

Εξισώσεις κίνησης

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \sum F$$

$$\boxed{\frac{d\vec{V}}{dt}} = \boxed{-2\vec{\Omega} \times \vec{V}} - \boxed{\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P} + \boxed{\vec{g}} + \boxed{\vec{F}_r}$$

Επιτάχυνση

Δύναμη Coriolis

Δύναμη Βαροβαθμίδας

Ενεργός βαρύτητα (βαρύτητα + φυγόκεντρος)

Τριβή

Εξισώσεις κίνησης

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -2\vec{\Omega} \times \vec{V} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{g} + \vec{F}_r$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες έχουμε:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \left(\frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \varphi}{\alpha} + \frac{uw}{\alpha} \right) \vec{i} + \left(\frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \varphi}{\alpha} + \frac{vw}{\alpha} \right) \vec{j} + \left(\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{\alpha} \right) \vec{k}$$

$$-2\vec{\Omega} \times \vec{V} = -(2\Omega w \cos \varphi - 2\Omega v \sin \varphi) \vec{i} - 2\Omega u \sin \varphi \vec{j} + 2\Omega u \cos \varphi \vec{k}$$

$$\vec{\nabla} P = \vec{i} \frac{\partial P}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial P}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\vec{g} = -g \vec{k}, \quad g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$$

$$\vec{F}_r = \vec{i} F_{r_x} + \vec{j} F_{r_y} + \vec{k} F_{r_z}$$

Η εξίσωση της ορμής σε περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς είναι η βασική εξίσωση στη δυναμική μετεωρολογία

Όπου α = ακτίνα της γης

Εξισώσεις κίνησης

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση κίνησης και εξισώνοντας όλους τους όρους στις $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ συνιστώσες έχουμε:

$$\boxed{\frac{du}{dt}} - \frac{uv \tan \varphi}{\alpha} + \frac{uw}{\alpha} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + 2\Omega v \sin \varphi - 2\Omega w \cos \varphi + F_{rx}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt}} + \frac{u^2 \tan \varphi}{\alpha} + \frac{vw}{\alpha} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - 2\Omega u \sin \varphi + F_{ry}$$

$$\boxed{\frac{dw}{dt}} - \frac{u^2 + v^2}{\alpha} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g + 2\Omega u \cos \varphi + F_{rz}$$

Η ζωνική μεσημβρινή και η κατακόρυφη συνιστώσες της εξίσωσης της ορμής ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

Εξισώσεις κίνησης

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση κίνησης και εξισώνοντας όλους τους όρους στις $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ συνιστώσες έχουμε:

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \varphi}{\alpha} + \frac{uw}{\alpha} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + 2\Omega v \sin \varphi - 2\Omega w \cos \varphi + F_{rx}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \varphi}{\alpha} + \frac{vw}{\alpha} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - 2\Omega u \sin \varphi + F_{ry}$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{\alpha} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g + 2\Omega u \cos \varphi + F_{rz}$$

Οι όροι που είναι ανάλογοι του $1/\alpha$ καλούνται όροι καμπυλότητας γιατί οφείλονται στην καμπυλότητα της Γης.

Εξισώσεις κίνησης

$$\text{Διεύθυνση } \hat{i}: \quad \frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \varphi}{\alpha} + \frac{uw}{\alpha} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\Omega v \sin \varphi - 2\Omega w \cos \varphi \quad (20.1)$$

$$\text{Διεύθυνση } \hat{j}: \quad \frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \varphi}{\alpha} + \frac{vw}{\alpha} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + K \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2\Omega u \sin \varphi \quad (20.2)$$

$$\text{Διεύθυνση } \hat{k}: \quad \frac{dw}{dt} - \underbrace{\frac{u^2 + v^2}{\alpha}}_{\substack{\text{Επιτάχυνση} \\ \text{Διορθωτικοί όροι (όροι} \\ \text{καμπυλότητας) λόγω} \\ \text{σφαιρικότητας Γης}}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}}_{\substack{\text{Δύναμη} \\ \text{βαροβαθμίδας}}} \underbrace{+ 2\Omega u \cos \varphi}_{\text{Δύναμη Coriolis}} \underbrace{- g}_{\substack{\text{Ενεργός} \\ \text{βαρύτητα}}} \quad (20.3)$$

Απλοποίηση Εξισώσεων κίνησης- Ανάλυση κλίμακας

Οι εξισώσεις κίνησης ισχύουν για όλες τις κλίμακες ατμοσφαιρικών κινήσεων.

Η μορφή τους όμως είναι αρκετά πολύπλοκη και καταφεύγουμε **στην ανάλυση κλίμακας** για να πάρουμε απλούστερες μορφές ανάλογα με την κλίμακα του φαινομένου και τις ιδιαίτερες συνθήκες της ατμοσφαιρικής κίνησης.

Ανάλυση κλίμακας σημαίνει ότι βρίσκουμε για ένα φαινόμενο την τάξη μεγέθους του κάθε όρου της εξίσωσης (με βάση τη χωρική και χρονική κλίμακα του φαινομένου) και παραλείπουμε τους όρους που είναι πολύ μικρότερης τάξης μεγέθους. Έτσι απλοποιούνται οι εξισώσεις.

