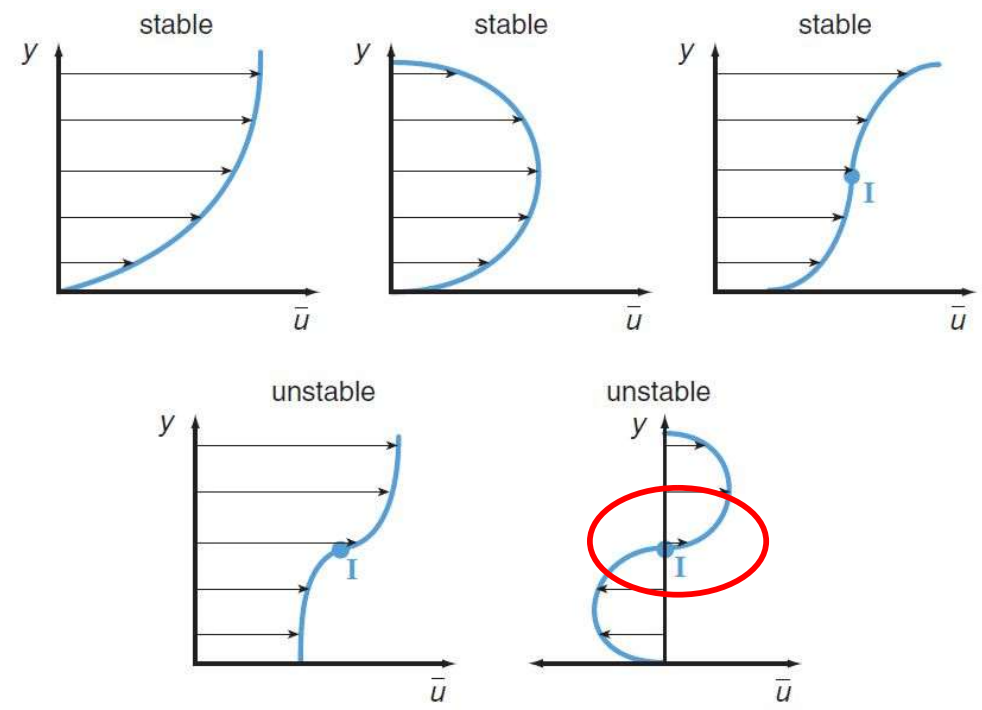
Η αστάθεια αναπτύσσεται παρουσία διάτμησης της ροής σε οριζόντια ή κατακόρυφη διεύθυνση.

Η μελέτη αστάθειας σε παράλληλες ροές προσέλκυσε το ενδιαφέρον γνωστών ερευνητών.



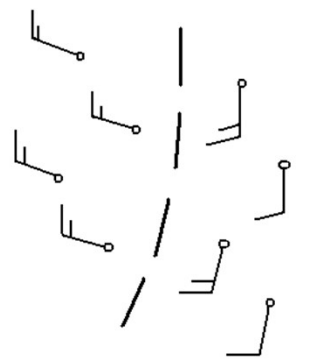
3. Shear instability: horizontal shear instability

Η μεταβολή του ανέμου στην οριζόντια διεύθυνση (οριζόντια διάτμηση ανέμου) παρουσιάζει μοτίβα κάποια από τα οποία μπορεί να οδηγούν σε αστάθεια στην περίπτωση εισαγωγής κυματικών διαταραχών.



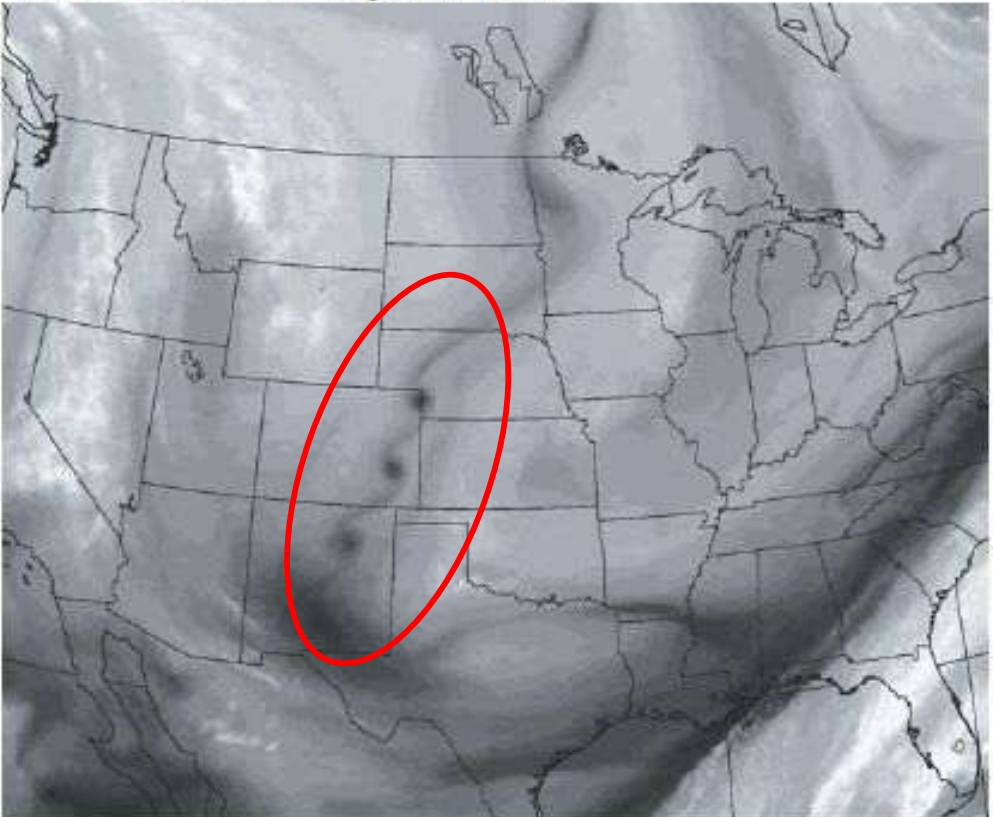
Mesoscale vortices: Σε περιοχές απότομης μεταβολής του ανέμου στην οριζόντια διεύθυνση (windshift lines) υπάρχουν ευνοϊκές συνθήκες ανάπτυξης στροβίλων.

Wind Shift Line



1800 UTC 17 April 1999

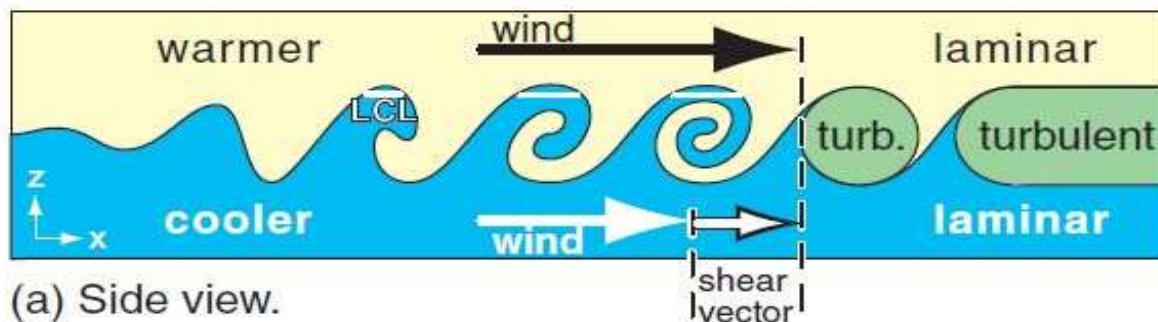
Weinand (2000)



Roberto Giudici

3. Shear instability: vertical shear instability

Η μεταβολή του ανέμου στην κατακόρυφη διεύθυνση υπό συνθήκες στατικής ευστάθειας μπορεί να οδηγήσει στην αστάθεια Kelvin-Helmholtz στην περίπτωση εισαγωγής κυματικών διαταραχών.



Billow clouds: Σε περιοχές απότομης μεταβολής του ανέμου στην κατακόρυφη διεύθυνση δημιουργούνται κύματα Kelvin-Helmholtz. Παρουσία επαρκούς υγρασίας δημιουργούνται χαρακτηριστικά νέφη.



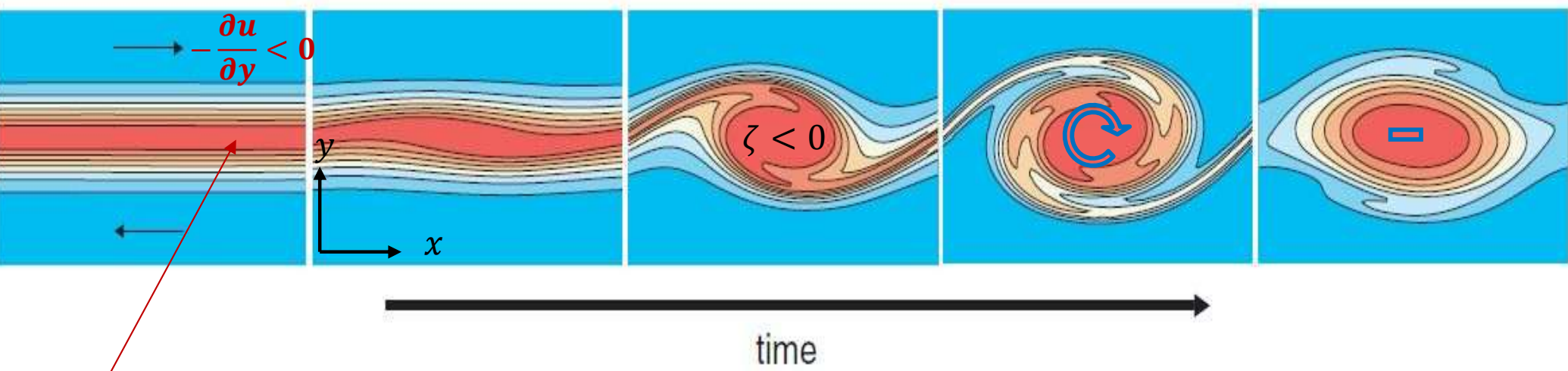
Clear Air Turbulence: Καθώς τα κύματα αυτά “σπάνε”, το δυναμικά ασταθές στρώμα καθίσταται τυρβώδες. Μακριά από το ΑΟΣ και καταιγίδες οι περιοχές CAT δεν συνοδεύονται από νέφη. Επειδή είναι αόρατες αποτελούν κίνδυνο για την αεροπλοοία.

Τα κύματα Kelvin-Helmholtz θεωρούνται ότι οδηγούν στη δημιουργία **κυμάτων βαρύτητας** αλλά και νεφικών σχηματισμών όπως τα **mammatus**.



4. Πηγή της ενέργειας της αστάθειας

Η ενέργεια που συντηρεί την αστάθεια λόγω διάτμησης σε παράλληλες ροές προέρχεται από την μέση ροή.



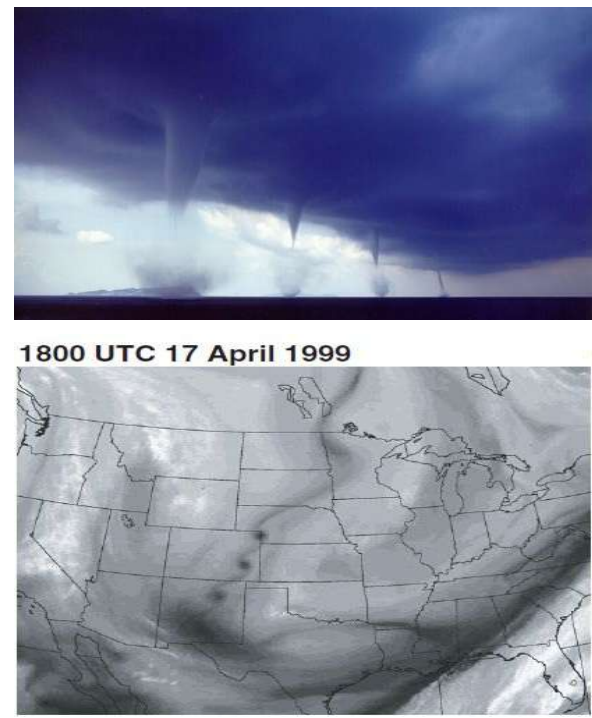
“Διάδρομος” όπου η ροή προς οριζόντια ή κατακόρυφη διεύθυνση χαρακτηρίζεται από μεγάλη χωρική μεταβολή της ταχύτητας του ανέμου και άρα μεγάλο στροβιλισμό

Η διεπιφάνεια υψηλού στροβιλισμού αναδιπλώνεται στον εαυτό της ώστε όταν η κυματική διαταραχή σπάσει να δημιουργηθούν διακριτά, σχεδόν κυκλικά, κέντρα στροβιλισμού

$$\vec{\omega} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k}$$
$$\zeta \equiv \hat{k} \cdot \vec{\omega} = \hat{k} \cdot \nabla \times \vec{U} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

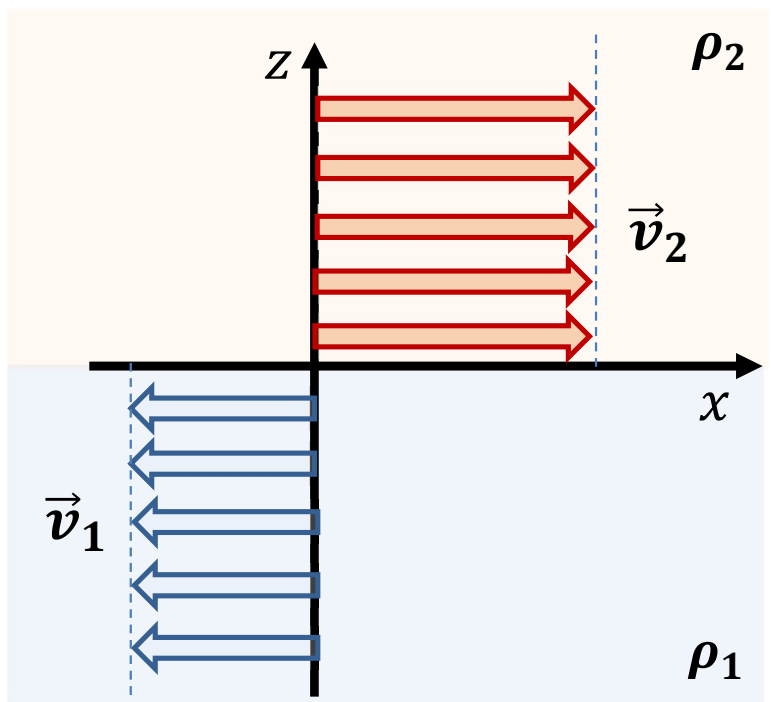
Εάν εκδηλωθεί αστάθεια και η **διεπιφάνεια υψηλού στροβιλισμού** διαταραχθεί, η διεπιφάνεια θα αναδιπλωθεί στον εαυτό της. Όταν κυματική διαταραχή ενισχυθεί και τελικά σπάσει, αυτό που ήταν αρχικά ένας **διάδρομος υψηλού στροβιλισμού** θα μετατραπεί σε σειρά **διακριτών κέντρων στροβιλισμού**.



