

## Εξίσωση συνέχειας

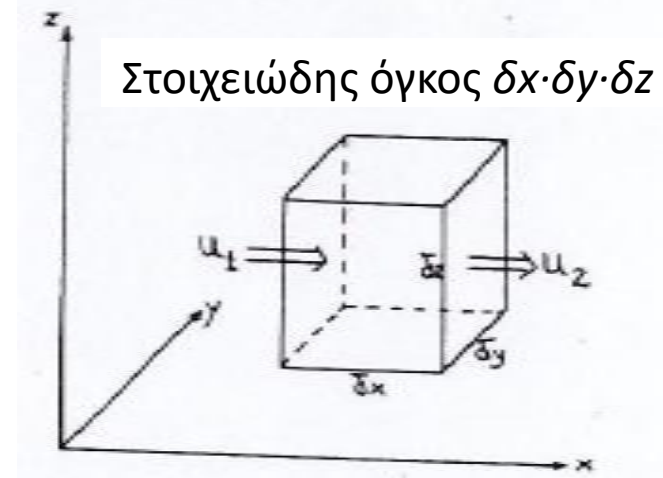
Από την εξίσωση της κίνησης στην κατακόρυφη κίνηση δεν μπορούν να εξαχθούν κάποια συμπεράσματα για τη συνοπτική κλίμακα, καθώς ισχύει η υδροστατική ισορροπία

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{\alpha} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g + 2\Omega u \cos \varphi + F_{rz}$$

Επομένως, είναι ανάγκη να θεωρήσουμε μια πρόσθετη βασική αρχή, αυτή της διατήρησης της μάζας ή της εξίσωσης συνέχειας που συσχετίζει τα πεδία της οριζόντιας και της κατακόρυφης κίνησης

Θεωρητικά από την εξίσωση της συνέχειας μπορεί να εξαχθεί το πεδίο της κατακόρυφης κίνησης όταν είναι γνωστό το πεδίο της οριζόντιας κίνησης. Στην πράξη υπάρχουν δυσκολίες στον υπολογισμό αυτό

Η διατήρηση της μάζας συσχετίζει τα πεδία της οριζόντιας και της κατακόρυφης κίνησης



## Εξίσωση συνέχειας

Ο ρυθμός με τον οποίο εισέρχεται μια μάζα ρευστού μέσα σε ένα συγκεκριμένο όγκο είναι ίσος με τον ρυθμό με το οποίο εξέρχεται συν την τυχόν μεταβολή της μάζας μέσα στον όγκο.

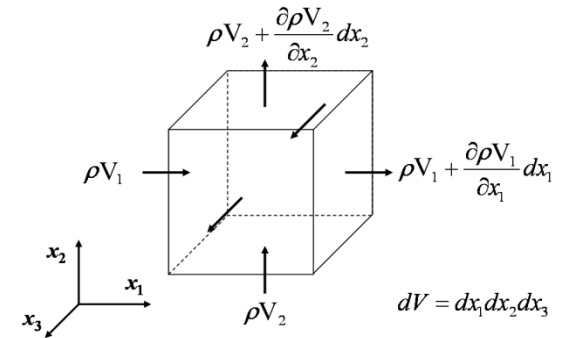
$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{V} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = D \quad (\text{απόκλιση της ταχύτητας})$$

Η εξίσωση (1) δείχνει ότι η κλασματική ταχύτητα αύξησης της πυκνότητας κατά μήκος της ροής (κατά Lagrange) είναι ίση με το μείον της απόκλισης της ταχύτητας.

Η εξίσωση (2) δηλώνει ότι ο ρυθμός μεταβολής της πυκνότητας είναι ίσος με το μείον της απόκλισης της μάζας.



## Απόκλιση-Σύγκλιση

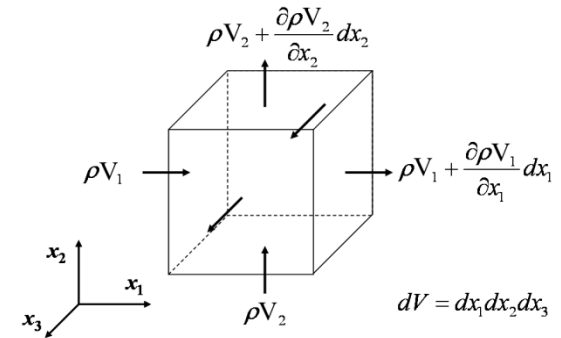
Όταν  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} > 0$  (απόκλιση): περισσότερα σωμάτια βγαίνουν από ότι μπαίνουν στον όγκο και η πυκνότητα του δεδομένου όγκου ελαττώνεται  $\frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$

όταν  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} < 0$  (σύγκλιση): περισσότερα σωμάτια μπαίνουν από ότι βγαίνουν από τον όγκο και η πυκνότητα του δεδομένου όγκου αυξάνει  $\frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$

# Εξίσωση συνέχειας

Για ασυμπίεστο ρευστό (πυκνότητα σταθερή)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$



$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -D$$

Οριζόντια Απόκλιση – Σύγκλιση  
(divergence – convergence)

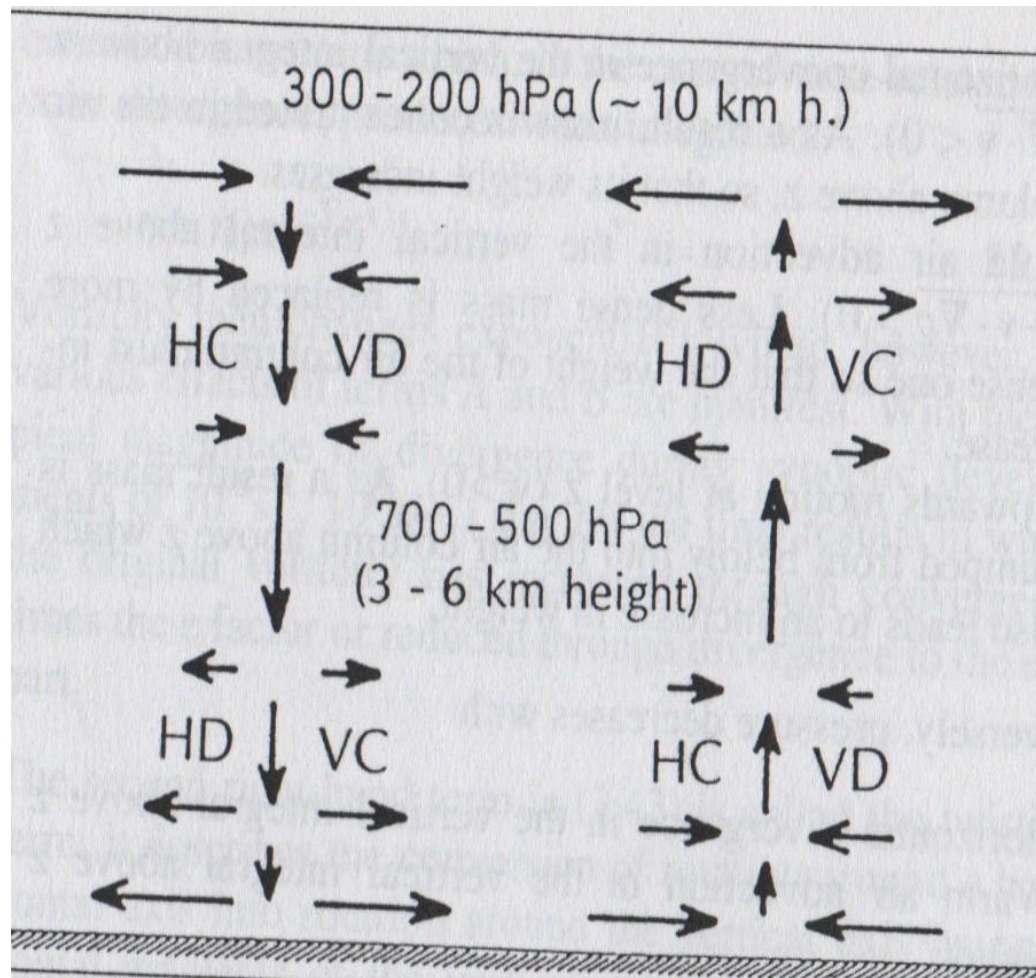
$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$D \propto -w$$