Απλοποιημένες Εξισώσεις κίνησης

Αν θεωρήσουμε:

- Τους όρους καμπυλότητας αμελητέους
 - Τις κατακόρυφες ταχύτητες πολύ μικρότερες από τις οριζόντιες οπότε $|w \cos \varphi| \ll |v \sin \varphi|$
 - Την κατακόρυφη συνιστώσα της Coriolis δύναμη $2\Omega w \cos \varphi \ll g$
- Οι εξισώσεις της κίνησης παίρνουν πιο απλή μορφή

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v + k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

όπου $f = 2\omega \sin \varphi$
Coriolis παραμέτρος

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u + k \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

Ανάλυση κλίμακας

$$\frac{du}{dt} \rightarrow \frac{V}{T} \rightarrow \frac{V}{\frac{L}{\bar{V}}} \rightarrow \frac{V^2}{L}$$

V=κλίμακα
οριζόντιας
ταχύτητας

$$\frac{\partial P}{\partial x} \rightarrow \frac{\Delta P}{L}$$

T=κλίμακα χρόνου

L=οριζόντια χωρική
κλίμακα

$$\frac{dw}{dt} \rightarrow \frac{W}{T} \rightarrow \frac{W}{\frac{L}{\bar{V}}} \rightarrow \frac{WV}{L}$$

W=κλίμακα
κατακόρυφης
ταχύτητας

$$2\omega v \sin \varphi \rightarrow fV$$

Ανάλυση κλίμακας των εξισώσεων κίνησης

Προκειμένου να απλοποιήσουμε τις εξισώσεις για κινήσεις συνοπτικής κλίμακας ορίζουμε τις ακόλουθες χαρακτηριστικές τάξεις μεγέθους **στη συνοπτική κλίμακα στα μέσα γεωγραφικά πλάτη**

$U \sim 10 \text{ m s}^{-1}$	Τάξη οριζόντιας ταχύτητας
$W \sim 1 \text{ cm s}^{-1}$	Τάξη κατακόρυφης ταχύτητας
$L \sim 10^6 \text{ m}$	Τάξη οριζόντιου μήκους
$H \sim 10^4 \text{ m}$	Τάξη κατακόρυφου μήκους
$\delta P / \rho \sim 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$	Τάξη οριζόντιας διαφοράς πίεσης
$L/U \sim 10^5 \text{ s}$	Κλίμακα χρόνου (μέρες)

Κανονικοποιούμε τη διαφορά πίεσης δP με την πυκνότητα ρ ώστε να έχουμε μια σταθερή τάξη μεγέθους καθ' ύψος παρά την εκθετική μείωση των δύο μεγεθών

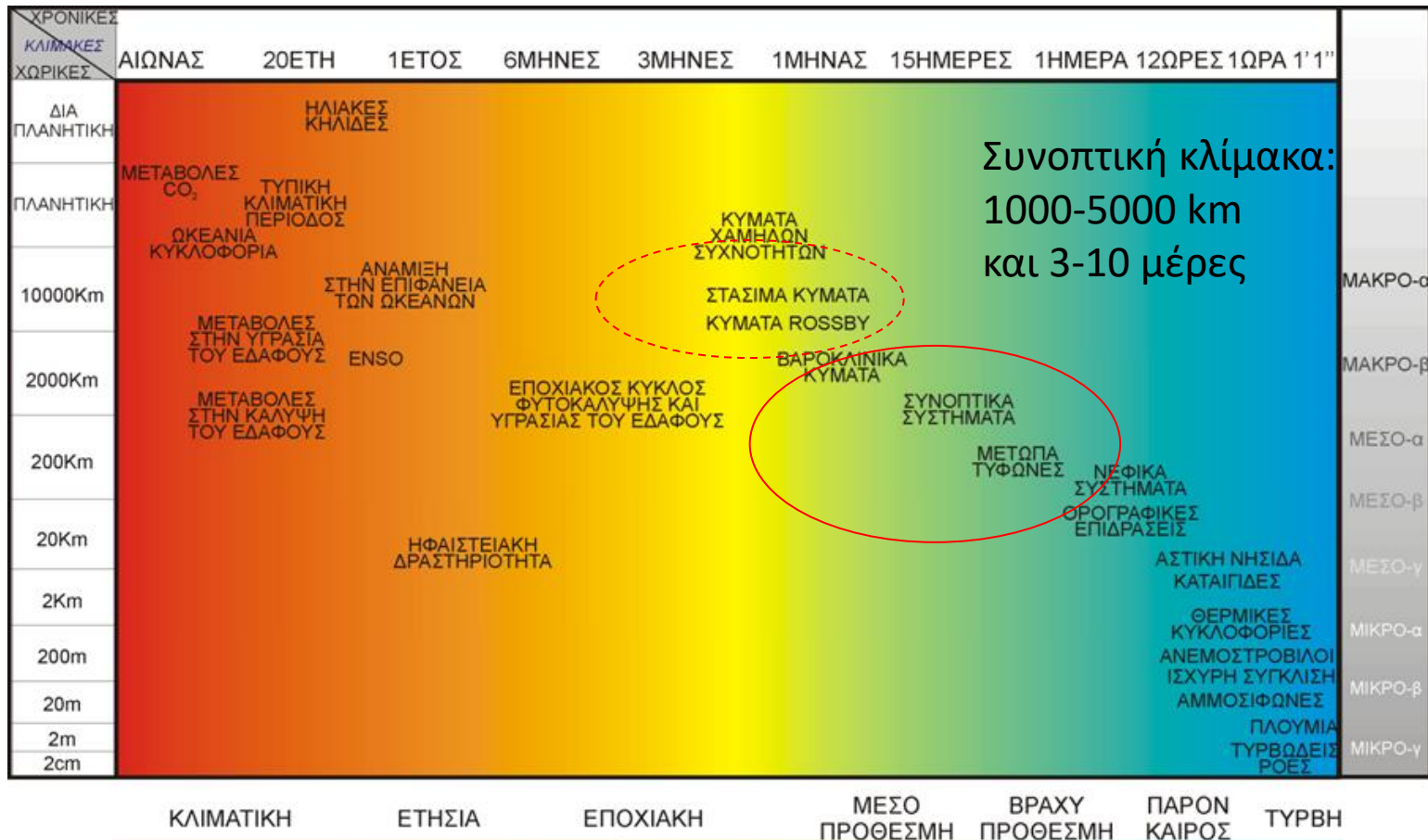
Θεωρούμε $\phi=45^\circ$ οπότε η παράμετρος Coriolis f_0 γίνεται:

$$f_0 = 2\Omega \sin \phi_0 = 2\Omega \cos \phi_0 \cong 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