5. Ευστάθεια ροής με κατακόρυφη διάτμηση: μαθηματική περιγραφή

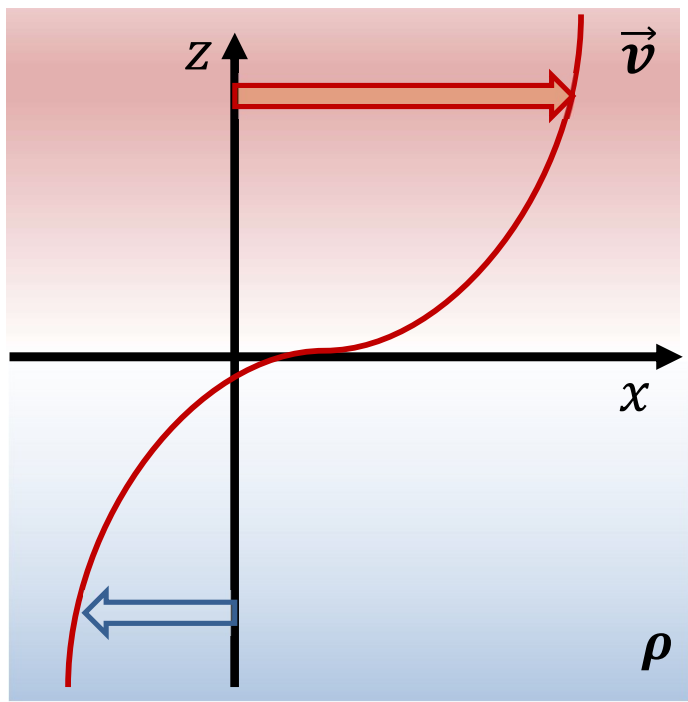
Μελετάμε την αστάθεια vertical shear instability: σε δυο εξιδανικευμένες περιπτώσεις παραλλήλων ροών αέρα (επίπεδο x - z) παρουσία **κατακόρυφης διάτμησης** σε **οριζόντια ροή** (sheared flow) και στρωμάτωσης περιβάλλοντος (δηλαδή μεταβολής της πυκνότητας).

Ιδεατή ροή παρουσία ασυνέχειας στη πυκνότητα και πεδίο ταχύτητας



Discontinuous field of velocity and stratification.

Πιο ρεαλιστική ροή παρουσία συνεχούς στρωμάτωσης και πεδίου ταχύτητας



Continuous field of velocity and stratification.

Linear stability analysis: Γραμμικοποιώντας τις αρχικές εξισώσεις θα παράξουμε εξισώσεις που περιγράφουν διαταραχές κυματικής μορφής από βασική κατάσταση. Η μελέτη της εξίσωσης διασποράς θα καθορίσει το κριτήριο αστάθειας για κάθε τύπου αστάθειας (Kelvin – Helmholtz & Rayleigh - Taylor).

Περιορισμοί: 1) Η μέθοδος προβλέπει μόνο την έναρξη της αστάθειας και όχι τη μη γραμμική αλληλεπίδραση των στροβίλων που οδηγεί σε καθεστώς τύρβης. 2) Εφαρμόζεται μόνο σε μικρές διαταραχές κυματικής μορφής (όχι για finite-amplitude disturbances).

6. Ευστάθεια ροής με κατακόρυφη διάτμηση (ασυνέχεια): μαθηματική περιγραφή

Το σύστημα των εξισώσεων που θα χρησιμοποιηθεί

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -2\vec{\Omega} \times \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} + \vec{F}r \quad (1)$$

Εξισώσεις κίνησης:
αρχή διατήρησης ορμής

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2)$$

Εξίσωση συνέχειας:
αρχή διατήρησης μάζας

Υποθέσεις

• Η **περιστροφή** δεν είναι σημαντική – δεν υπάρχουν όροι Coriolis.

• **Inviscid flow**: δεν υπάρχουν όροι τριβής

• **Incompressible flow**: τα στοιχεία του ρευστού δεν υπόκεινται σε μεταβολές της πυκνότητας ακολουθώντας τη ροή (δηλ. $\frac{D\rho}{Dt} = 0$).

• **Potential flow** (δυναμική ροή): υπάρχει συνάρτηση $\Phi(x,z,t)$ - velocity potential - ώστε να ισχύει

$$\vec{v} = \nabla \Phi \quad \text{και} \quad \nabla \times \vec{v} = \nabla \times \nabla \Phi = 0 \quad \text{και} \quad (3) \Rightarrow \nabla^2 \Phi = 0$$

$$\vec{v}_2 = \nabla \Phi_2 \quad \nabla^2 \Phi_2 = 0 \quad z > 0 \quad \text{Επάνω περιοχή 2}$$
$$\vec{v}_1 = \nabla \Phi_1 \quad \nabla^2 \Phi_1 = 0 \quad z < 0 \quad \text{Κάτω περιοχή 1}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \vec{g} \quad (4)$$

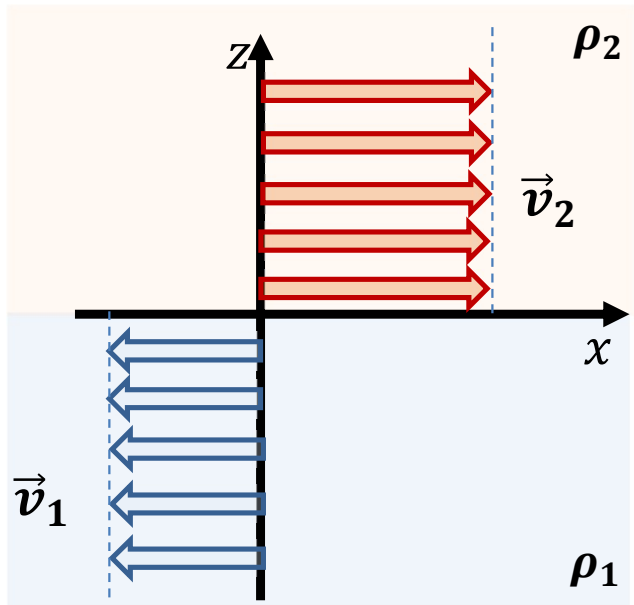
Εξίσωση κίνησης για ασυμπίεστο ρευστό (σταθερή πυκνότητα), χωρίς τριβές και επίδραση περιστροφής.

6. Ευστάθεια ροής με κατακόρυφη διάτμηση (ασυνέχεια): μαθηματική περιγραφή

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \vec{g} \quad (4)$$

Ισχύει η ιδιότητα $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \nabla \left(\frac{1}{2} (\vec{v})^2 \right) - \nabla \times \vec{v}$

Για δυναμική ροή $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \nabla \left(\frac{1}{2} (\vec{v})^2 \right) \quad \nabla \times \vec{v} = 0$



$$(4) \Rightarrow \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} (\vec{v})^2 \right) + \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) - \vec{g} = 0 \quad \vec{g} = -g \hat{k}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\vec{v})^2 + gz + \frac{p}{\rho} = const. \quad (5) \quad \text{Θεώρημα Bernoulli - unsteady flow}$$

Θεωρούμε δυναμικά Φ_1 & Φ_2 στις δυο περιοχές

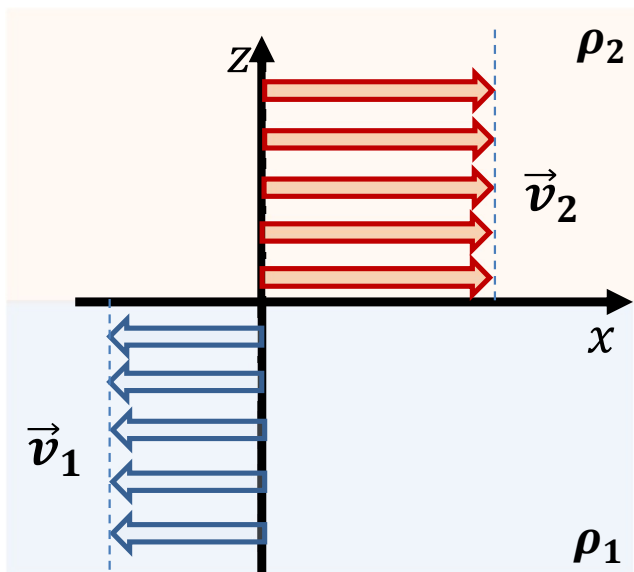
$\Phi_2 = U_2 x + \Phi'_2 \quad (6)$	$z > 0$	Επειδή $\nabla^2 \Phi_2 = 0$	θα πρέπει $\nabla^2 \Phi'_2 = 0$
--------------------------------------	---------	------------------------------	----------------------------------

$\Phi_1 = U_1 x + \Phi'_1 \quad (7)$	$z < 0$	Επειδή $\nabla^2 \Phi_1 = 0$	θα πρέπει $\nabla^2 \Phi'_1 = 0$
--------------------------------------	---------	------------------------------	----------------------------------

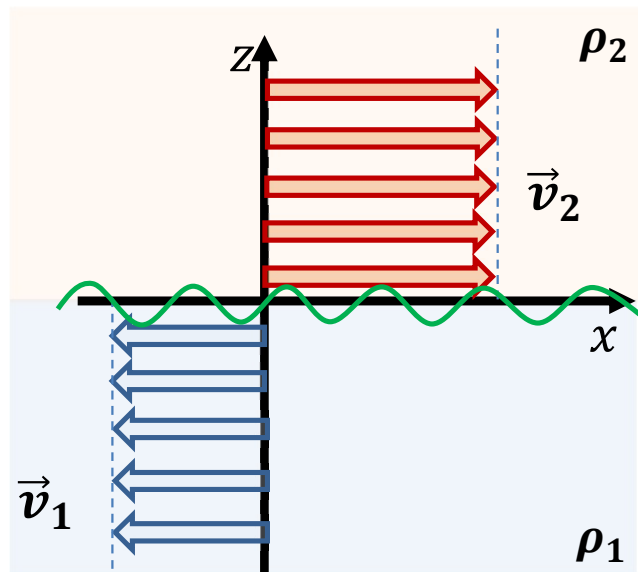


6. Ευστάθεια ροής με κατακόρυφη διάτμηση (ασυνέχεια): μαθηματική περιγραφή

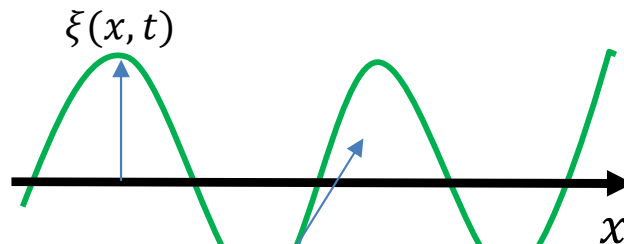
Αδιατάραχτη κατάσταση



Διαταραγμένη κατάσταση



$\xi(x, t)$: Κατακόρυφη συντεταγμένη της διεπιφάνειας



$$\frac{D\xi}{Dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Κατακόρυφη ταχύτητα διεπιφάνειας

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ w \end{bmatrix} = \nabla \Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\frac{D\xi}{Dt} = w_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{D\xi}{Dt} = w_2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{u}_2 \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (8)$$

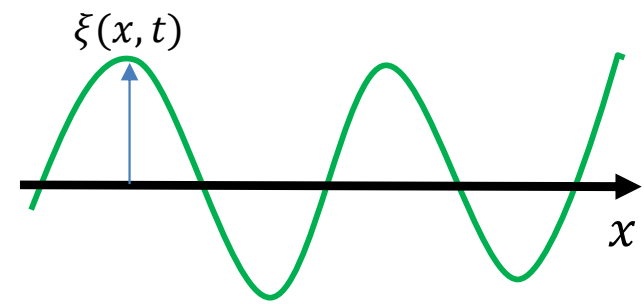
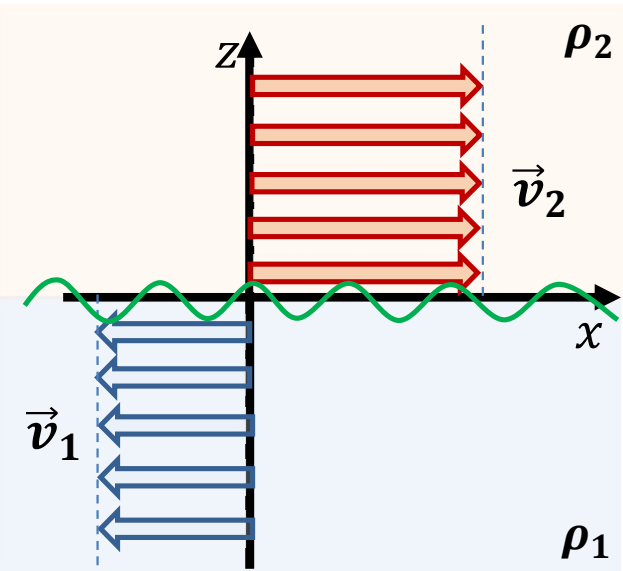
$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (9)$$

Για να μην δημιουργηθεί “σχίσμα” στο ρευστό θα πρέπει η κατακόρυφη ταχύτητα της διεπιφάνειας να ισούται ακριβώς με τη κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας ροής και στα δυο στρώματα.