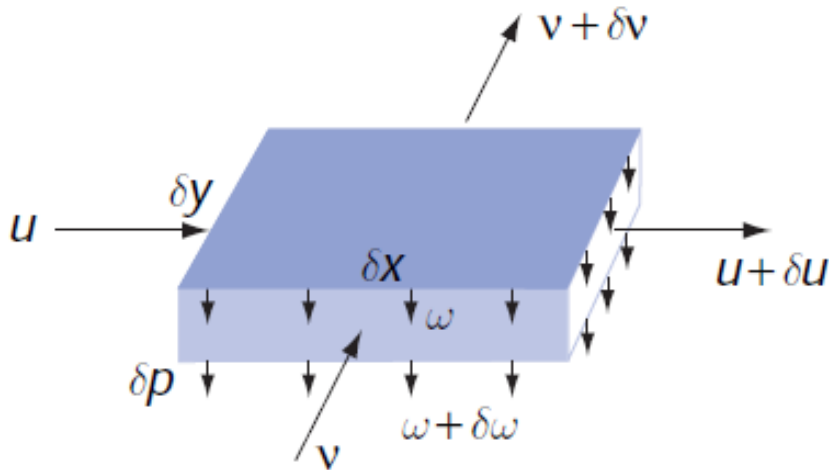
Όταν  $D > 0$  τότε  $w < 0$  κάθοδος  
Όταν  $D < 0$  τότε  $w > 0$  άνοδος

$\frac{\partial w}{\partial z}$  = κατακόρυφη απόκλιση ( $> 0$ )  
ή σύγκλιση ( $< 0$ )

Η οριζόντια σύγκλιση πρέπει να αντισταθμίζεται από κατακόρυφη σύγκλιση ενώ η οριζόντια απόκλιση πρέπει να αντισταθμίζεται από κατακόρυφη σύγκλιση



# Εξίσωση συνέχειας σε ισοβαρικές συντεταγμένες



Για στοιχειώδη όγκο  $\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$  και για ατμόσφαιρα σε υδροστατική ισορροπία η στοιχειώδης μάζα είναι:

$$\delta M = \rho \delta x \delta y \delta z = \frac{-\delta x \delta y \delta p}{g}$$

Και λόγω διατήρησης της μάζας:

$$\frac{d}{dt} (\delta x \delta y \delta p) = 0$$

$$\delta y \delta p \frac{d}{dt} \delta x + \delta x \delta p \frac{d}{dt} \delta y + \delta x \delta y \frac{d}{dt} \delta p = 0.$$

όπου  $\omega = \frac{dp}{dt}$  η

κατακόρυφη ταχύτητα  
σε ισοβαρικές  
συντεταγμένες

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_p + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = -(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})_p$$

ή διαφορετικά

## Κατακόρυφη ταχύτητα σε ισοβαρικές συντεταγμένες

$$\omega = \frac{dp}{dt}$$

Μονάδα: Pa/sec ή  
kPa/day

Σύνδεση με την κατακόρυφη ταχύτητα  
σε τοπικό καρτεσιανό σύστημα (από  
την υδροστατική εξίσωση

$$\omega \cong -\rho g w$$

$$\omega \infty - W$$

$$W > 0 \rightarrow \omega < 0$$

Άνοδος

$$W < 0 \rightarrow \omega > 0$$

Κάθοδος

# Σύγκλιση - Απόκλιση

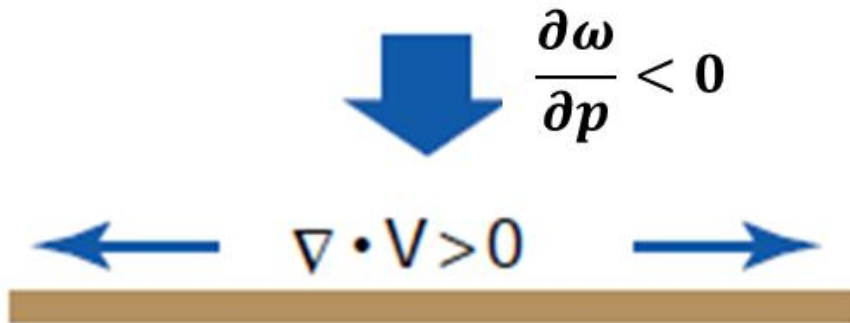
$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = -\nabla \cdot \mathbf{V}$$

## Οριζόντια απόκλιση

Οι αέριες μάζες απομακρύνονται στο οριζόντιο επίπεδο:  $\nabla \cdot \mathbf{V} > 0$