Γεωγραφικές ζώνες



ΧΩΡΟ-ΧΡΟΝΙΚΕΣ ΚΛΙΜΑΚΕΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΑΤΜΟΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΔΙΕΡΓΑΣΙΩΝ



Η ατμόσφαιρα αποτελεί ένα συνεχές φάσμα διεργασιών σε διάφορες χωρικές και χρονικές κλίμακες

Ανάλυση κλίμακας των οριζόντιων εξισώσεων κίνησης

$$\begin{aligned} U &\sim 10 \text{ m s}^{-1} \\ W &\sim 1 \text{ cm s}^{-1} \\ L &\sim 10^6 \text{ m} \\ H &\sim 10^4 \text{ m} \\ \delta P / \rho &\sim 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \\ L/U &\sim 10^5 \text{ s} \\ f_0 &\cong 10^{-4} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

	A	B	C	D	E	F	G
$x - \text{Eq.}$	$\frac{Du}{Dt}$	$-2\Omega v \sin \phi$	$+2\Omega w \cos \phi$	$+\frac{uw}{a}$	$-\frac{uv \tan \phi}{a}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$	$+F_{rx}$
$y - \text{Eq.}$	$\frac{Dv}{Dt}$	$+2\Omega u \sin \phi$		$+\frac{vw}{a}$	$+\frac{u^2 \tan \phi}{a}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$	$+F_{ry}$
Scales	U^2/L	$f_0 U$	$f_0 W$	$\frac{UW}{a}$	$\frac{U^2}{a}$	$\frac{\delta P}{\rho L}$	$\frac{vU}{H^2}$
(m s^{-2})	10^{-4}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-12}

Οι όροι της τριβής θεωρούνται αμελητέοι για συνοπτικές κινήσεις (παίζουν ρόλο μόνο για κινήσεις κοντά στο έδαφος)

Ανάλυση κλίμακας των οριζόντιων εξισώσεων κίνησης

$$\begin{aligned} U &\sim 10 \text{ m s}^{-1} \\ W &\sim 1 \text{ cm s}^{-1} \\ L &\sim 10^6 \text{ m} \\ H &\sim 10^4 \text{ m} \\ \delta P / \rho &\sim 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \\ L/U &\sim 10^5 \text{ s} \\ f_0 &\cong 10^{-4} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

	A	B	C	D	E	F	G
$x - \text{Eq.}$	$\frac{Du}{Dt}$	$-2\Omega v \sin \phi$	$+2\Omega w \cos \phi$	$+\frac{uw}{a}$	$-\frac{uv \tan \phi}{a}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$	$+F_{rx}$
$y - \text{Eq.}$	$\frac{Dv}{Dt}$	$+2\Omega u \sin \phi$		$+\frac{vw}{a}$	$+\frac{u^2 \tan \phi}{a}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$	$+F_{ry}$
Scales	U^2/L	$f_0 U$	$f_0 W$	$\frac{UW}{a}$	$\frac{U^2}{a}$	$\frac{\delta P}{\rho L}$	$\frac{vU}{H^2}$
(m s^{-2})	10^{-4}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-12}



Οι όροι καμπυλότητας έχουν επίσης πολύ μικρή τάξη μεγέθους

Ανάλυση κλίμακας των οριζόντιων εξισώσεων κίνησης

$$\begin{aligned} U &\sim 10 \text{ m s}^{-1} \\ W &\sim 1 \text{ cm s}^{-1} \\ L &\sim 10^6 \text{ m} \\ H &\sim 10^4 \text{ m} \\ \delta P / \rho &\sim 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \\ L/U &\sim 10^5 \text{ s} \\ f_0 &\cong 10^{-4} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

	A	B	C	D	E	F	G
$x - \text{Eq.}$	$\frac{Du}{Dt}$	$-2\Omega v \sin \phi$	$+2\Omega w \cos \phi$	$+\frac{uw}{a}$	$-\frac{uv \tan \phi}{a}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$	$+F_{rx}$
$y - \text{Eq.}$	$\frac{Dv}{Dt}$	$+2\Omega u \sin \phi$		$+\frac{vw}{a}$	$+\frac{u^2 \tan \phi}{a}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$	$+F_{ry}$
Scales	U^2/L	$f_0 U$	$f_0 W$	$\frac{UW}{a}$	$\frac{U^2}{a}$	$\frac{\delta P}{\rho L}$	$\frac{vU}{H^2}$
(m s^{-2})	10^{-4}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-12}



Η κατακόρυφη συνιστώσα
της δύναμης Coriolis
θεωρείται αμελητέα

Ανάλυση κλίμακας των οριζόντιων εξισώσεων κίνησης

$$\begin{aligned} U &\sim 10 \text{ m s}^{-1} \\ W &\sim 1 \text{ cm s}^{-1} \\ L &\sim 10^6 \text{ m} \\ H &\sim 10^4 \text{ m} \\ \delta P / \rho &\sim 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \\ L/U &\sim 10^5 \text{ s} \\ f_0 &\cong 10^{-4} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