6. Ευστάθεια ροής με κατακόρυφη διάτμηση (ασυνέχεια): μαθηματική περιγραφή

Διαταραγμένη κατάσταση



$$(6) \Rightarrow \Phi_2 = U_2 x + \Phi'_2 \Rightarrow \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = U_2 + \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = \frac{\partial \Phi'_2}{\partial z}$$

$$(7) \Rightarrow \Phi_1 = U_1 x + \Phi'_1 \Rightarrow \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = U_1 + \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi'_1}{\partial z}$$

$$(8) \Rightarrow \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + (U_1 + \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x}) \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$(9) \Rightarrow \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + (U_2 + \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x}) \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \Phi'_1}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \Phi'_2}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (11)$$

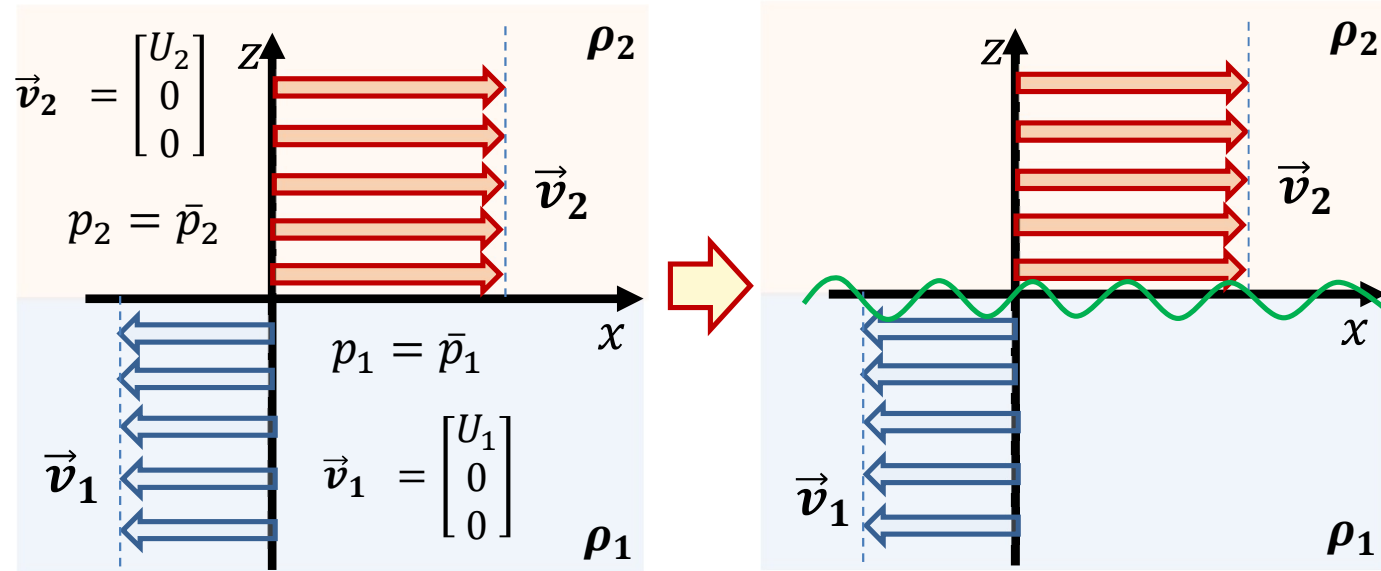
Leading order approximation: οι όροι που περιέχουν γινόμενα διαταραχών μπορούν να αγνοηθούν.



6. Ευστάθεια ροής με κατακόρυφη διάτμηση (ασυνέχεια): μαθηματική περιγραφή

Αδιατάραχτη κατάσταση

Διαταραγμένη κατάσταση



$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\vec{v})^2 + gz + \frac{p}{\rho} = \text{const.} \quad (5)$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Bernoulli για να συνδέσουμε τα χαρακτηριστικά της ροής στην περιοχή της διεπιφάνειας ανάμεσα σε δυο χρονικές στιγμές:

1. Αδιατάραχτη κατάσταση όπου υπάρχει η βασική κατάσταση.
2. Διαταραγμένη κατάσταση όπου αναπτύσσονται κυματικές μορφές.

Στην αδιατάραχτη κατάσταση δεν υπάρχει όρος χρονικής μεταβολής, η διεπιφάνεια είναι $z = 0$ και η πίεση είναι αυτή της βασικής κατάστασης.

Περιοχή 1

$$\frac{1}{2} U_1^2 + \frac{\bar{p}_1}{\rho_1} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} (\vec{v}_1)^2 + g\xi + \frac{p_1}{\rho_1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} U_1^2 + \frac{\bar{p}_1}{\rho_1} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(U_1 + \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x} \right)^2 + g\xi + \frac{p_1}{\rho_1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} U_1^2 + \frac{\bar{p}_1}{\rho_1} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(U_1^2 + 2U_1 \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x} \right) + g\xi + \frac{p_1}{\rho_1} \Rightarrow$$

$$p_1 = \bar{p}_1 - \rho_1 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x} + g\xi \right) \quad (12)$$

$$\Phi_1 = U_1 x + \Phi'_1$$

$$\vec{v}_1 = \nabla \Phi_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \\ 0 \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 + \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x} \\ 0 \\ \frac{\partial \Phi'_1}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$(\vec{v}_1)^2 = |\nabla \Phi_1|^2 = \left(U_1 + \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi'_1}{\partial z} \right)^2 \approx \left(U_1 + \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x} \right)^2$$

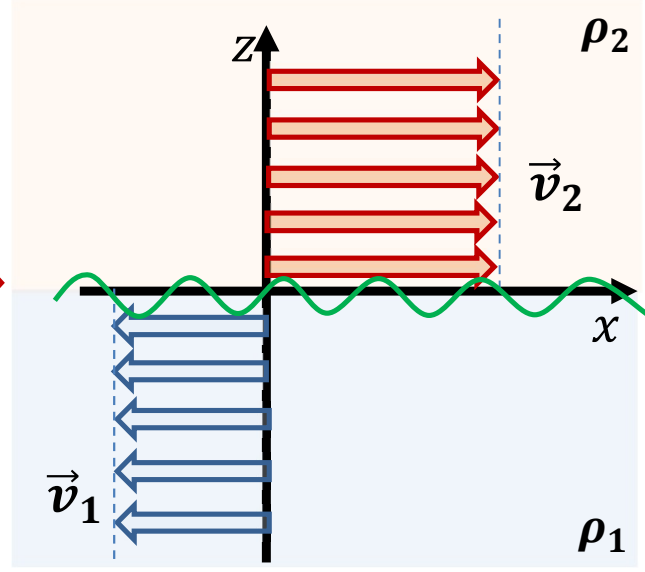
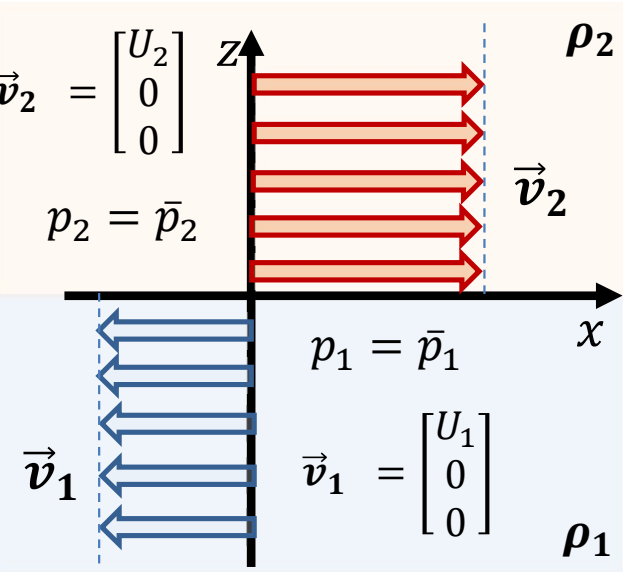
$$(7) \Rightarrow \frac{\partial \Phi'_2}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \xi}{\partial x}$$



6. Ευστάθεια ροής με κατακόρυφη διάτμηση (ασυνέχεια): μαθηματική περιγραφή

Αδιατάραχτη κατάσταση

Διαταραγμένη κατάσταση



$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\vec{v})^2 + gz + \frac{p}{\rho} = const. \quad (5)$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Bernoulli για να συνδέσουμε τα χαρακτηριστικά της ροής στην περιοχή της διεπιφάνειας ανάμεσα σε δυο χρονικές στιγμές:

1. Αδιατάραχτη κατάσταση όπου υπάρχει η βασική κατάσταση.
2. Διαταραγμένη κατάσταση όπου αναπτύσσονται κυματικές μορφές.

Περιοχή 1

$$p_1 = \bar{p}_1 - \rho_1 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \Phi_1'}{\partial x} + g\xi \right) \quad (12)$$

Περιοχή 2

$$p_2 = \bar{p}_2 - \rho_2 \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \Phi_2'}{\partial x} + g\xi \right) \quad (13)$$

$$p_1 = p_2 \quad \text{και} \quad \bar{p}_1 = \bar{p}_2$$

Και στην αρχική, αδιατάραχτη αλλά και στην διαταραγμένη κατάσταση, οι πιέσεις και στις δυο περιοχές θα πρέπει να εξισώνονται στην διεπιφάνεια.

$$(12, 13) \Rightarrow \rho_1 \left(\frac{\partial \Phi_1'}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \Phi_1'}{\partial x} + g\xi \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial \Phi_2'}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \Phi_2'}{\partial x} + g\xi \right) \quad (14)$$



6. Ευστάθεια ροής με κατακόρυφη διάτμηση (ασυνέχεια): μαθηματική περιγραφή

Στο σύστημα τριών εξισώσεων αναζητούμε λύση ως προς Φ'_1, Φ'_2 & ξ

∂Φ'1/∂z = ∂ξ/∂t + U1 ∂ξ/∂x (10)

ρ1 (∂Φ'1/∂t + U1 ∂Φ'1/∂x + gξ) = ρ2 (∂Φ'2/∂t + U2 ∂Φ'2/∂x + gξ) (14)

∂Φ'2/∂z = ∂ξ/∂t + U2 ∂ξ/∂x (11)

Αναζητούμε λύσεις με μορφή, για παράδειγμα Φ'1 = f1(z)e^(ikx-ωt) Λαμβάνοντας υπόψη τη συμμετρία του προβλήματος

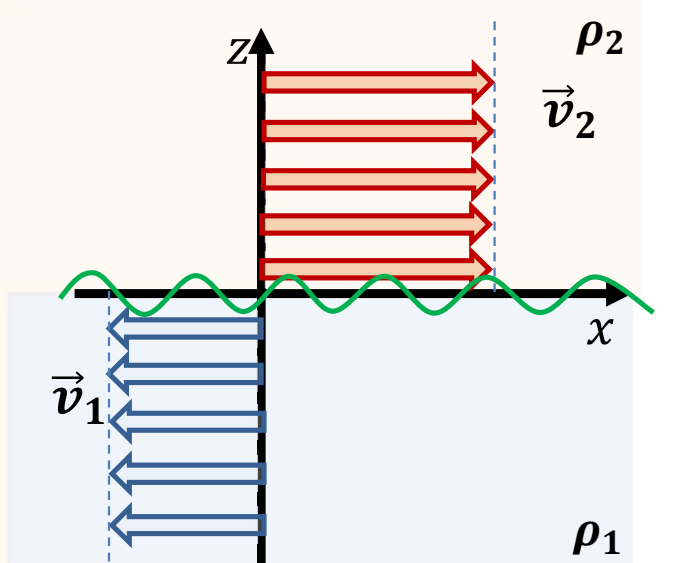
Με την προϋπόθεση ότι Φ'1 & Φ'2 ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις Laplace:

∇²Φ'1 = 0 => ∂²Φ'1/∂x² + ∂²Φ'1/∂z² = 0 => i²k²f1(z)e^(ikx-ωt) + ∂²f1(z)/∂z² e^(ikx-ωt) = 0 => ∂²f1(z)/∂z² - k² = 0

∇²Φ'2 = 0 => ∂²f2(z)/∂z² - k² = 0

Περιοχή 1
∂²f1(z)/∂z² - k² = 0
f1(z) = Ae^(kz) + Be^(-kz)
z -> -∞ f1 -> 0 => B = 0
Φ'1 = Ae^(kz)e^(i(kx-ωt))

Περιοχή 2
∂²f2(z)/∂z² - k² = 0
f2(z) = Ce^(kz) + De^(-kz)
z -> ∞ f2 -> 0 => C = 0
Φ'2 = De^(-kz)e^(i(kx-ωt))



6. Ευστάθεια ροής με κατακόρυφη διάτμηση (ασυνέχεια): μαθηματική περιγραφή

Στο σύστημα τριών εξισώσεων αναζητούμε λύση ως προς Φ'_1, Φ'_2 & ξ

$$\frac{\partial \Phi'_1}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{10}$$

$$\frac{\partial \Phi'_2}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{11}$$

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \Phi'_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x} + g\xi \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial \Phi'_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \Phi'_2}{\partial x} + g\xi \right) \tag{14}$$

$$\Phi'_1 = Ae^{kz} e^{i(kx-\omega t)} \Rightarrow \Phi'_1 = \hat{\varphi}_1 e^{kz} e^{i(kx-\omega)}$$

$$\Phi'_2 = De^{-kz} e^{i(kx-\omega)} \Rightarrow \Phi'_2 = \hat{\varphi}_2 e^{-kz} e^{i(kx-\omega t)}$$

Το πλάτος της διαταραχής μεταβάλλεται στην κατακόρυφη διεύθυνση και “σβήνει” όσο απομακρυνόμαστε από την διεπιφάνεια.

Αναζητούμε λύσεις με μορφή

$$\Phi'_1 = \hat{\varphi}_1 e^{kz} e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\omega = \omega_r + i \omega_i$$

$$\Phi'_2 = \hat{\varphi}_2 e^{-kz} e^{i(kx-\omega t)}$$

Γενικά η κυκλική συχνότητα ω είναι μιγαδικός αριθμός

$$\xi = \hat{\xi} e^{i(kx-\omega t)}$$

Αστάθεια διαταραχών

$$\Phi'_1 = \hat{\varphi}_1 e^{kz} e^{\omega_i t} e^{i(kx-\omega_r t)}$$

Αν η συχνότητα έχει φανταστικό μέρος τότε το πλάτος της διαταραχής θα αυξάνει εκθετικά στο χρόνο. Οδηγεί στον καθορισμό διαμόρφωσης κριτηρίου αστάθειας.

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω μορφές στις (10), (11) & (14) λαμβάνουμε τις αλγεβρικές εξισώσεις

$$(10) \Rightarrow k \hat{\varphi}_1 e^{kz} = i \hat{\xi} (kU_1 - \omega)$$

$$(11) \Rightarrow -k \hat{\varphi}_2 e^{-kz} = i \hat{\xi} (kU_2 - \omega)$$

$$(14) \Rightarrow i \rho_1 \hat{\varphi}_1 e^{kz} (kU_1 - \omega) + \rho_1 g \hat{\xi} = i \rho_2 \hat{\varphi}_2 e^{-kz} (kU_2 - \omega) + \rho_2 g \hat{\xi}$$

6. Ευστάθεια ροής με κατακόρυφη διάτμηση (ασυνέχεια): μαθηματική περιγραφή

$$k\hat{\phi}_1 e^{kz} = i\hat{\xi}(kU_1 - \omega) \quad (15)$$

$$-k\hat{\phi}_2 e^{-kz} = i\hat{\xi}(kU_2 - \omega) \quad (16)$$

$$i\rho_1\hat{\phi}_1 e^{kz} (kU_1 - \omega) + \rho_1 g\hat{\xi} = i\rho_2\hat{\phi}_2 e^{-kz} (kU_2 - \omega) + \rho_2 g\hat{\xi} \quad (17)$$

$$(17) \Rightarrow i\rho_1\hat{\phi}_1 e^{kz} (kU_1 - \omega) + \rho_1 g\hat{\xi} = i\rho_2\hat{\phi}_2 e^{-kz} (kU_2 - \omega) + \rho_2 g\hat{\xi} \Rightarrow$$

$$-\rho_1 (kU_1 - \omega)^2 \hat{\xi} + \rho_1 gk\hat{\xi} = \rho_2 (kU_2 - \omega)^2 \hat{\xi} + \rho_2 gk\hat{\xi}$$

Μη τετριμμένες λύσεις είναι δυνατές για $\hat{\xi} \neq 0$

$$-\rho_1 (kU_1 - \omega)^2 + \rho_1 gk = \rho_2 (kU_2 - \omega)^2 + \rho_2 gk \Rightarrow$$

$$\omega^2(\rho_1 + \rho_2) - 2\omega k(\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2) + k^2(\rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2) + (\rho_2 - \rho_1)gk = 0 \quad (18)$$

Εξίσωση διασποράς

Ανάλογα με το αν η κυκλική συχνότητα ω έχει φανταστικό μέρος ή όχι οι λύσεις θα έχουν ή όχι πλάτος το οποίο αυξάνει εκθετικά με τον χρόνο. Αν πράγματι αυξάνει με αυτό τον τρόπο τότε θα μιλάμε για εκδήλωση αστάθειας. Παρακάτω μελετούμε την εξίσωση διασποράς για μερικές ειδικές περιπτώσεις.

7. Διερεύνηση εξίσωσης διασποράς: Rayleigh – Taylor instability

Ας εξετάσουμε πρώτα την ειδική περίπτωση όπου και τα δύο στρώματα του ρευστού βρίσκονται σε ακινησία. Δηλαδή ισχύει

$$U_1 = U_2 = 0 \qquad (18) \Rightarrow \qquad \omega^2 = \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{(\rho_1 + \rho_2)} gk \qquad \text{Εξίσωση διασποράς}$$

1) Το πυκνότερο ρευστό βρίσκεται από κάτω $\rho_1 > \rho_2 \Rightarrow \rho_1 - \rho_2 > 0$

$\omega^2 > 0$

Η κυκλική συχνότητα ω είναι πραγματικός αριθμός

$\omega = \omega_r + i \cancel{\omega_i}$

$$\Phi'_1 = \hat{\varphi}_1 e^{kz} e^{\omega_i t} e^{i(kx - \omega_r t)} = \hat{\varphi}_1 e^{kz} e^{i(kx - \omega_r t)}$$

Δυναμικά ευσταθής κατάσταση: Διαταραχές οι οποίες αναπτύσσονται στη διεπιφάνεια δεν θα γιγαντώνονται αλλά θα “σβήνουν” γρήγορα.

2) Το πυκνότερο ρευστό βρίσκεται από επάνω $\rho_1 < \rho_2 \Rightarrow \rho_1 - \rho_2 < 0$

$\omega^2 < 0$

Η κυκλική συχνότητα ω έχει φανταστικό μέρος

$\omega = \omega_r + i \omega_i$

Δυναμικά ασταθής κατάσταση: Διαταραχές οι οποίες αναπτύσσονται στην διεπιφάνεια θα εμφανίζουν εκθετική αύξηση του πλάτους τους. Αυτή η **αστάθεια** ονομάζεται **Rayleigh – Taylor**.

Ουσιαστικά πρόκειται για αστάθεια, η οποία πυροδοτείται από την δύναμη της άνωσης και οδηγεί στην άνοδο του λιγότερου πυκνού υλικού. Πριν την αστάθεια στο σύστημα το πυκνότερο υλικό βρισκόνταν επάνω από το ελαφρύτερο, μια κατάσταση αυξημένης δυναμικής ενέργειας.

Η εκδήλωση αστάθειας αντλεί ενέργεια από αυτή την δυναμική ενέργεια λόγω στρωμάτωσης και την μετατρέπει σε κινητική ενέργεια.

8. Αστάθεια *Rayleigh – Taylor*

Προσομοίωση ανάμιξης αρχικά ακίνητων στρωμάτων ρευστών μετά την εκδήλωση αστάθειας Rayleigh-Taylor. Το κόκκινο ρευστό έχει ελαφρώς υψηλότερη πυκνότητα από το μπλε ρευστό.

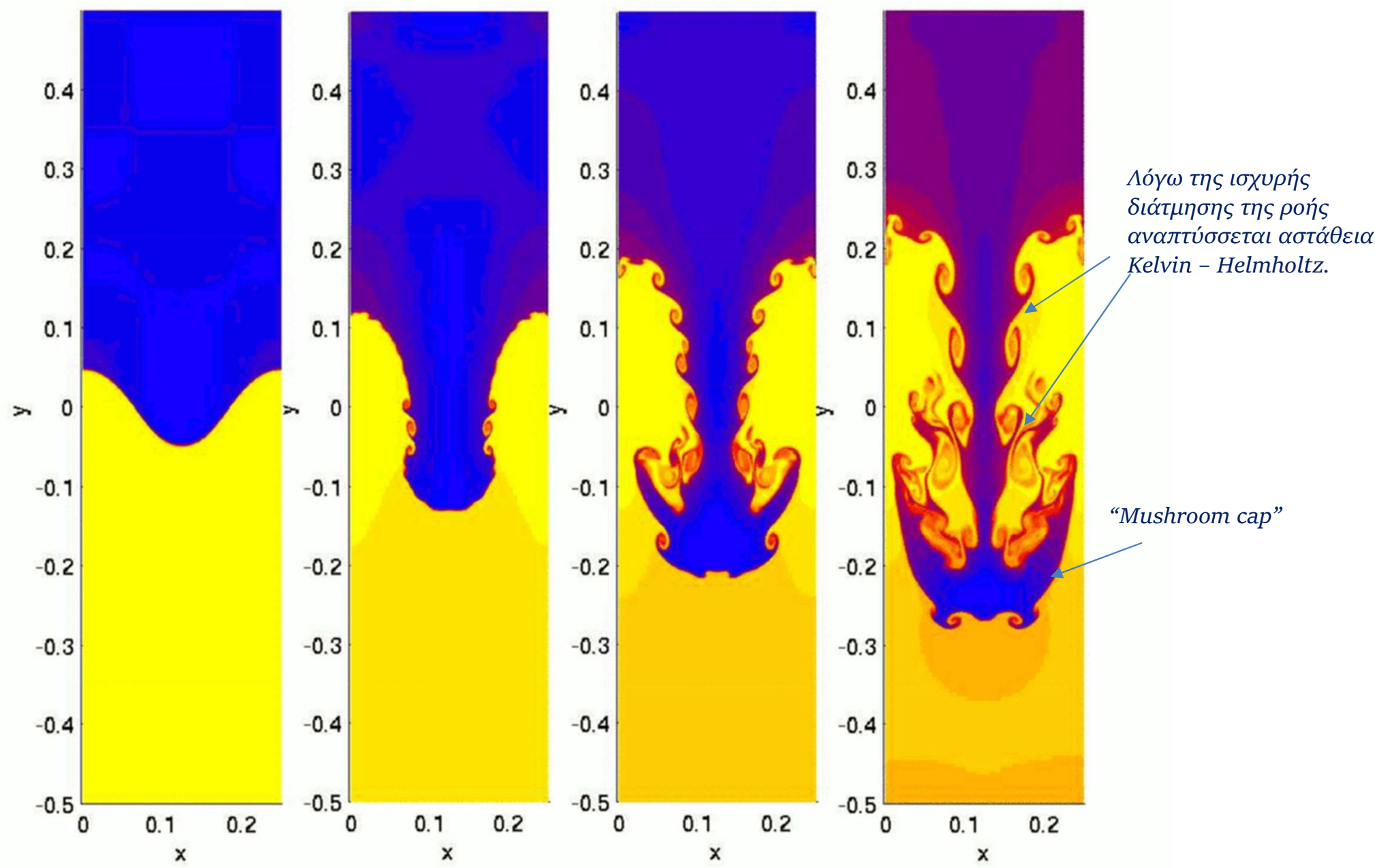


Time = 000.0s

<https://www.youtube.com/watch?v=-va3ET2anNI>

8. Αστάθεια Rayleigh – Taylor

Προσομοίωση ανάμιξης αρχικά ακίνητων στρωμάτων ρευστών μετά την εκδήλωση αστάθειας Rayleigh-Taylor με τη μορφή λοβού. Το μπλε ρευστό έχει υψηλότερη πυκνότητα από το κίτρινο ρευστό.



8. Αστάθεια *Rayleigh – Taylor*

Εκδήλωση αστάθειας Rayleigh-Taylor μεταξύ δυο στρωμάτων. Πυκνότερο θαλασσινό νερό τοποθετείται επάνω από λιγότερο πυκνό χρωματισμένο (πράσινο) νερό.