Η οριζόντια απόκλιση πρέπει να αντισταθμίζεται από κατακόρυφη

σύγκλιση:  $\frac{\partial \omega}{\partial p} < 0$   $\omega > 0$

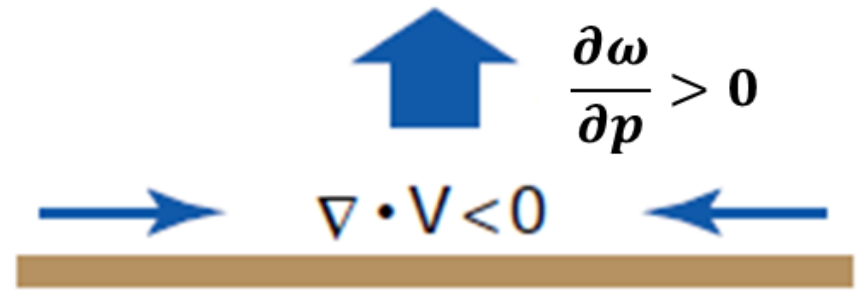


## Οριζόντια σύγκλιση

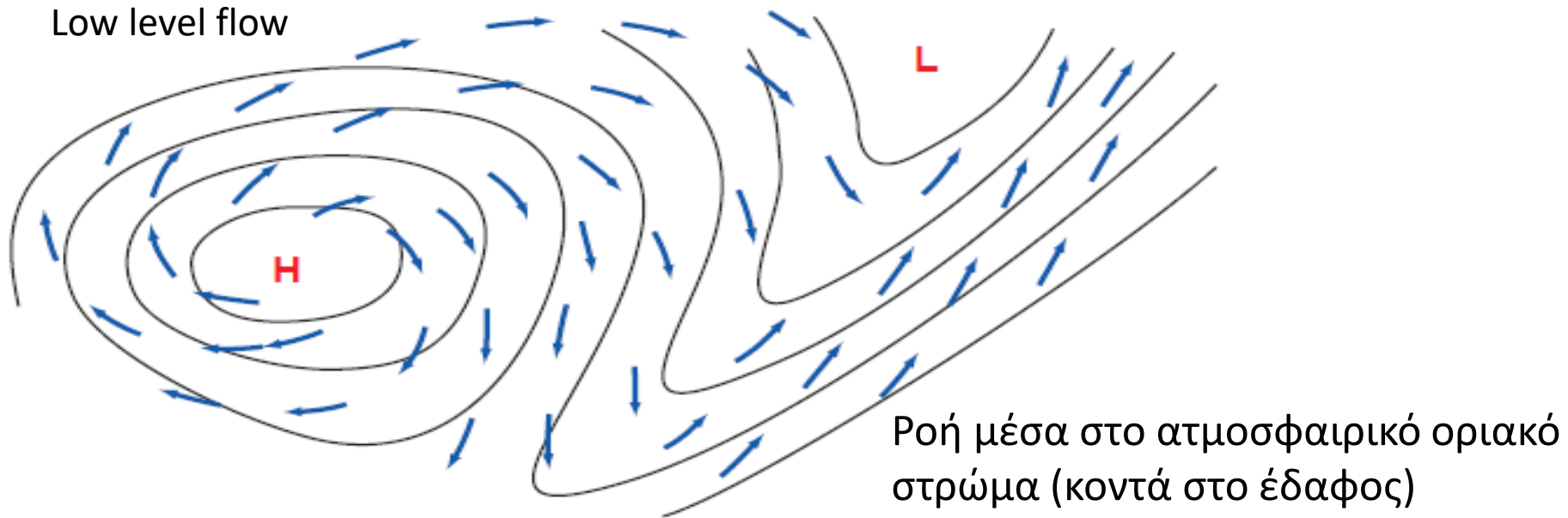
Οι αέριες μάζες συσσωρεύονται στο οριζόντιο επίπεδο:  $\nabla \cdot \mathbf{V} < 0$

Η οριζόντια σύγκλιση πρέπει να αντισταθμίζεται από κατακόρυφη

απόκλιση:  $\frac{\partial \omega}{\partial p} > 0$   $\omega < 0$



## Σύγκλιση - Απόκλιση

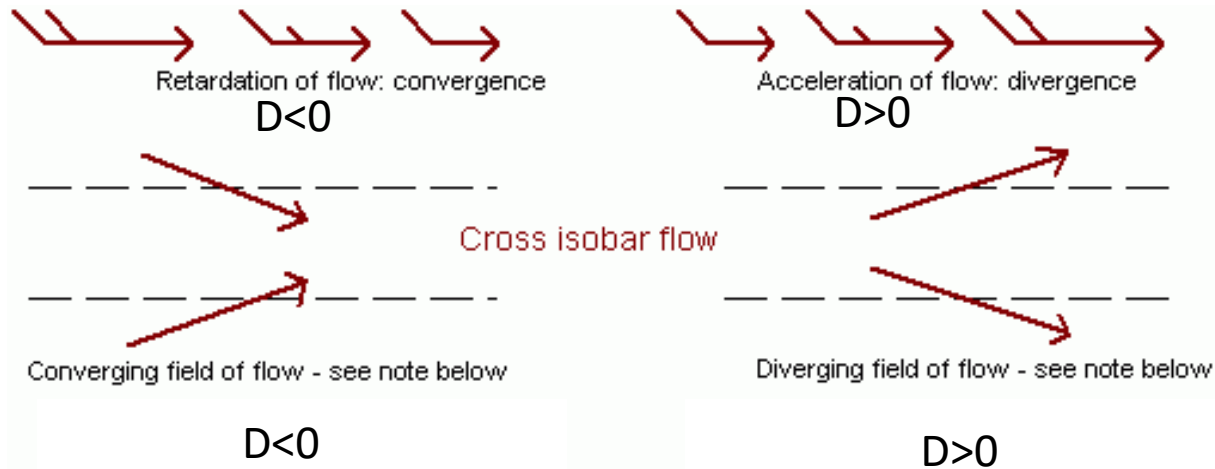


Ο άνεμος στρέφει προς τις χαμηλές πιέσεις εξαιτίας της δύναμης τριβής

Υψηλές πιέσεις – απόκλιση –  
καθοδικές κινήσεις (subsidence)

Χαμηλές πιέσεις – σύγκλιση –  
ανοδικές κινήσεις (ascent)

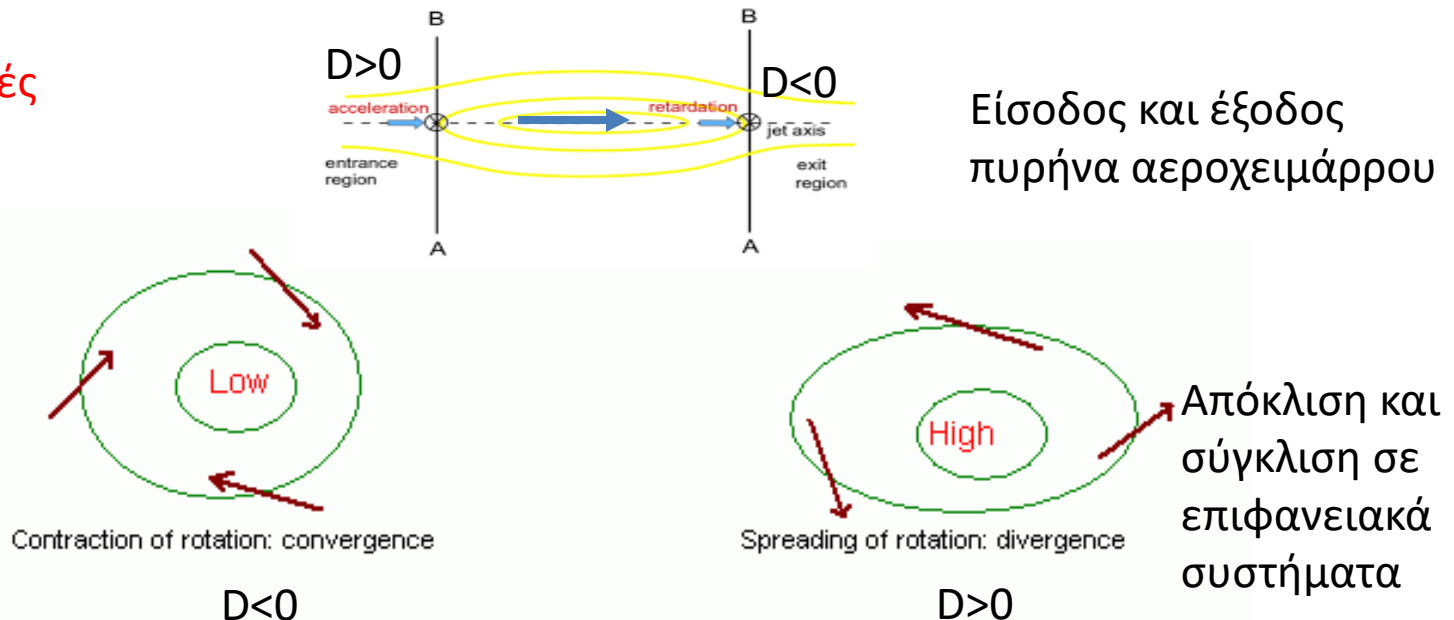
# Απόκλιση συμβαίνει όταν:



Η ταχύτητα μεταβάλλεται

Όταν η διεύθυνση μεταβάλλεται

## Εφαρμογές



Απόκλιση και σύγκλιση σε επιφανειακά συστήματα

Σύνθετη εικόνα:  
συνδυασμός απόκλισης  
λόγω ταχύτητας και λόγω  
διεύθυνσης με διαφορετικό  
πρόσημο

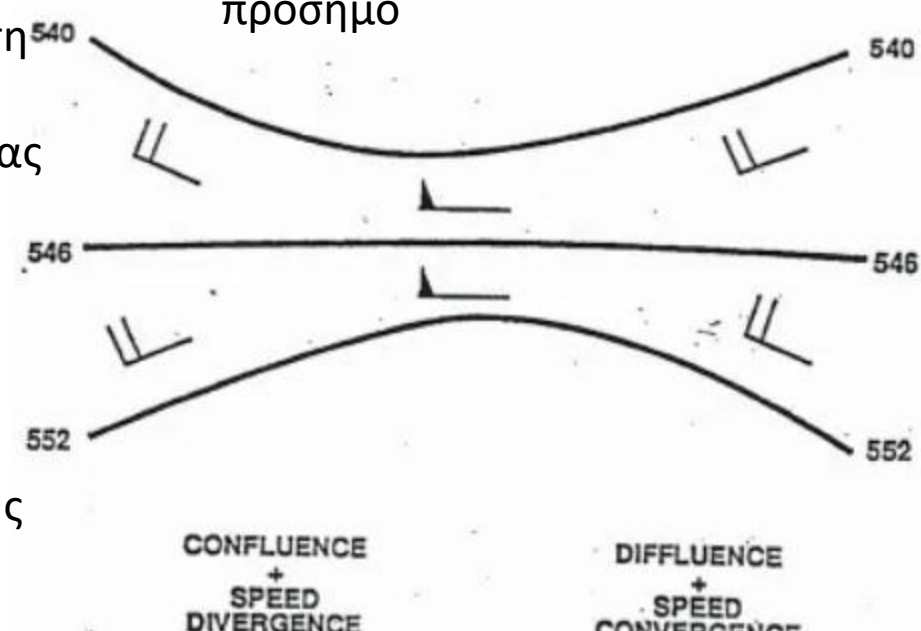
πυρήνας  
αεροχειμάρρου (jet  
streak)

Απόκλιση  
λόγω  
ταχύτητας

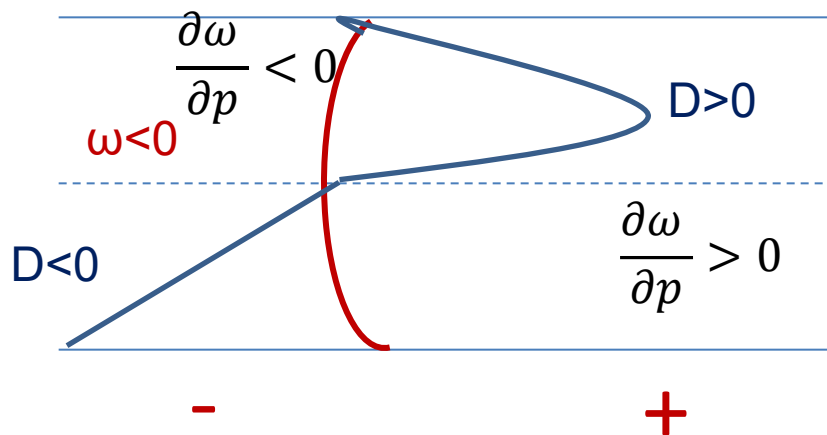
Σύγκλιση  
λόγω  
ταχύτητας

σύγκλιση  
λόγω  
διεύθυνσης

Απόκλιση  
λόγω  
διεύθυνσης



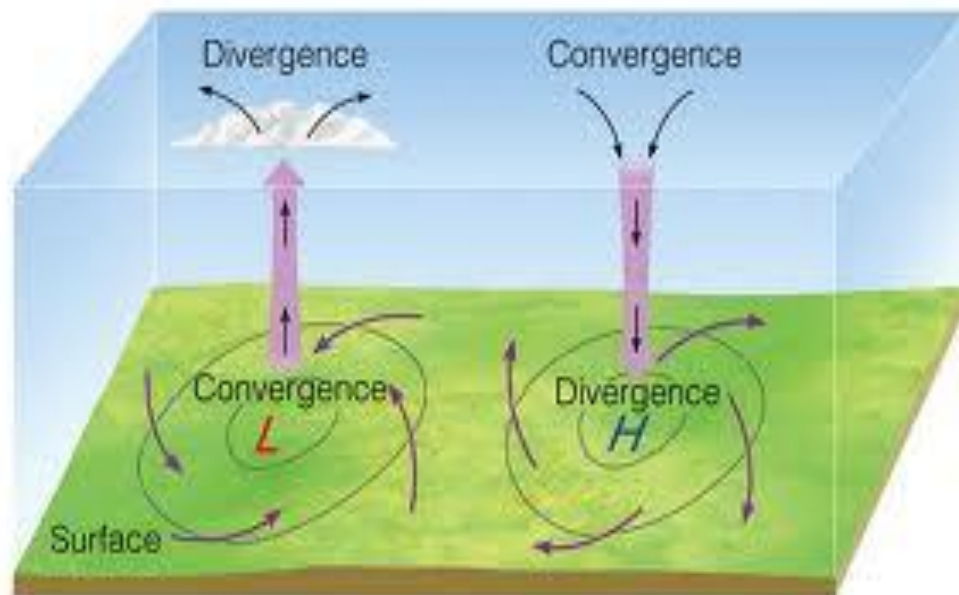
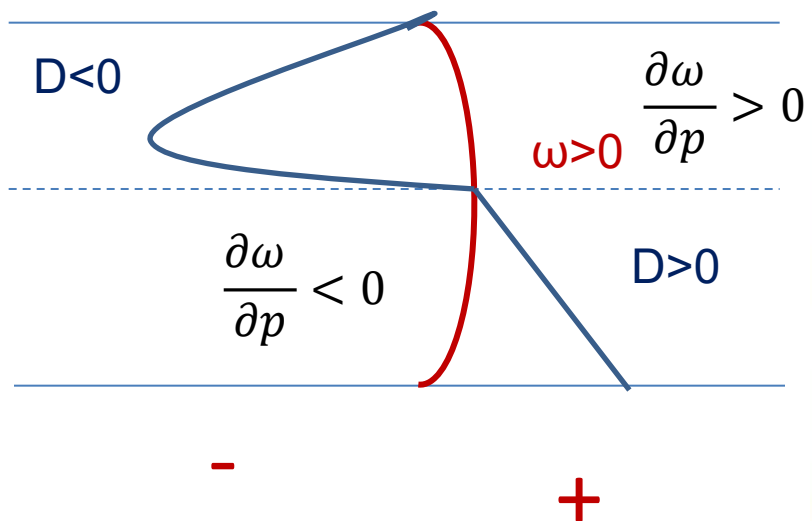
## Επιφανειακό χαμηλό