	A	B	C	D	E	F	G
$x - \text{Eq.}$	$\frac{Du}{Dt}$	$-2\Omega v \sin \phi$	$+2\Omega w \cos \phi$	$+\frac{uw}{a}$	$-\frac{uv \tan \phi}{a}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$	$+F_{rx}$
$y - \text{Eq.}$	$\frac{Dv}{Dt}$	$+2\Omega u \sin \phi$		$+\frac{vw}{a}$	$+\frac{u^2 \tan \phi}{a}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$	$+F_{ry}$
Scales	U^2/L	$f_0 U$	$f_0 W$	$\frac{UW}{a}$	$\frac{U^2}{a}$	$\frac{\delta P}{\rho L}$	$\frac{vU}{H^2}$
(m s^{-2})	10^{-4}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-12}

Οι οριζόντιες συνιστώσες της δύναμης Coriolis και οι οριζόντιες συνιστώσες της δύναμης βαροβαθμίδας έχουν ίδια τάξη μεγέθους

Από αυτή τη θεώρηση προκύπτει η γεωστροφική ισορροπία

Ανάλυση κλίμακας της κατακόρυφης εξίσωσης κίνησης

Συνοπτική κλίμακα

$$\begin{aligned} U &\sim 10 \text{ m s}^{-1} \\ W &\sim 1 \text{ cm s}^{-1} \\ L &\sim 10^6 \text{ m} \\ H &\sim 10^4 \text{ m} \\ \delta P / \rho &\sim 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \\ L/U &\sim 10^5 \text{ s} \\ f_0 &\cong 10^{-4} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

	A	B	Γ	Δ	Ε
	dw/dt	$\frac{u^2+v^2}{R}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}$	$2\Omega \sin \phi$	g
Διαστάσεις	UW/L	U^2/R	$\Delta P/\rho H$	fU	g
Συνοπτική Κλίμακα (m/s^2)	10^{-7}	10^{-5}	10^{-1} Δύναμη βαροβαθμίδας	10^{-3}	10 Ενεργός βαρύτητα

Η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης βαροβαθμίδας και η ενεργός βαρύτητα έχουν ίδια τάξη μεγέθους

Από αυτή τη θεώρηση προκύπτει η υδροστατική ισορροπία

Απλοποιημένες εξισώσεις κίνησης στην ελεύθερη τροπόσφαιρα

$$\begin{aligned}
 \text{Διεύθυνση } \hat{i}: \quad & \frac{du}{dt} - \cancel{\frac{uv \tan \varphi}{\alpha}} + \cancel{\frac{uv}{\alpha}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + K \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} + 2\Omega v \sin \varphi - 2\Omega w \cancel{\cos \varphi} \\
 \text{Διεύθυνση } \hat{j}: \quad & \frac{dv}{dt} + \cancel{\frac{u^2 \tan \varphi}{\alpha}} + \cancel{\frac{uv}{\alpha}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + K \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}} - 2\Omega u \sin \varphi \\
 \text{Διεύθυνση } \hat{k}: \quad & \cancel{\frac{dw}{dt}} - \cancel{\frac{u^2 + v^2}{\alpha}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega \cancel{w \cos \varphi} - g
 \end{aligned}$$

Εξισώσεις κίνησης μέσα στο ατμοσφαιρικό οριακό στρώμα

$$\begin{aligned}
 \text{Διεύθυνση } \hat{i}: \quad & \frac{du}{dt} - \cancel{\frac{uv \tan \varphi}{\alpha}} + \cancel{\frac{uv}{\alpha}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\Omega v \sin \varphi - 2\Omega w \cancel{\cos \varphi} \\
 \text{Διεύθυνση } \hat{j}: \quad & \frac{dv}{dt} + \cancel{\frac{u^2 \tan \varphi}{\alpha}} + \cancel{\frac{uv}{\alpha}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + K \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2\Omega u \sin \varphi \\
 \text{Διεύθυνση } \hat{k}: \quad & \cancel{\frac{dw}{dt}} - \cancel{\frac{u^2 + v^2}{\alpha}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega \cancel{w \cos \varphi} - g
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Με τη βοήθεια της ανάλυσης κλίμακας, καθορίστε ποιες απλουστεύσεις μπορούν να γίνουν στις εξισώσεις της κίνησης για ένα σύστημα που χαρακτηρίζεται από τα εξής μεγέθη: $L=100$ km, $U=50$ m/s, $\Delta P=40$ hPa, $W=1$ m/s, $H=10$ km, $f=0.5 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Η τριβή και η καμπυλότητα της γης θεωρούνται αμελητέες.

Γεωστροφική ισορροπία - Γεωστροφικός άνεμος

Για συνοπτικές κινήσεις σε μέσα γεωγραφικά πλάτη
Η δύναμη **Coriolis** και η δύναμη **βαροβαθμίδας**
βρίσκονται σχεδόν σε ισορροπία

$$f \equiv 2\Omega \sin \phi$$

(Παράμετρος Coriolis)

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \phi}{\alpha} + \frac{uw}{\alpha} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + 2\Omega v \sin \phi - 2\Omega w \cos \phi + F_{rx}$$

$$-f v_g \cong -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{\alpha} + \frac{vw}{\alpha} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - 2\Omega u \sin \phi + F_{ry}$$

$$+f u_g \cong -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}$$

Γεωστροφική ισορροπία

Είναι **διαγνωστική εξίσωση** (όχι προγνωστική) γιατί δεν περιέχει τον χρόνο και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για πρόγνωση ανέμου.

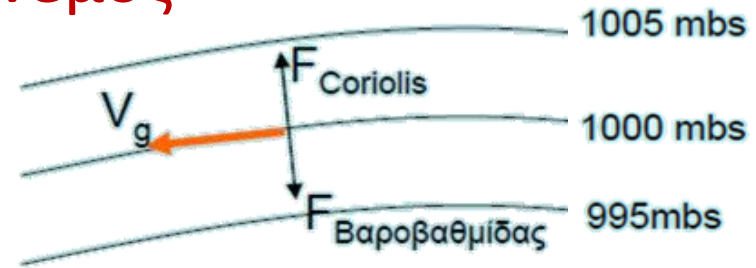
Πότε ισχύει?