Rayleigh-Taylor instability between two stable stratifications



Megan Davies Wykes and Stuart Dalziel
DAMTP, University of Cambridge, UK

<https://www.youtube.com/watch?v=NI85oC-3mJ0>

Το σύστημα είναι ασταθές. Μόλις αφαιρεθεί το φράγμα που χωρίζει τα δυο μέρη, η εκδήλωση αστάθειας προκαλεί ανάμιξη ώστε να μειωθεί η δυναμική ενέργεια του συστήματος.

8. Αστάθεια Rayleigh – Taylor και νέφη mammatus

Η αστάθεια Rayleigh-Taylor έχει προταθεί ως μηχανισμός δημιουργίας των νεφών mammatus.



Μοιάζουν με **λοβούς** οι οποίοι ξεπροβάλλουν από τη βάση του επάνω μέρους καταιγισοφόρου νέφους (cumulonimbus anvil).

Προτεινόμενος μηχανισμός: Αστάθεια Rayleigh-Taylor αναπτύσσεται στο όριο μεταξύ του περισσότερο πυκνού αέρα που φέρει υδρομετέωρα από πάνω και του λιγότερου πυκνού αέρα περιβάλλοντος. Οι λοβοί προεξέχουν προς τα κάτω αντιστρέφοντας τη συνήθη προς τα πάνω ανάπτυξη των νεφών (upward growth).

Μειονέκτημα: Σε πραγματικές συνθήκες υπάρχει μεγάλη κατακόρυφη διάτμηση ανέμου μεταξύ των στρωμάτων διαφορετικής πυκνότητας (static stability interface). Αυτό παραβιάζει τις συνθήκες ανάπτυξης αστάθειας Rayleigh-Taylor.

9. Διερεύνηση εξίσωσης διασποράς: Kelvin - Helmholtz instability

Στην περίπτωση που υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ των δύο στρωμάτων του ρευστού ($U_1 \neq U_2$) αλλά απουσία βαρυτικού πεδίου ($g = 0$). Εξετάζουμε την εκδήλωση ή μη της αστάθειας **Kelvin - Helmholtz** :

(18) $\Rightarrow$ $(\rho_1 + \rho_2)\omega^2 - 2k(\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2)\omega + k^2(\rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2) = 0$ (19) **“Pure Shear Flow”**

$$ar^2 + \beta r + \gamma = 0$$

Αποτελεί δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

Διακρίνουσα

$$\omega_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \& \quad \omega_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

$$\omega_{1,2} = \frac{2k(\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2) \pm \sqrt{-4k^2 \rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2}}{2(\rho_1 + \rho_2)} = \frac{2k(\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2) \pm 2k\sqrt{-1}\sqrt{\rho_1 \rho_2} \sqrt{(U_1 - U_2)^2}}{2(\rho_1 + \rho_2)}$$

$$\omega_{1,2} = \frac{k(\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2) \pm ik \sqrt{\rho_1 \rho_2} |U_1 - U_2|}{\rho_1 + \rho_2}$$

Επειδή $U_1 \neq U_2$, πάντα ω με μη μηδενικό φανταστικό μέρος ώστε κάποια λύση/διαταραχή να χαρακτηρίζεται από πλάτος το οποίο αυξάνει εκθετικά με τον χρόνο και να εκδηλώνεται αστάθεια (growing mode component).

Αστάθεια διαταραχών

$$\omega = \omega_r + i \omega_i$$
$$\Phi'_1 = \hat{\phi}_1 e^{kz} e^{\omega_i t} e^{i(kx - \omega_r t)}$$

Αν η ω έχει φανταστικό μέρος τότε το πλάτος της διαταραχής θα αυξάνει εκθετικά στο χρόνο.

Υπό αυτές τις συνθήκες η αστάθεια ονομάζεται **Kelvin - Helmholtz instability**. Θα εκδηλώνεται **πάντοτε** σε ελεύθερη ροή ρευστού όταν υπάρχει διάτμηση του πεδίου ταχύτητας μεταξύ δυο στρωμάτων.

9. Διερεύνηση εξίσωσης διασποράς: Kelvin - Helmholtz instability

Όμως για την περίπτωση ύπαρξης σχετικής κίνησης μεταξύ των δύο στρωμάτων του ρευστού ($U_1 \neq U_2$), υπάρχει κάποιο σενάριο όπου η εκδήλωση αστάθειας Kelvin - Helmholtz μπορεί να ανασχεθεί και αυτό συμβαίνει παρουσία βαρυτικού πεδίου ($g \neq 0$). Δηλαδή ισχύει

$$(18) \Rightarrow (\rho_1 + \rho_2)\omega^2 - 2k(\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2)\omega + k^2(\rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2) + (\rho_2 - \rho_1)gk = 0$$

$ar^2 + \beta r + \gamma = 0$ Αποτελεί δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες

$$\omega_{1,2} = \frac{2k(\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2) \pm \sqrt{-4k^2 \rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2 - 4(\rho_1 + \rho_2)(\rho_2 - \rho_1)gk}}{2(\rho_1 + \rho_2)} \Rightarrow$$

$$\omega_{1,2} = \frac{k(\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2)}{(\rho_1 + \rho_2)} \pm \frac{\sqrt{-k^2 \rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2 - (\rho_1 + \rho_2)(\rho_2 - \rho_1)gk}}{(\rho_1 + \rho_2)}$$

$$-k^2 \rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2 - (\rho_1 + \rho_2)(\rho_2 - \rho_1)gk > 0 \Rightarrow$$

Ευστάθεια:
1) $\rho_2 < \rho_1$ Δηλαδή το ελαφρύτερο στρώμα είναι από επάνω.

2) Εάν η ποσότητα που βρίσκεται κάτω από τη ρίζα είναι θετική τότε μόνο η λύση για τη συχνότητα δεν θα έχει φανταστικό μέρος.

Ευστάθεια

$$(U_1 - U_2)^2 < \frac{(\rho_1 + \rho_2)(\rho_1 - \rho_2)g}{k\rho_1\rho_2}$$

(20)

Αστάθεια

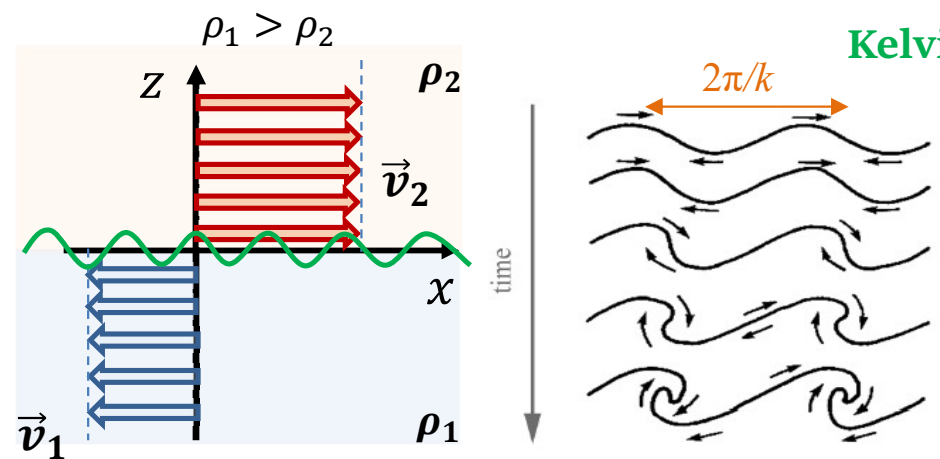
$$(U_1 - U_2)^2 > \frac{(\rho_1 + \rho_2)(\rho_1 - \rho_2)g}{k\rho_1\rho_2}$$

Η παρουσία βαρύτητας αλλάζει τα δεδομένα. Η εκδήλωση αστάθειας Kelvin - Helmholtz δεν είναι πάντα δυνατή. Λαμβάνει χώρα μόνο υπό προϋποθέσεις. Διαταραχές με ορισμένα μ.κ. αποσβένονται παρουσία βαρύτητας (stabilized modes) ενώ άλλες χαρακτηρίζονται από εκθετική αύξηση πλάτους (αστάθεια).

10. Kelvin - Helmholtz instability: εφαρμογή

Εφαρμογή

Να βρεθεί το πάχος της ζώνης ανάμιξης η οποία λαμβάνει χώρα όταν αστάθεια αναπτύσσεται στη διεπιφάνεια στρωμάτων με ρ_2 & ρ_1 και U_2 & U_1



Kelvin-Helmholtz instability

Αρχική διαταραχή κυματικής μορφής με μ.κ. $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ καθίσταται συνήθως ασταθής σε συνθήκες μεγάλης διάτμησης. Κύματα αρχικά μικρού μ.κ. “σπάνε” προκαλώντας μη αντιστρεπτή ανάμιξη.

$$(U_1 - U_2)^2 > \frac{(\rho_1 + \rho_2)(\rho_1 - \rho_2)g}{k\rho_1\rho_2}$$

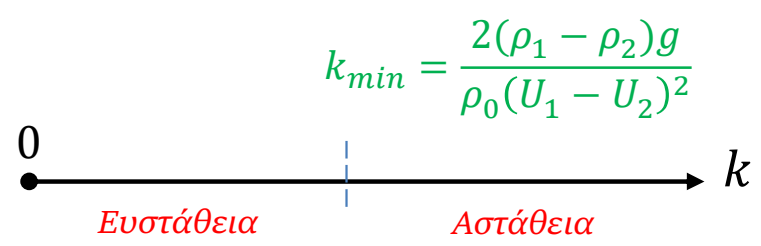
(20)

Χρησιμοποιούμε την παρακάτω προσέγγιση πλην εκεί που εμφανίζεται διαφορά $\rho_0 \approx \rho_1 \approx \rho_2$

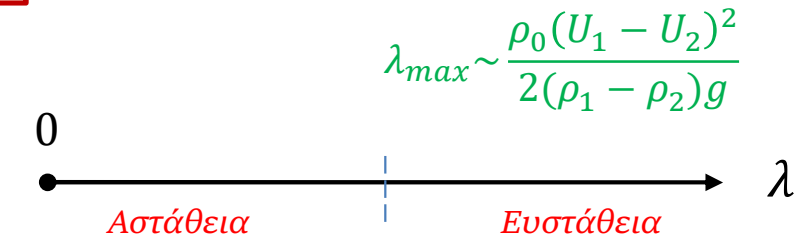
(20) $\Rightarrow (\rho_1 - \rho_2)(\rho_2 + \rho_1)g < \rho_0\rho_0k(U_1 - U_2)^2 \Rightarrow (\rho_1 - \rho_2)2\rho_0g < \rho_0^2k(U_1 - U_2)^2 \Rightarrow$

$$(\rho_1 - \rho_2)2g < \rho_0k(U_1 - U_2)^2 \Rightarrow$$

$$k > \frac{2(\rho_1 - \rho_2)g}{\rho_0(U_1 - U_2)^2}$$



$k \sim 1/\lambda$



Κυματικές διαταραχές με $k > k_{min}$ καθίστανται ασταθείς. Το κατώφλι μειώνεται για μικρότερη διαφορά πυκνοτήτων και μεγαλύτερη διάτμηση.

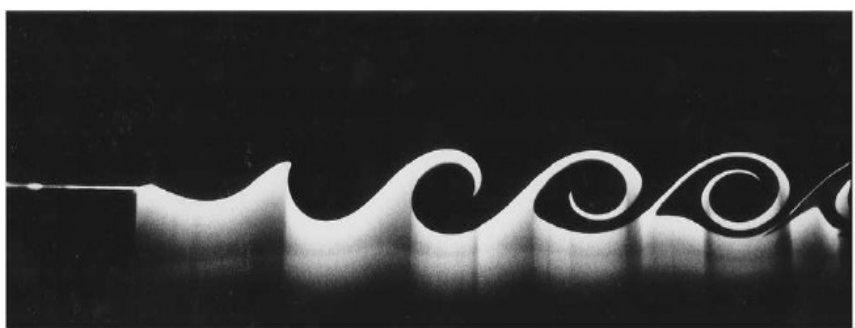
Κυματικές διαταραχές με $\lambda < \lambda_{max}$ καθίστανται ασταθείς. Το όριο αυτό αυξάνεται για μικρότερη διαφορά πυκνοτήτων και μεγαλύτερη διάτμηση.

10. Kelvin - Helmholtz instability: εφαρμογή

Η δημιουργία και το “σπάσιμο” των κυμάτων Kelvin – Helmholtz προκαλεί τυρβώδη ανάμιξη των δυο στρωμάτων σε μια ζώνη πάχους ΔH . Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το μ.κ. του κύματος με μέγιστο μ.κ. λ_{max}

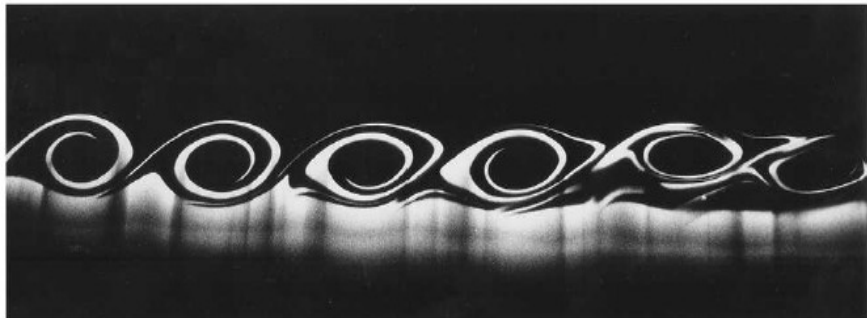
$$\Delta H \sim \lambda_{max} \sim \frac{\rho_0 (U_1 - U_2)^2}{2(\rho_1 - \rho_2)g}$$

Η ζώνη ανάμιξης είναι μεγαλύτερη όταν η διάτμιση είναι μεγαλύτερη στα δυο στρώματα και όταν η διαφορά πυκνοτήτων είναι μικρότερη.