↓  $p$

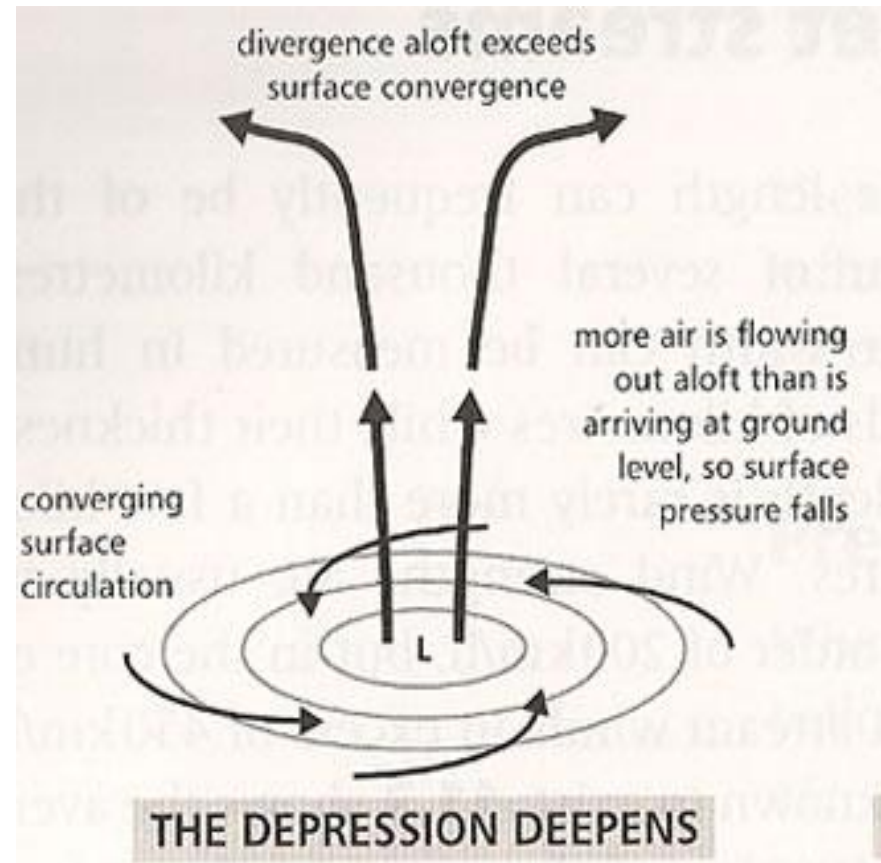
Επίπεδο μηδενικής απόκλισης  $\sim 500$  hPa

## Επιφανειακός αντικυκλώνας

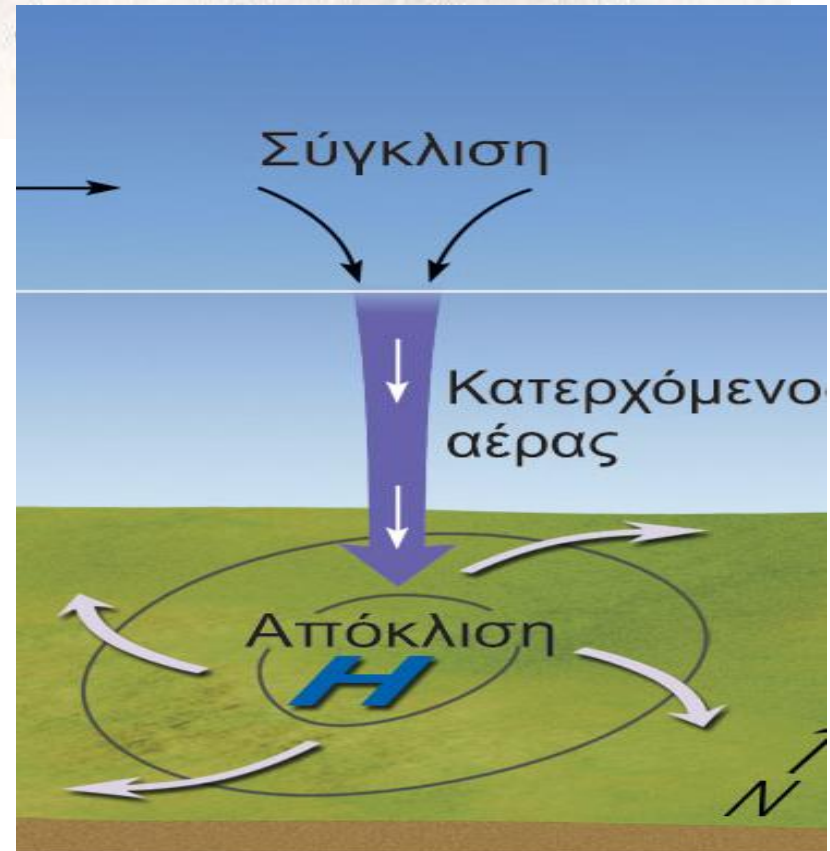


Όταν η απόκλιση D στα ανώτερα στρώματα γίνεται μεγαλύτερη από την σύγκλιση C τα κατώτερα στρώματα, σχηματίζεται το χαμηλό στην επιφάνεια

Όταν η σύγκλιση C στα ανώτερα στρώματα γίνεται μεγαλύτερη από την απόκλιση D στα κατώτερα στρώματα, σχηματίζεται αντικυκλώνας στην επιφάνεια



Η πίεση πέφτει στην επιφάνεια επειδή περισσότερος αέρας εξέρχεται από την αέρια στήλη



Η πίεση αυξάνει στην επιφάνεια επειδή περισσότερος αέρας εισέρχεται στην αέρια στήλη

## Προσέγγιση Boussinesq

- Διαφορές στην πυκνότητα θεωρούνται μικρές και μπορούν να παραληφθούν, εκτός αν εμφανίζονται σε όρους που πολλαπλασιάζονται από το  $g$ , (i.e., βαροβαθμίδα).
- Ισχύει για ένα σχεδόν ασυμπίεστο ρευστό
- Στην εξίσωση συνέχειας μπορούμε να αντικαταστήσουμε την πυκνότητα  $\rho$  από μια σταθερή τιμή  $\rho_0$ . Ωστόσο, κρατάμε τις μεταβολές του  $\rho$  στον όρο της βαροβαθμίδας στην εξίσωση της κίνησης στον άξονα  $z$ .
- Ισχύει όταν οι μεταβολές της θερμοκρασίας και της πυκνότητας είναι μικρές.