- Η κίνηση είναι οριζόντια (δεν υπάρχει κατακόρυφη κίνηση)
- Οι ισοβαρείς είναι ευθείες γραμμές (δεν υπάρχει καμπυλότητα) αφού δεν υπάρχει επιτάχυνση
- Η κίνηση γίνεται στα μέσα γεωγραφικά πλάτη
- Δεν υπάρχει τριβή

Ορίζουμε ως **γεωστροφικό άνεμο** το πεδίο των ταχυτήτων που ικανοποιεί τις εξισώσεις της γεωστροφικής ισορροπίας

Γεωστροφικός άνεμος

Ο γεωστροφικός άνεμος πνέει παράλληλα στις ισοβαρείς έχοντας στα αριστερά του τις χαμηλές πιέσεις στο **B. ημισφαίριο**



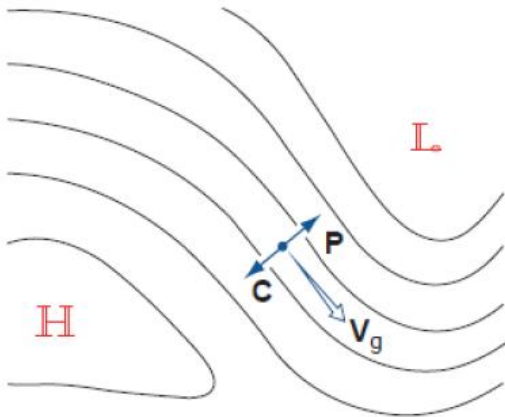
Γιατί?

- Η δύναμη βαροβαθμίδας είναι κάθετη στις ισοβαρείς και διευθύνεται από τις υψηλές προς τις χαμηλές πιέσεις
- Άρα για να ισορροπούν θα πρέπει και η δύναμη Coriolis να είναι και αυτή κάθετη στις ισοβαρείς αλλά με αντίθετη κατεύθυνση
- Ο άνεμος είναι κάθετος στην δύναμη Coriolis και στα αριστερά της

Γεωστροφικός άνεμος

Γιατί χρησιμοποιούμε τον γεωστροφικό άνεμο?

- Γνωρίζοντας μόνο το πεδίο της πίεσης μπορούμε να καθορίσουμε τον γεωστροφικό άνεμο
- Ο γεωστροφικός άνεμος προσεγγίζει τον πραγματικό οριζόντιο άνεμο με ακρίβεια 10-15% στα μέσα γεωγραφικά πλάτη

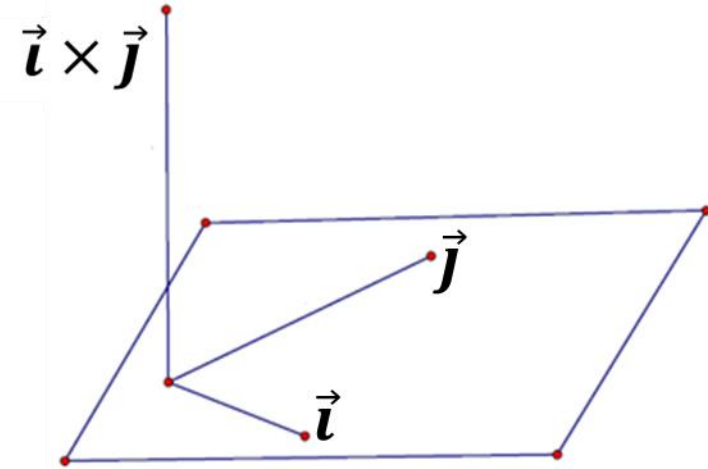


Γεωστροφικός άνεμος

Σε διανυσματική μορφή

$$\vec{V}_g = \frac{1}{\rho f} \vec{k} \times \vec{\nabla}_h P$$

Γιατί $\vec{k} \times \vec{\nabla}_h P$??



$$\vec{k} \times \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} \right) = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{k} \times \vec{i} \right) + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \vec{k} \times \vec{j} \right) = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{j} \right) - \left(\frac{\partial p}{\partial y} \vec{i} \right)$$

$$\text{Όπου } \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \text{ και } \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

Γεωστροφικός άνεμος

Εκφράσεις του γεωστροφικού ανέμου σε ισοβαρικές συντεταγμένες (λεπτομέρειες και απόδειξη σε επόμενο μάθημα)

$$u_g = -\frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$v_g = \frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

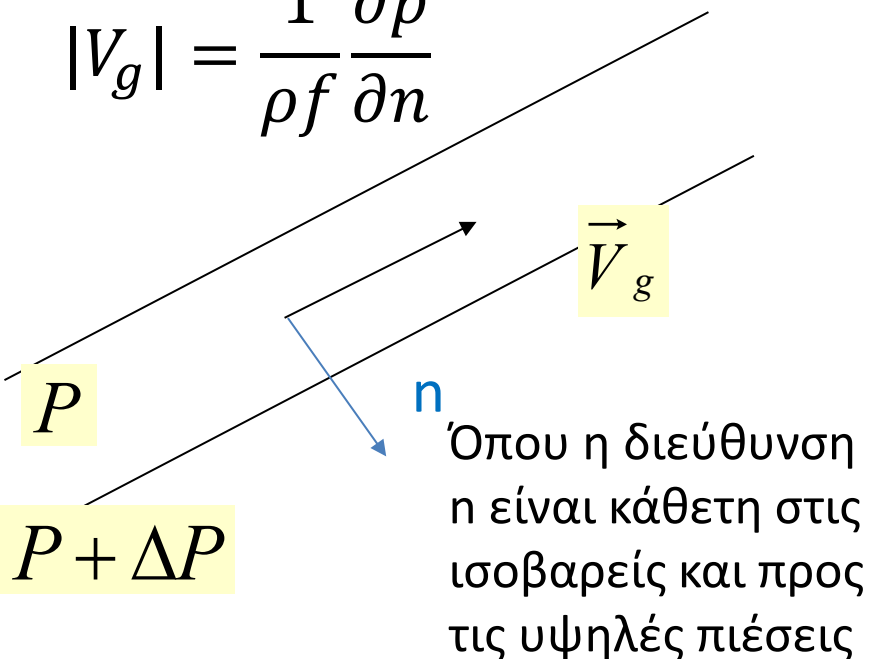
$$\mathbf{V}_g \equiv \frac{1}{f} (\mathbf{k} \times \nabla \Phi)$$