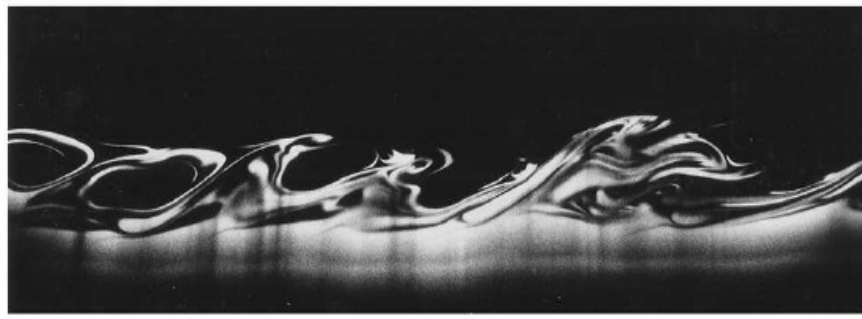
Linear regime: Το πλάτος των μικρών κυματόμορφων διαταραχών (wave amplitude) μεγαλώνει γρήγορα. Οι διαταραχές αναπτύσσονται κατά μήκος της διεπιφάνειας.

Μετάβαση: Ανάπτυξη μεγαλύτερων σε πλάτος Kelvin –Helmholtz billows.



Non - linear regime : Τα κύματα μεγαλώνουν και τυλίγονται προκαλώντας τη δημιουργία στροβίλων. Η αύξηση του πλάτους είναι ταχύτερη για κύματα με μεγαλύτερο ω_i .

$$\Phi'_1 = \hat{\phi}_1 e^{kz} e^{\omega_i t} e^{i(kx - \omega_r t)}$$



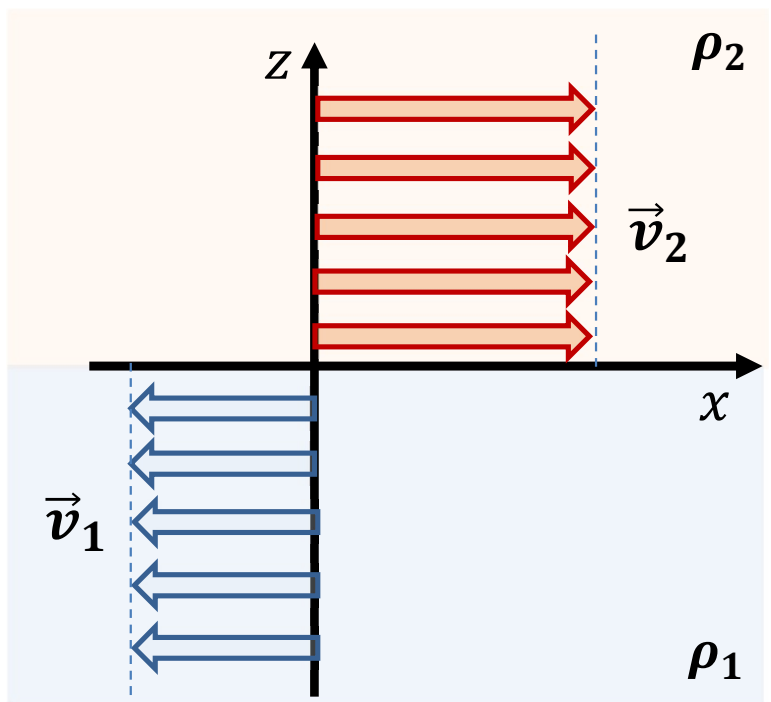
Τυρβώδης φάση: Ανάπτυξη πλήρους τύρβης κατά μήκος της διεπιφάνειας. Ανάμιξη μεταξύ των δυο στρωμάτων.

Μέσα σε αυτό το στρώμα πάχους ΔH η τύρβη αναπτύσσεται λόγω ισχυρής διάτμησης.

11. Ευστάθεια ροής με κατακόρυφη διάτμηση: μαθηματική περιγραφή

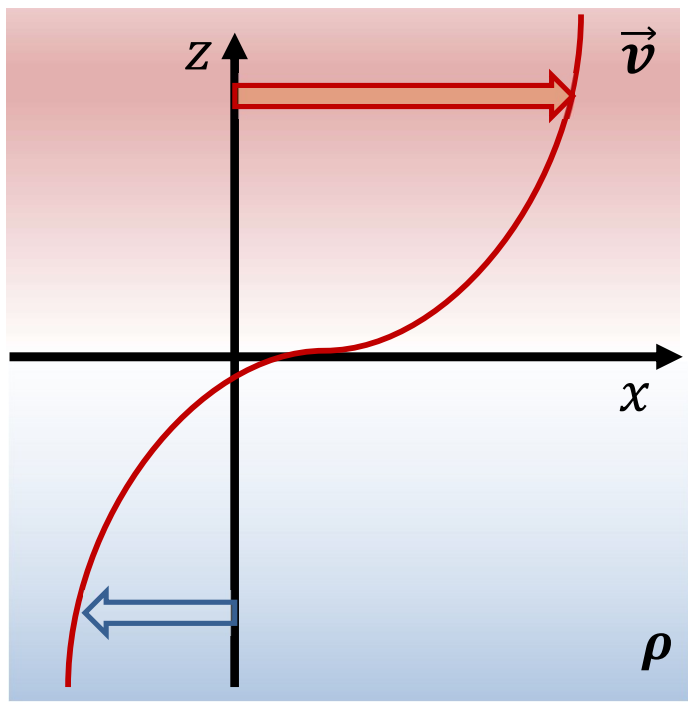
Μελετάμε την αστάθεια vertical shear instability: σε δυο εξιδανικευμένες περιπτώσεις παραλλήλων ροών αέρα (επίπεδο x - z) παρουσία **κατακόρυφης διάτμησης** σε **οριζόντια ροή** (sheared flow) και στρωμάτωσης περιβάλλοντος (δηλαδή μεταβολής της πυκνότητας).

Ιδεατή ροή παρουσία ασυνέχειας στη πυκνότητα και πεδίο ταχύτητας



Discontinuous field of velocity and stratification.

Πιο ρεαλιστική ροή παρουσία συνεχούς στρωμάτωσης και πεδίου ταχύτητας

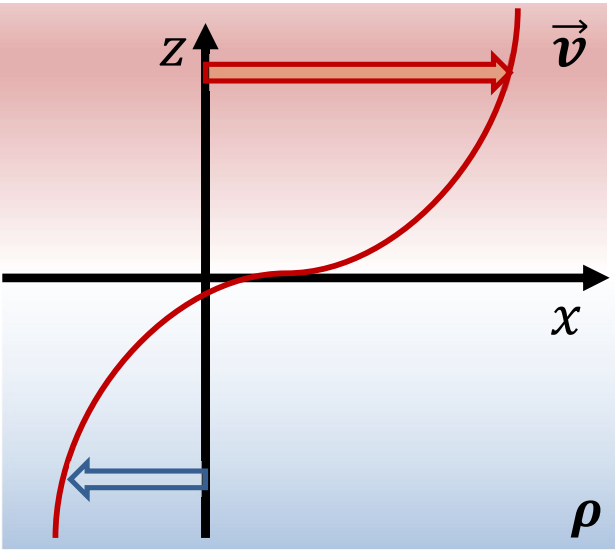


Continuous field of velocity and stratification.

Linear stability analysis: Γραμμικοποιώντας τις αρχικές εξισώσεις θα παράξουμε εξισώσεις που περιγράφουν διαταραχές κυματικής μορφής από βασική κατάσταση. Η μελέτη της εξίσωσης διασποράς θα καθορίσει το κριτήριο αστάθειας για κάθε τύπου αστάθειας (Kelvin – Helmholtz & Rayleigh - Taylor).

Περιορισμοί: 1) Η μέθοδος προβλέπει μόνο την έναρξη της αστάθειας και όχι τη μη γραμμική αλληλεπίδραση των στροβίλων που οδηγεί σε καθεστώς τύρβης. 2) Εφαρμόζεται μόνο σε μικρές διαταραχές κυματικής μορφής (όχι για finite-amplitude disturbances).

12. Ευστάθεια ροής με κατακόρυφη διάτμησης: συνεχές προφίλ



Παρουσία συνεχούς στρωμάτωσης της Ατμόσφαιρας (δηλαδή μεταβολής της πυκνότητας) και μεταβολής του πεδίου ταχύτητας, **αστάθεια Kelvin – Helmholtz** εκδηλώνεται όταν ισχύει η παρακάτω συνθήκη:

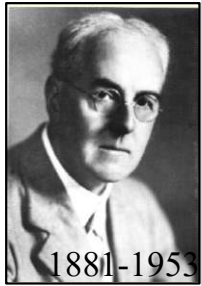
Στρωμάτωση

$$Ri \equiv \frac{N^2}{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2} < Ri_c = \frac{1}{4}$$

Διάτμηση

Critical Richardson number

Gradient Richardson Number



L.F. Richardson

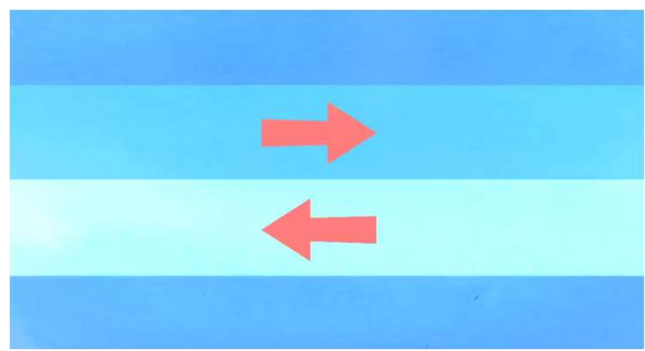
Εκτός ΑΟΣ και του αεροχειμάρρου, σε Στρατόσφαιρα και Τροπόσφαιρα, η **στρωμάτωση εμποδίζει τη διάτμηση να οδηγήσει σε τύρβη και κατακόρυφη ανάμιξη ($Ri > 1$)**.

13. Αστάθεια Kelvin-Helmholtz: φυσική εξήγηση

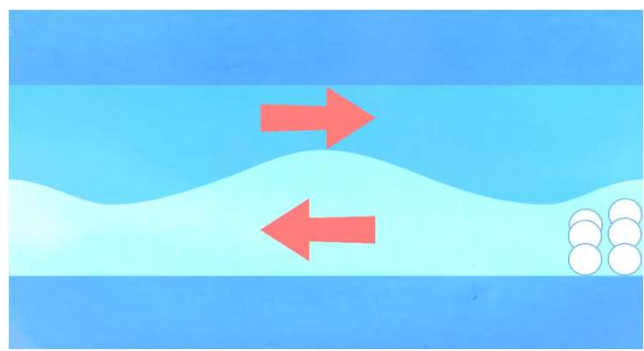
Η αστάθεια Kelvin-Helmholtz δύναται να αναπτυχθεί στην περίπτωση που υπάρχει ροή διαφορετικών υλικών με διαφορετική ταχύτητα ροής. Απαιτείται σχετική κίνηση μεταξύ των στρωμάτων.



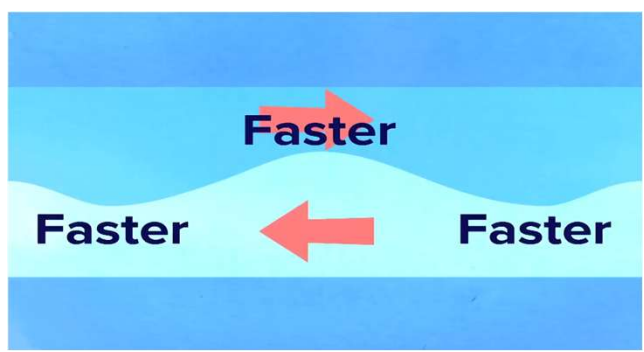
1. Για ευκολία θεωρούμε ότι τα στρώματα των υλικών εκατέρωθεν διεπιφάνειας κινούνται σε αντίθετη κατεύθυνση.



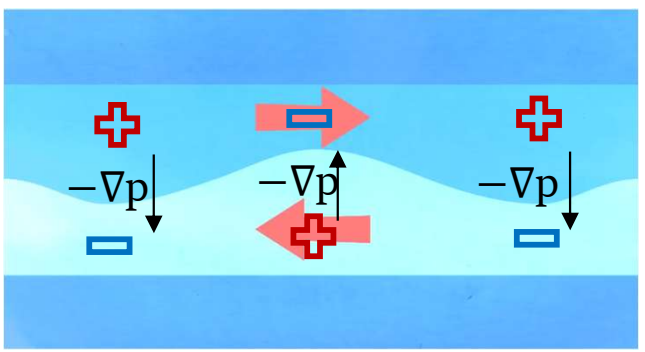
2. Μικρή διαταραχή δύναται να μεγαλώσει σε πλάτος. Η μελέτη των συνθηκών προς αυτήν την εξέλιξη είναι ενδιαφέρουσα.