## Προσέγγιση Boussinesq

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \sim \frac{1}{T} \frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{U}{L} \frac{\delta\rho}{\rho} \ll \frac{U}{L} \sim \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$$

$$\text{Όπου } \frac{\delta\rho}{\rho} \sim 10^{-2} - 10^{-3}$$

## Παράδειγμα

Οι τιμές της οριζόντιας απόκλισης στα διάφορα επίπεδα της ατμόσφαιρας είναι:

| Πίεση (hPa) | Οριζόντια απόκλιση $\times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ |
|-------------|----------------------------------------------------|
| 1000        | +0.9                                               |
| 850         | +0.6                                               |
| 700         | +0.3                                               |
| 500         | 0                                                  |
| 300         | -0.6                                               |
| 100         | -1                                                 |

Να υπολογιστούν οι τιμές της κατακόρυφης ταχύτητας σε κάθε ένα από τα παραπάνω επίπεδες. Υποτίθεται ότι η ατμόσφαιρα είναι ισόθερμη με μέση τιμή θερμοκρασίας ίση με  $260^\circ\text{K}$  και ότι η κατακόρυφη ταχύτητα είναι 0 στα 1000 hPa

Ανεμος τριβής

**Πίνακας 1. Οι απλοποιημένες μορφές των εξισώσεων κίνησης έτσι όπως ισχύουν για την περιοχή μέσα στο οριακό στρώμα.**

|                       |                 |                                    |                      |                                                   |                                        |                           |                           |
|-----------------------|-----------------|------------------------------------|----------------------|---------------------------------------------------|----------------------------------------|---------------------------|---------------------------|
| Διεύθυνση $\hat{i}$ : | $\frac{du}{dt}$ | $-\frac{uv \tan \varphi}{\alpha}$  | $+\frac{uv}{\alpha}$ | $= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ | $+K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ | $+2\Omega v \sin \varphi$ | $-2\Omega w \cos \varphi$ |
| Διεύθυνση $\hat{j}$ : | $\frac{dv}{dt}$ | $+\frac{u^2 \tan \varphi}{\alpha}$ | $-\frac{uv}{\alpha}$ | $= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$ | $+K \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ | $-2\Omega u \sin \varphi$ |                           |
| Διεύθυνση $\hat{k}$ : | $\frac{dw}{dt}$ | $-\frac{u^2 - v^2}{\alpha}$        |                      | $= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$ |                                        | $+2\Omega w \cos \varphi$ | $-g$                      |

Αν αγνοήσουμε τους όρους της επιτάχυνσης

$K$ =συντελεστής τυρβώδους διάχυσης

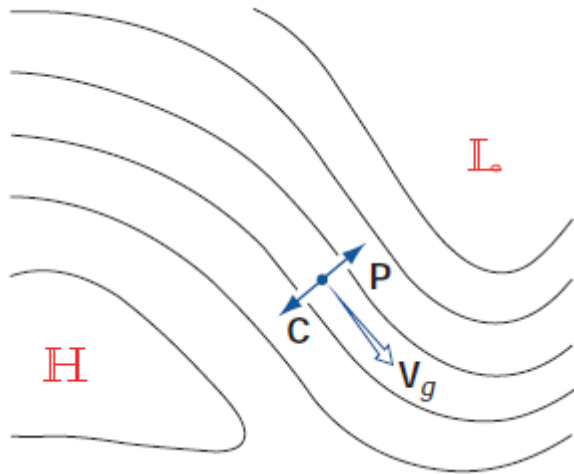
$$\text{Διεύθυνση } \hat{i}: \quad K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(v - v_g) = 0$$

$$\text{Διεύθυνση } \hat{j}: \quad K \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - f(u - u_g) = 0$$

$$u_g \equiv -\frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v_g \equiv \frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

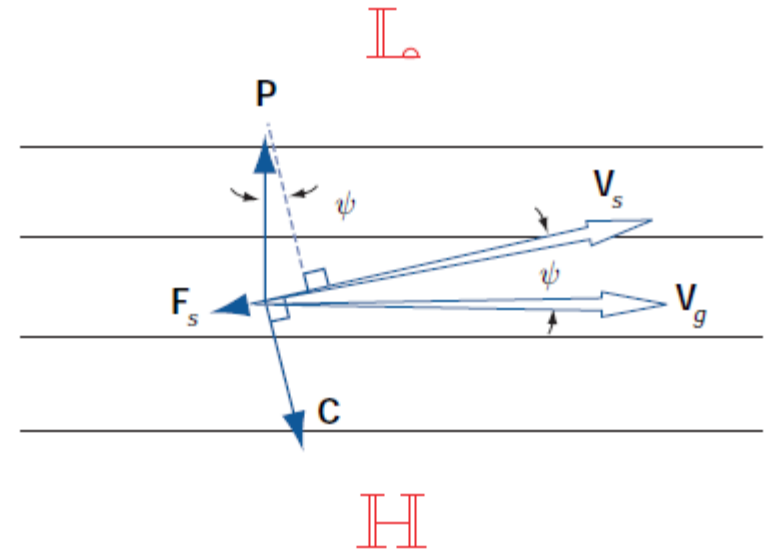
Εξισώσεις Ekman

# Οριακό στρώμα – Δύναμη τριβής



Γεωστροφική ισορροπία (Β. Ημισφαίριο)

- Πάνω από το 1km περίπου ο άνεμος θεωρείται με καλή ακρίβεια γεωστροφικός και εξαρτάται μόνο από τη δύναμη βαροβαθμίδας ( $P$ ) και την Coriolis ( $C$ ).
- Ο γεωστροφικός άνεμος πνέει έχοντας στα αριστερά του τις χαμηλές πιέσεις

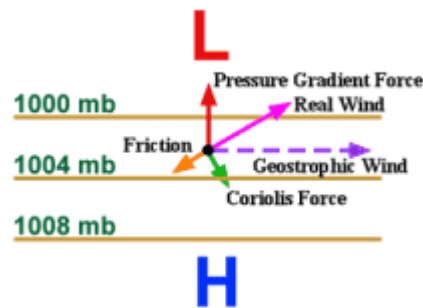
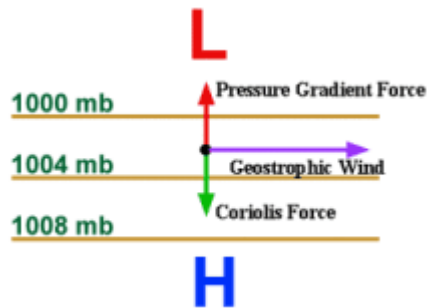


Ισορροπία τριών δυνάμεων κοντά στο έδαφος (Βαροβαθμίδα, Coriolis και τριβή), Β. Ημισφαίριο