Οι σχέσεις αυτές δεν περιέχουν την πυκνότητα ρ

Γεωστροφικός άνεμος

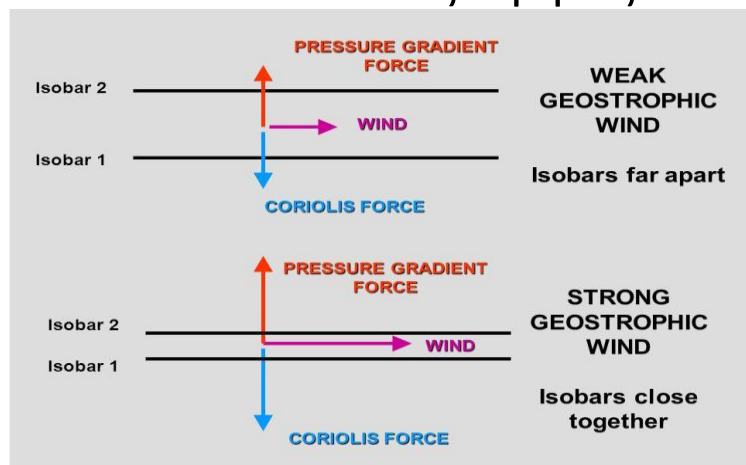
Σε φυσικό σύστημα συντεταγμένων

$$|V_g| = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial n}$$



• Το μέτρο του γεωστροφικού ανέμου είναι ανάλογο της βαθμίδας της πίεσης και αντιστρόφως ανάλογο του γεωγραφικού πλάτους ϕ .

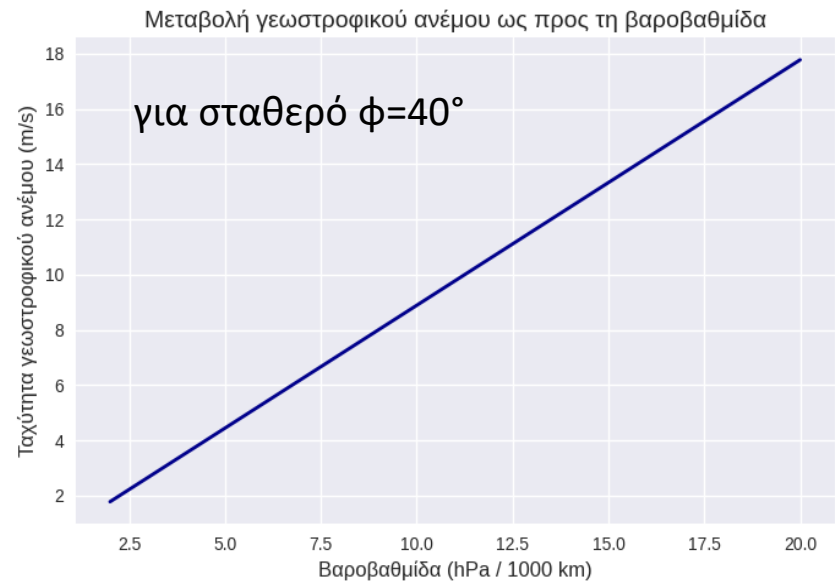
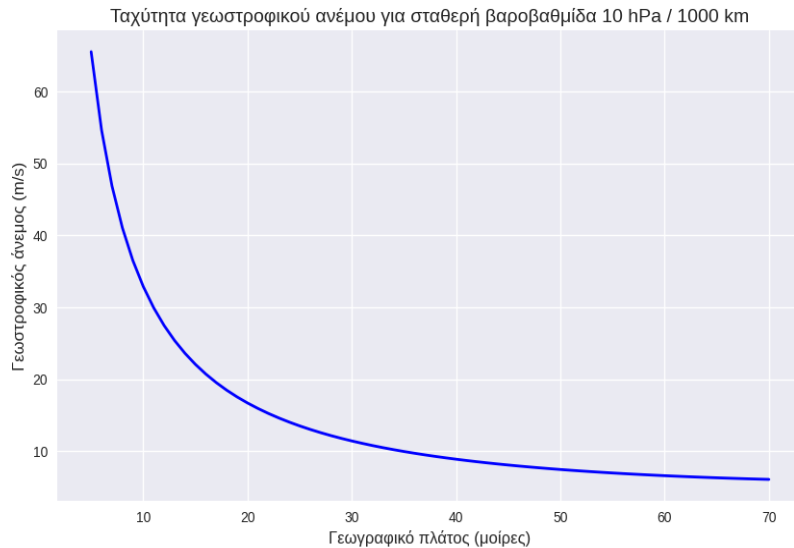
- για συγκεκριμένη απόσταση μεταξύ των ισοβαρών η ταχύτητα του γεωστροφικού ανέμου θα είναι διαφορετική για διαφορετικά γεωγραφικά πλάτη
- Για συγκεκριμένο ϕ , όσο μικρότερη η απόσταση μεταξύ των ισοβαρών τόσο μεγαλύτερη η ταχύτητα του γεωστροφικού ανέμου
- Στον ισημερινό ($\phi=0$) δεν ισχύει η γεωστροφική ισορροπία



Μεταβολή του γεωστροφικού ανέμου με το γεωγραφικό πλάτος

$$|V_g| = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial n}$$

Όσο αυξάνει το ϕ , αυξάνει το f , οπότε για την ίδια βαροβαθμίδα μειώνεται και η ταχύτητα του γεωστροφικού ανέμου.