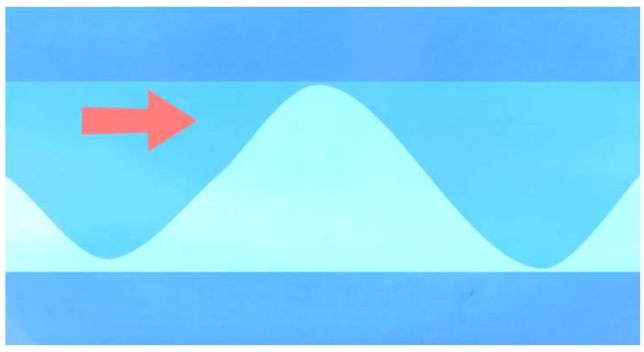
3. Η παρουσία της κυματικής διαταραχής δημιουργεί και στα δύο στρώματα περιοχές όπου το πέρασμα στενεύει ή πλαταίνει.



4. **Φαινόμενο Bernoulli:** Σε περιοχές στένωσης (πλάτυνσης) της ροής, αυτή καθίσταται ταχύτερη (πιο αργή) ενώ η πίεση μειώνεται (αυξάνεται).



5. Η αναπτυσσόμενη δύναμη βαροβαθμίδας είναι κάθετη στην διεπιφάνεια και συντελεί στην αύξηση του πλάτους της κυματική διαταραχής.

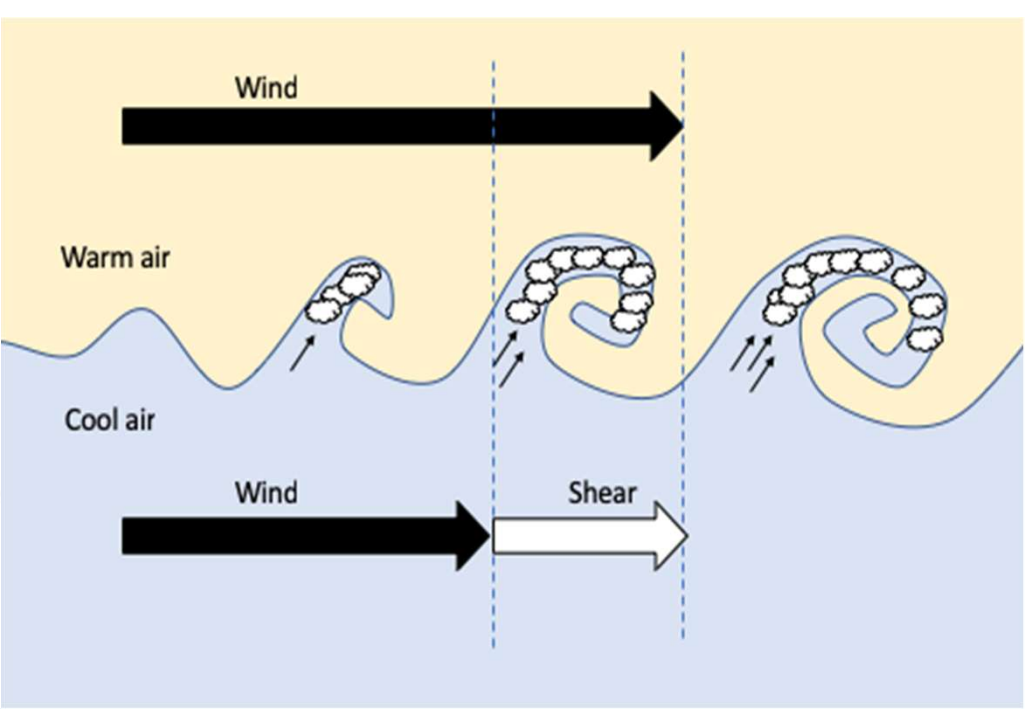
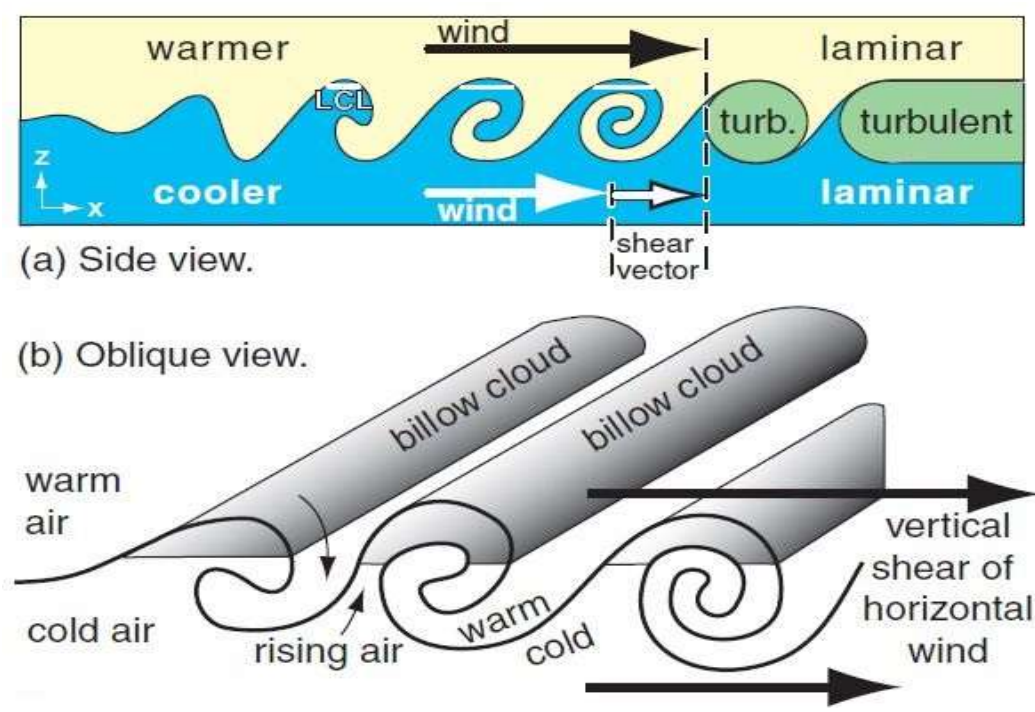


6. Οι εγκολπώσεις παρασύρονται και τυλίγονται υπό την επίδραση και των πεδίων στροβιλισμού.

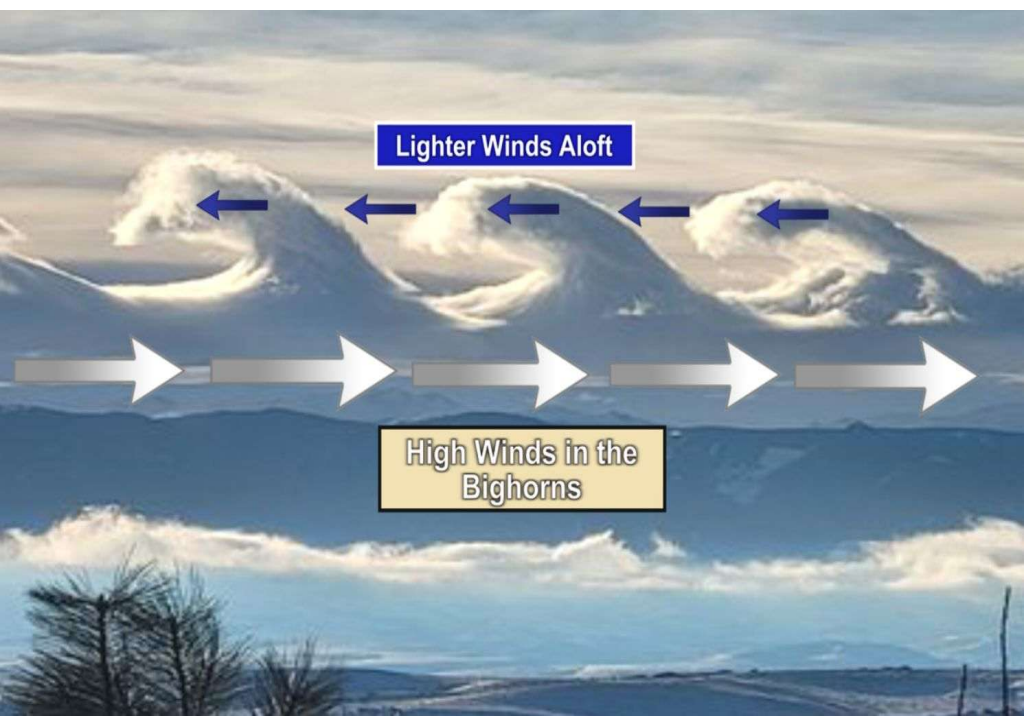
Ο παραπάνω μηχανισμός εξηγεί πως αυξάνεται το πλάτος των κυματικών διαταραχών όταν εκδηλώνεται η αστάθεια Kelvin-Helmholtz. Με μαθηματική επεξεργασία θα καταλήξουμε στο κριτήριο που μας πληροφορεί για τις απαιτούμενες συνθήκες εκδήλωσης αστάθειας.



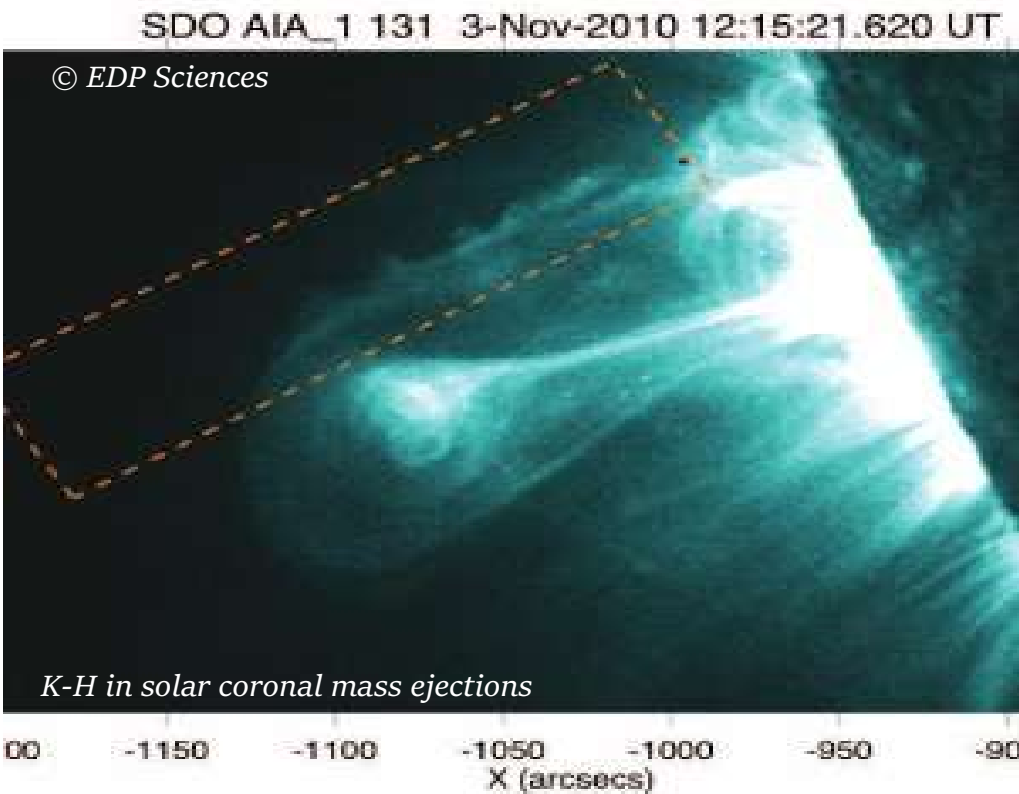
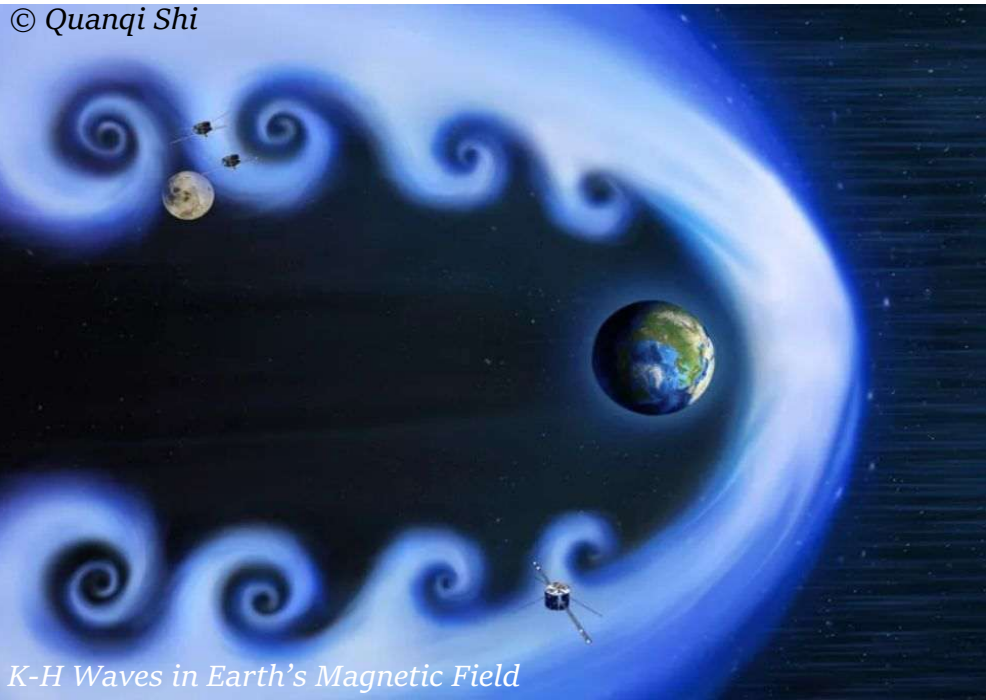
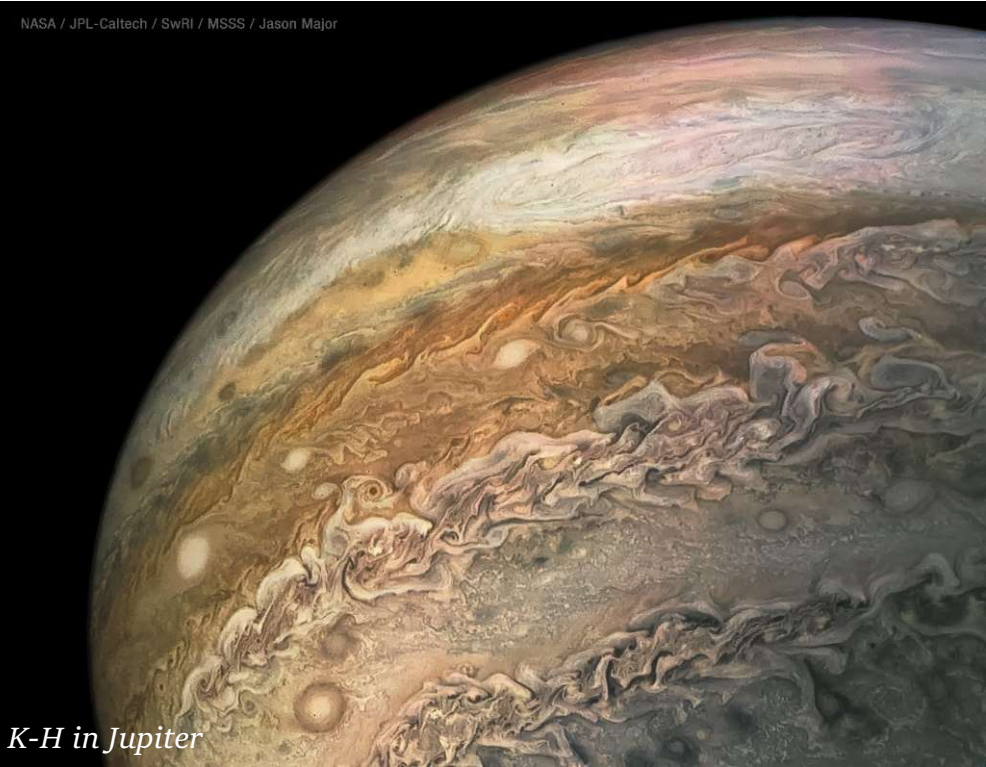
14. Kelvin – Helmholtz clouds: billow clouds