- Κοντά στο έδαφος η δύναμη της τριβής ( $F_s$ ) δεν θεωρείται αμελητέα
- Η τριβή και η Coriolis εξισορροπούν τη δύναμη βαροβαθμίδας και ο επιφανειακός άνεμος στρέφει προς τις χαμηλές πιέσεις
- Η γωνία  $\psi$  κυμαίνεται από  $10^\circ$  (π.χ. πάνω από τη θάλασσα) μέχρι  $45^\circ$  (πάνω από τραχύ έδαφος)

# Ανεμος τριβής = αγεωστροφικός άνεμος λόγω τριβής

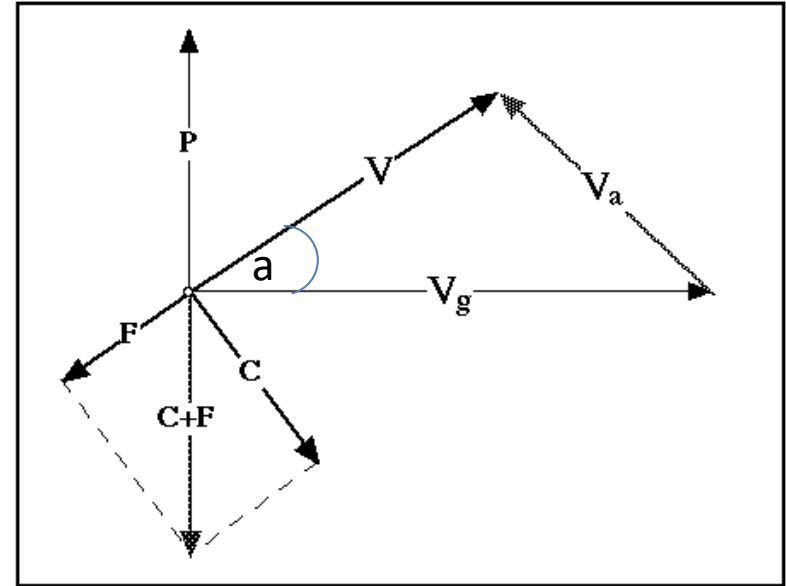
Όταν οι ισοβαρείς είναι ευθείες



Ο άνεμος έχει  
συνιστώσα προς τις  
χαμηλές πιέσεις

Ισορροπία: δύναμη, βαροβαθμιδας,  
Coriolis, και δύναμη τριβής

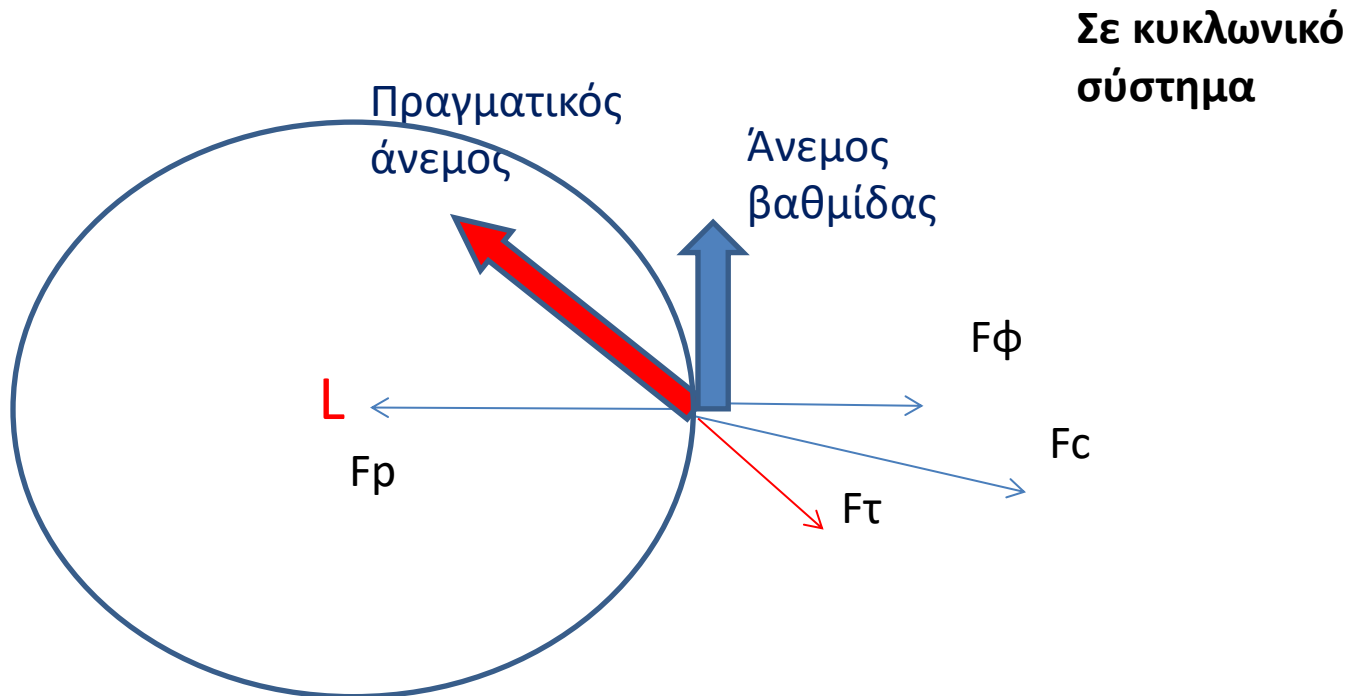
Ο πραγματικός άνεμος τέμνει  
τις ισοβαρείς προς τις  
χαμηλότερες πιέσεις



Η γωνία  $a$  που σχηματίζει ο  
πραγματικός άνεμος με τις  
ισοβαρείς είναι μικρή όταν η  
τριβή είναι μικρή (όπως πχ  
πάνω από θάλασσα) και  
αυξάνει όσο η τριβή γίνεται  
σημαντική

# Ανεμος τριβής

Όταν οι ισοβαρείς είναι καμπύλες



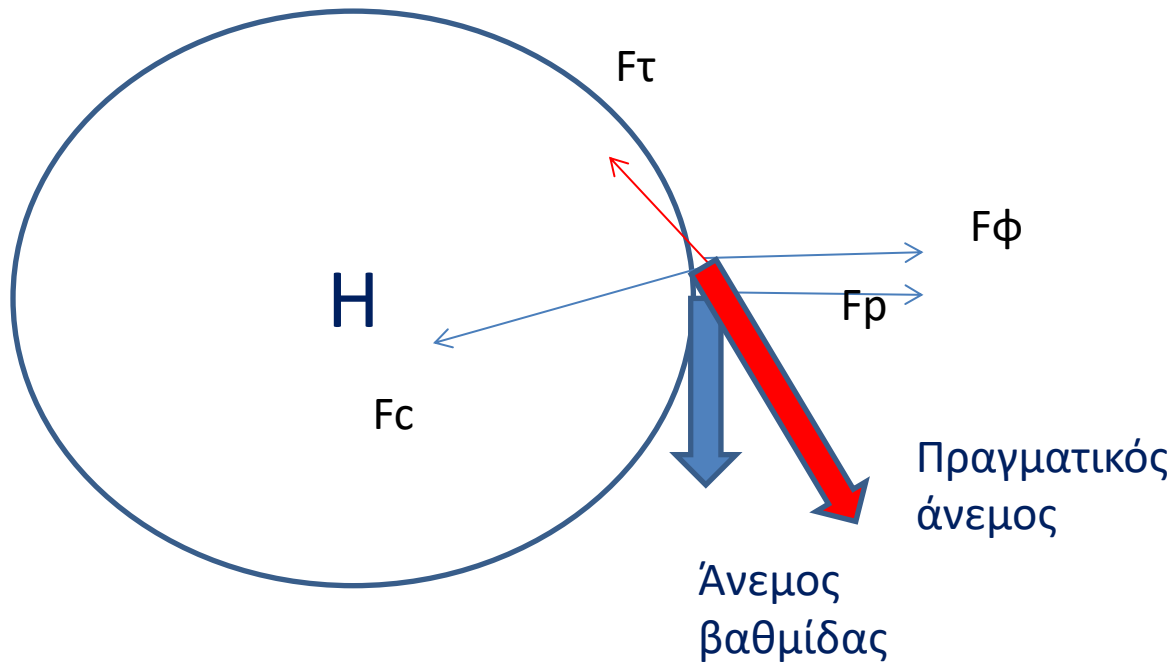
Ο πραγματικός άνεμος τέμνει τις ισοβαρείς προς τις χαμηλότερες πιέσεις