Γιατί όμως στην πράξη οι άνεμοι είναι ισχυρότεροι στα μεγάλα πλάτη;

Επειδή η βαροβαθμίδα είναι πολύ μεγαλύτερη, λόγω μεγαλύτερων θερμοβαθμίδων. Άρα η πραγματική ταχύτητα ανέμου αυξάνει, όχι λόγω του f , αλλά λόγω της μεγαλύτερης βαροβαθμίδας.

Σε μια γεωστροφική ροή το πεδίο της πίεσης περιγράφεται από την σχέση $P = P_0 - \rho f(x+y)$ όπου η πυκνότητα ρ και η παράμετρος Coriolis f θεωρούνται σταθερές. Να βρεθεί το μέτρο και η διεύθυνση του γεωστροφικού ανέμου.

Λύση

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho f$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho f$$

$$u_g = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow u_g = -\frac{1}{\rho f} (-\rho f) = 1$$

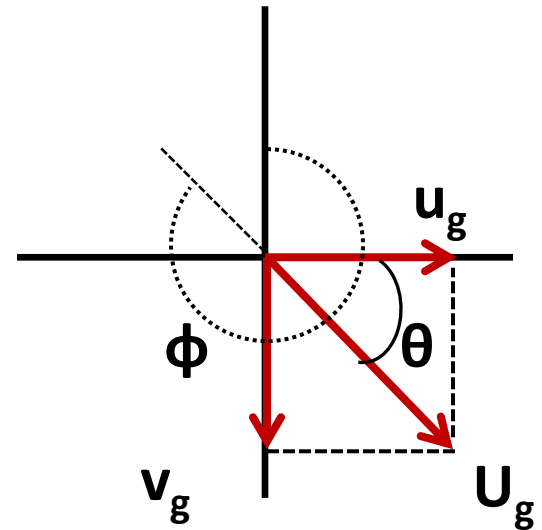
$$v_g = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial P}{\partial x} \Rightarrow v_g = \frac{1}{\rho f} (-\rho f) = -1$$

$$U_g = \sqrt{u_g^2 + v_g^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan \theta = \frac{v_g}{u_g} = -\frac{1}{1} = -1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

Η μετεωρολογική διεύθυνση

$$\phi = 270^\circ + \theta = 315^\circ$$



Προγνωστικές εξισώσεις

Προκειμένου να διατηρηθεί η παράμετρος του χρόνου στην εξίσωση κίνησης είναι απαραίτητο να διατηρηθούν οι όροι της επιτάχυνσης

$$\frac{du}{dt} = fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{dv}{dt} = -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

Αλλά από τις συνιστώσες του γεωστροφικού ανέμου έχουμε:

$$v_g = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f v_g \quad u_g = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y} \rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -f u_g$$

Και αντικαθιστώντας προκύπτει για τις συνιστώσες της επιτάχυνσης

$$\frac{du}{dt} = f(v - v_g)$$

$$\frac{dv}{dt} = -f(u - u_g)$$

Η επιτάχυνση είναι ανάλογη της μικρής διαφοράς μεταξύ δύο μεγάλων όρων (του πραγματικού και του γεωστροφικού ανέμου)

Αριθμός Rossby

Αριθμός Rossby: Αδιάστατος αριθμός που εκτιμά αν ισχύει η γεωστροφική ισορροπία ή όχι