- **Ύψος βάσης:** οποιοδήποτε αλλά συνήθως βρίσκεται σε μεγάλο ύψος.
- **Μορφή:** επαναλαμβανόμενη δομή κύματος που σπάει με εγκολπώσεις νέφους σε ανέφελο περιβάλλον.
- **Υετός:** μη σημαντικός
- **Καιρός:** η εμφάνισή τους υποδηλώνει ισχυρούς ανέμους σε κάποιο ύψος. Η παρουσία τους είναι υποδηλωτική παρουσίας clear air turbulence.
- **Μηχανισμός:** η ύπαρξη ισχυρής διάτμησης ανέμου στην κατακόρυφη διεύθυνση μεταξύ στρωμάτων διαφορετικής πυκνότητας. Το επάνω μέρος του νέφους παρασύρεται δίνοντας την εικόνα κύματος που σπάει.



15. Παραδείγματα αστάθειας Kelvin - Helmholtz



15. Παραδείγματα αστάθειας Kelvin - Helmholtz



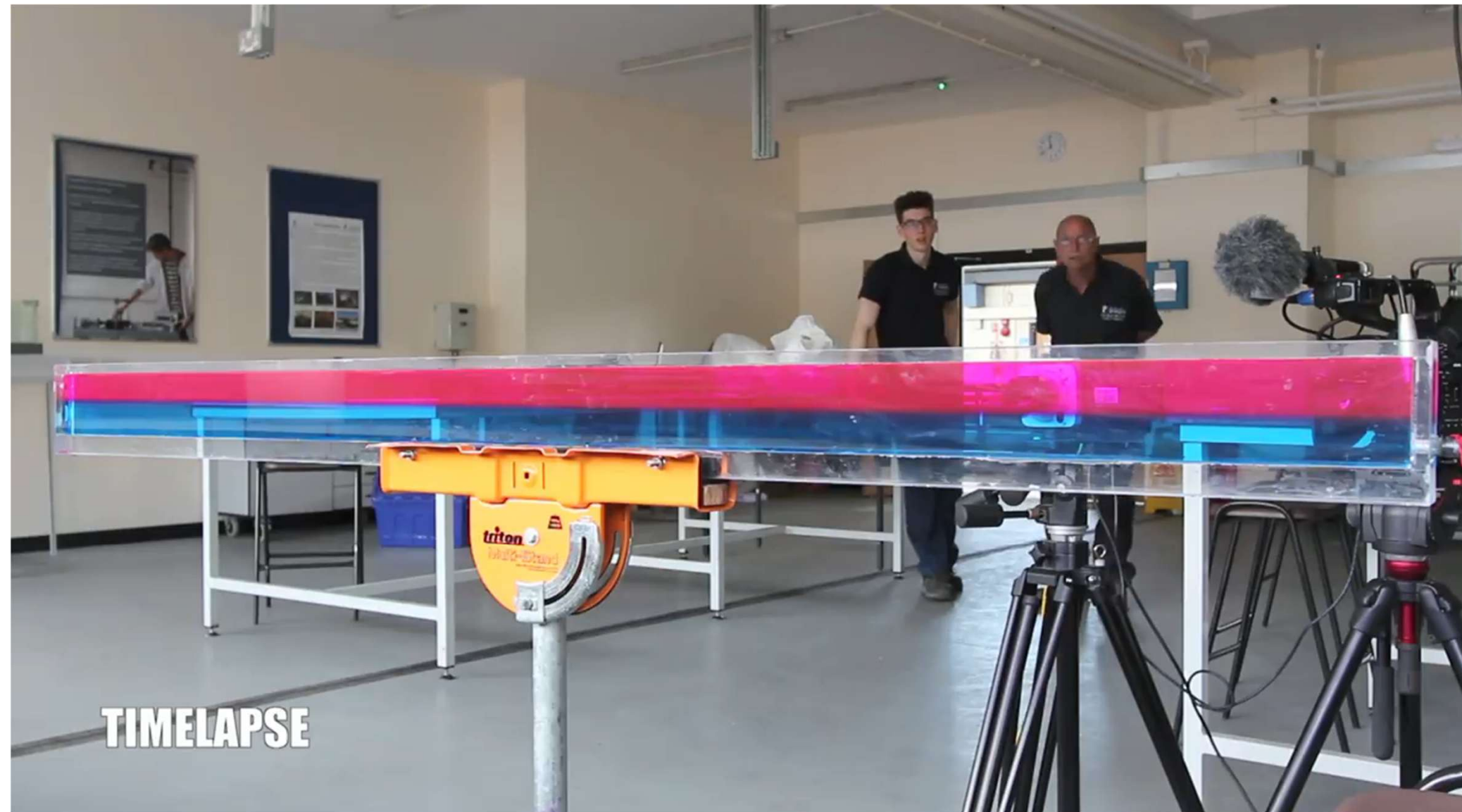
The Starry Night
Vincent van Gogh (1889)



The Great Wave off Kanagawa
Katsushika Hokusai (1831)

15. Παραδείγματα αστάθειας Kelvin - Helmholtz

Ανάπτυξη αστάθειας Kelvin-Helmholtz σε εργαστηριακή διάταξη.

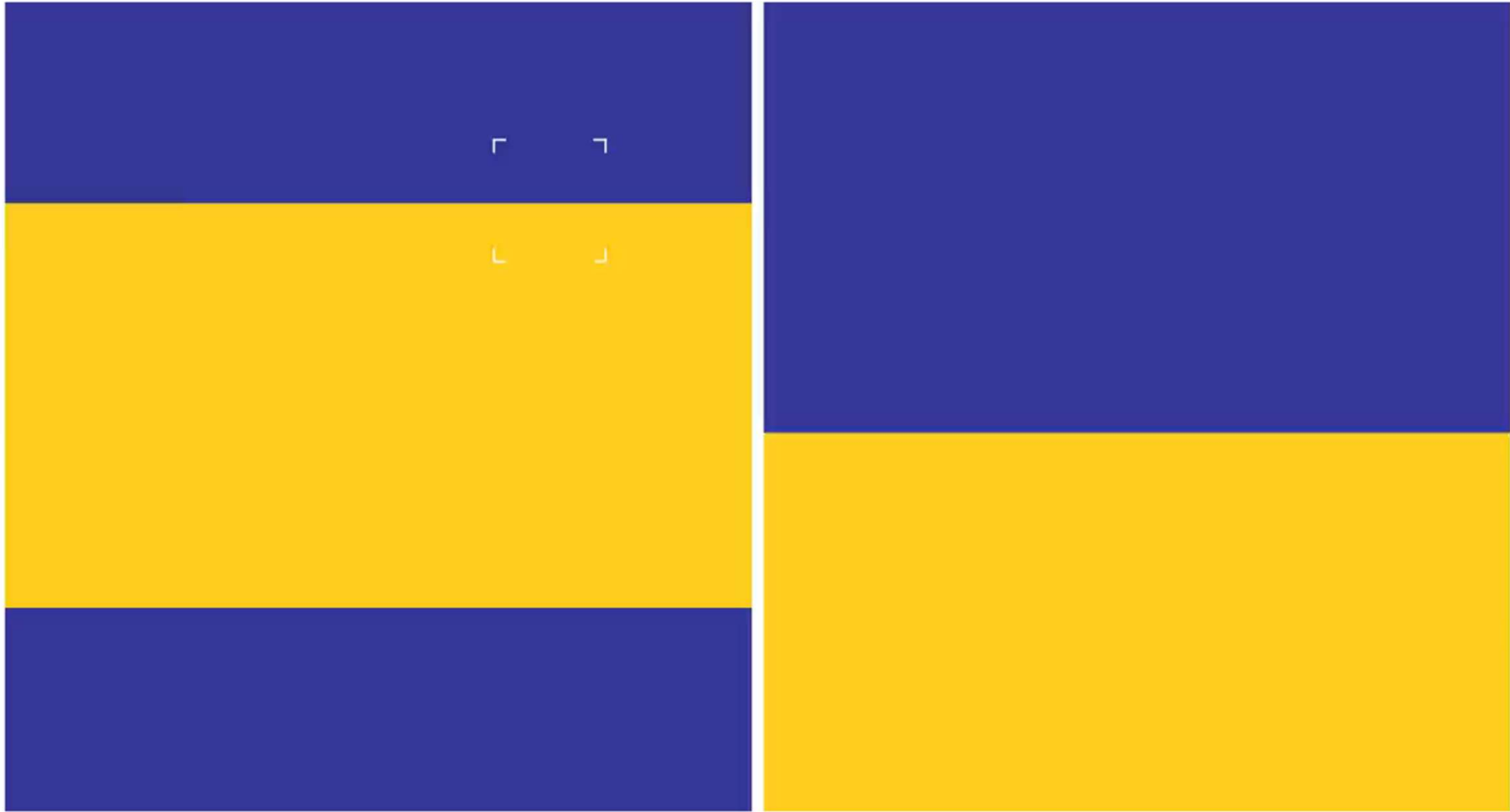


https://www.youtube.com/watch?v=mf_143gkKSQ

Πυκνότερο (μπλε) ρευστό εκχέεται κάτω από λιγότερο πυκνό (κόκκινο) σε εργαστηριακή διάταξη. Πρόσδοση κλίσης στη διάταξη προκαλεί σχετική κίνηση των στρωμάτων με το πυκνότερο να ρέει κάτω από το αραιότερο προς τα δεξιά. Η εμφάνιση διάτμησης προκαλεί την εκδήλωση αστάθειας.

15. Παραδείγματα αστάθειας *Kelvin - Helmholtz*

2D Simulation of a Kelvin-Helmholtz instability with 4th order discontinuous Galerkin (DG) and adaptive mesh refinement.



<https://www.youtube.com/watch?v=cTRQP6DSaqA>

Η προσομοίωση παρουσιάζει το πως αναπτύσσεται η αστάθεια Kelvin-Helmholtz οδηγώντας σε ανάπτυξη στροβίλων οι οποίοι αλληλεπιδρούν μεταξύ τους καθώς και τη μετάβαση σε καθεστώς τυρβώδους ροής.