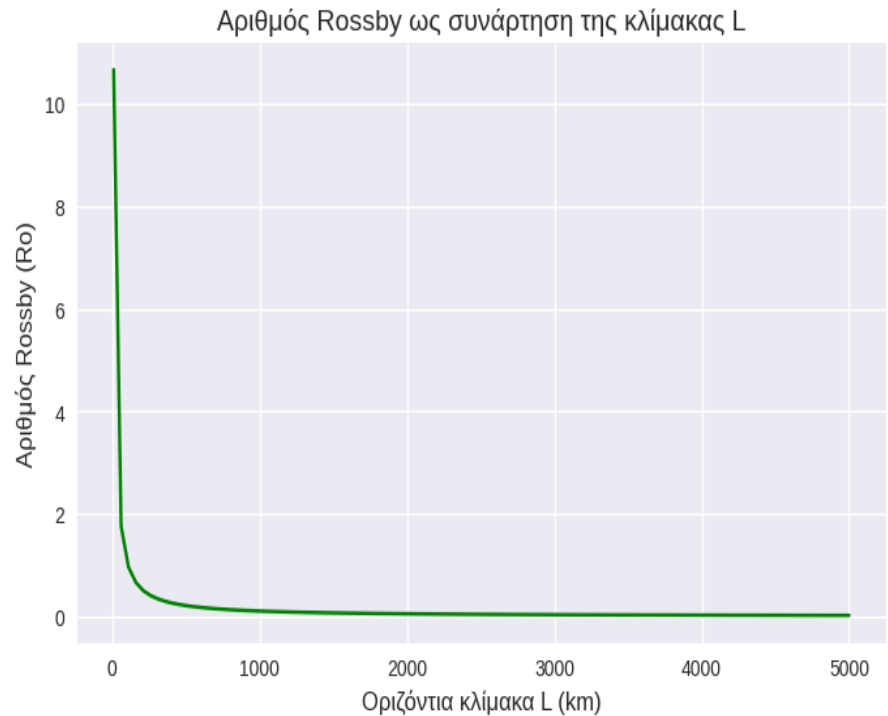
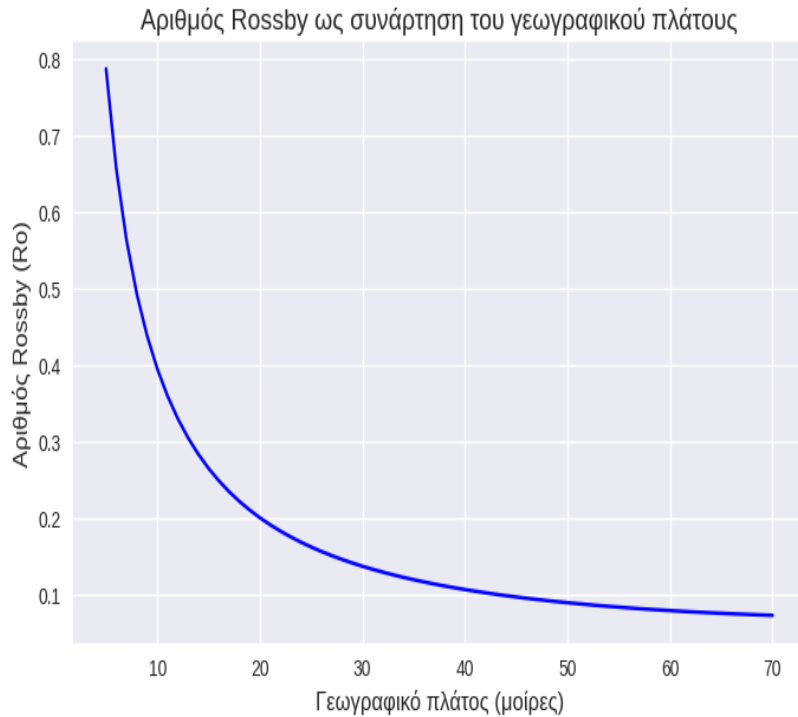
$$Ro = \frac{\text{πραγματική επιταχυνση (αδρανεια)}}{\text{Coriolis δυναμη}} = \frac{\frac{dV}{dt}}{fV} = \frac{\frac{V^2}{L}}{fV} = \frac{U}{fL}$$

U= κλίμακα ταχύτητα της ροής, L=οριζόντια κλίμακα, f=κλίμακα Coriolis παραμέτρου

Όταν $fV \gg \frac{dV}{dt}$	$Ro \rightarrow 0$	Κυριαρχεί η Coriolis δύναμη και ισχύει η γεωστροφική ισορροπία (πχ υφέσεις, αντικυκλώνες)
Όταν $fV \sim \frac{dV}{dt}$	$Ro \rightarrow 1$	Η Coriolis δύναμη συγκρίσιμη με την επιτάχυνση Δεν ισχύει γεωστροφική ισορροπία (ημιγεωστροφία) πχ μέτωπα
Όταν $fV \ll \frac{dV}{dt}$	$Ro \gg 1$	Κυριαρχεί η επιταχυνση και η Coriolis δύναμη είναι αμελητέα. Δεν ισχύει η γεωστροφική ισορροπία (πχ καταιγίδες, ανεμοστρόβιλοι)

Η γεωστροφική προσέγγιση ισχύει με μεγαλύτερη ακρίβεια όσο μικρότερος είναι ο αριθμός Rossby.

Αριθμός Rossby



Για σταθερή ταχύτητα και
οριζόντια κλίμακα
 $U = 10 \text{ m/s}$ $L = 1000 \text{ km}$

Για σταθερή ταχύτητα και γεωγραφικό
πλάτος
 $U = 10 \text{ m/s}$ $\phi = 40^\circ$

Γιατί είναι σημαντικός ο αριθμός Rossby??

Ο Ro καθορίζει:

✓ Τον τύπο ισορροπίας της ροής

- $Ro \ll 1 \rightarrow$ γεωστροφική ισορροπία
- $Ro \sim 1 \rightarrow$ δύναμη βαροβαθμίδας + Coriolis + επιτάχυνση (που οφείλεται σε άλλες δυνάμεις)
- $Ro \gg 1 \rightarrow$ σχεδόν καθαρή αδρανειακή ροή

✓ Τον τύπο των εξισώσεων που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

- $Ro \ll 1 \rightarrow$ απλοποιημένες εξισώσεις (γεωστροφική προσέγγιση)
- $Ro \sim 1 \rightarrow$ πλήρεις εξισώσεις Navier–Stokes
- $Ro \gg 1 \rightarrow$ εξισώσεις χωρίς Coriolis

✓ Τη δυναμική των συστημάτων

- Μεγάλα συστήματα $\rightarrow$ μικρό Ro
- Μικρά συστήματα $\rightarrow$ μεγάλο Ro

Παράδειγμα υπολογισμού Ro

Trough (ανοιχτό κυκλωνικό σύστημα)

$$U = 10 \text{ m/s}, L = 1000 \text{ km}, \phi = 45^\circ \rightarrow f \approx 10^{-1} \text{ sec}^{-1}$$

$$Ro = \frac{U}{fL} = 0,1$$

Συμπέρασμα: Η trough έχει $Ro < 1 \rightarrow$ ισχύει η γεωστροφική προσέγγιση

καταιγίδα

$$U = 15 \text{ m/s}, L = 20 \text{ km}, \phi = 45^\circ \rightarrow f \approx 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$$

$$Ro = \frac{U}{fL} = 7,5$$

Συμπέρασμα: Η καταιγίδα έχει $Ro \gg 1 \rightarrow$ η Coriolis είναι αμελητέα. Δεν ισχύει η γεωστροφική προσέγγιση