Ισορροπία: δύναμη, βαροβαθμίδας, Coriolis, φυγόκεντρη και δύναμη τριβής

# Ανεμος τριβής

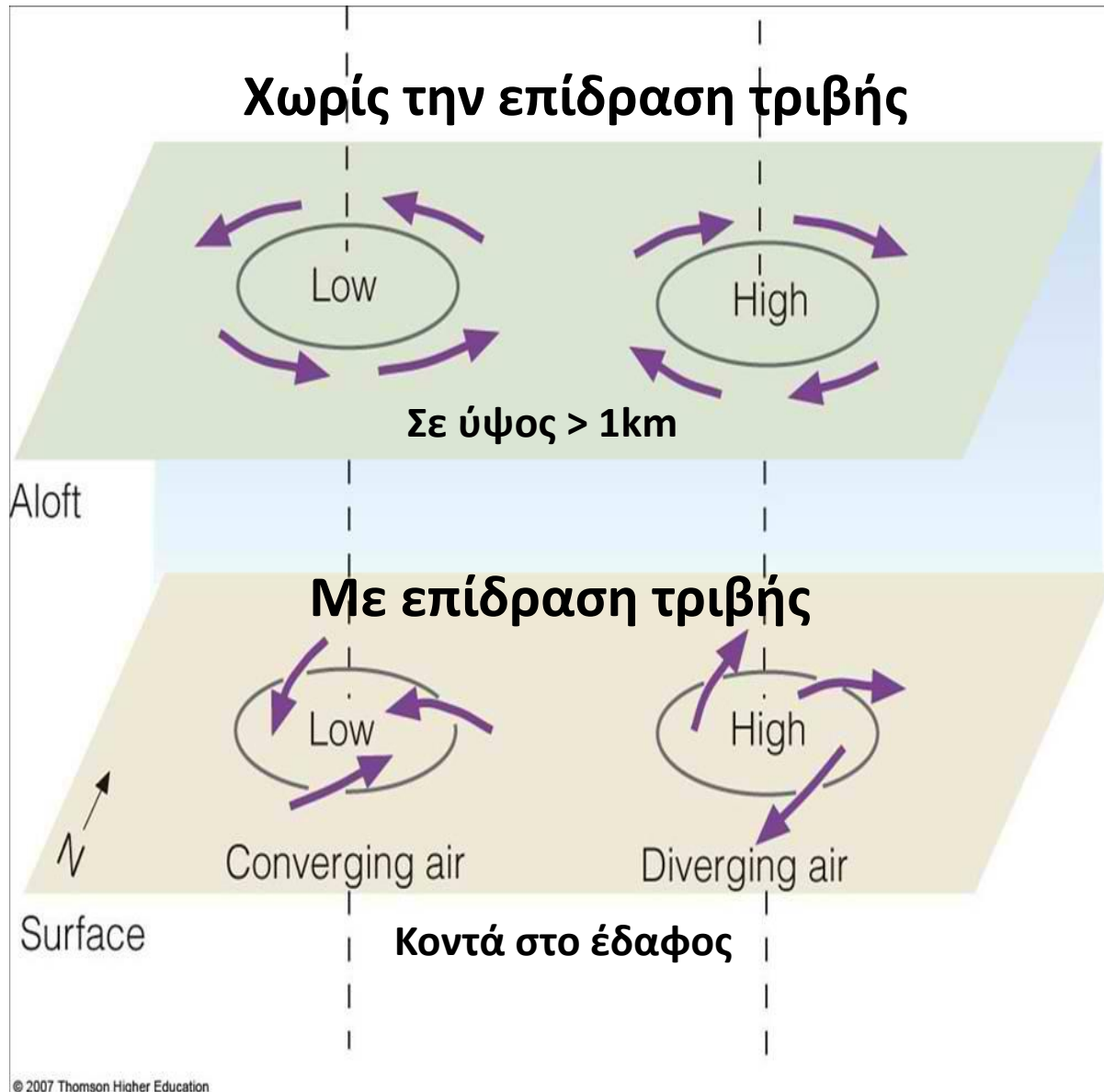
Όταν οι ισοβαρείς είναι καμπύλες

Σε αντικυκλωνικό  
σύστημα



Ο πραγματικός άνεμος τέμνει τις ισοβαρείς  
προς τις χαμηλότερες πιέσεις

# Οριακό στρώμα – Δύναμη τριβής



## **Στρώμα Ekman**

Το **στρώμα Ekman** (Ekman layer) είναι η περιοχή της ατμόσφαιρας ή του ωκεανού όπου η ροή επηρεάζεται από την τριβή και τη δύναμη Coriolis, οδηγώντας σε ένα χαρακτηριστικό μοτίβο ροής με τον άνεμο να στρέφεται με το ύψος, δημιουργώντας μια σπειροειδή ροή, γνωστή ως **σπείρα Ekman**.

Στο στρώμα Ekman υπάρχει ισορροπία ανάμεσα στη δύναμη βαροβαθμίδας, Coriolis και τριβής

Στη **μετεωρολογία**, η σπείρα Ekman επηρεάζει τη δομή των ανέμων κοντά στο έδαφος και την αλληλεπίδραση της ατμόσφαιρας με την επιφάνεια της θάλασσας.

Εξισώσεις της κίνησης συναρτήσει του  
γεωστροφικού ανέμου στον οριζόντιο άξονα με  
την επιτάχυνση

$$\frac{du}{dt} = f(v - v_g)$$

$$\frac{dv}{dt} = -f(u - u_g)$$

Εξισώσεις της κίνησης συναρτήσει του γεωστροφικού  
ανέμου στον οριζόντιο άξονα με την τριβή

$$-K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(v - v_g)$$

$$-K \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -f(u - u_g)$$

$$K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(v - v_g) = 0$$

$$K \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - f(u - u_g) = 0$$

$K$  = συντελεστής τυρβώδους διάχυσης

Τελικά καταλήγουμε:

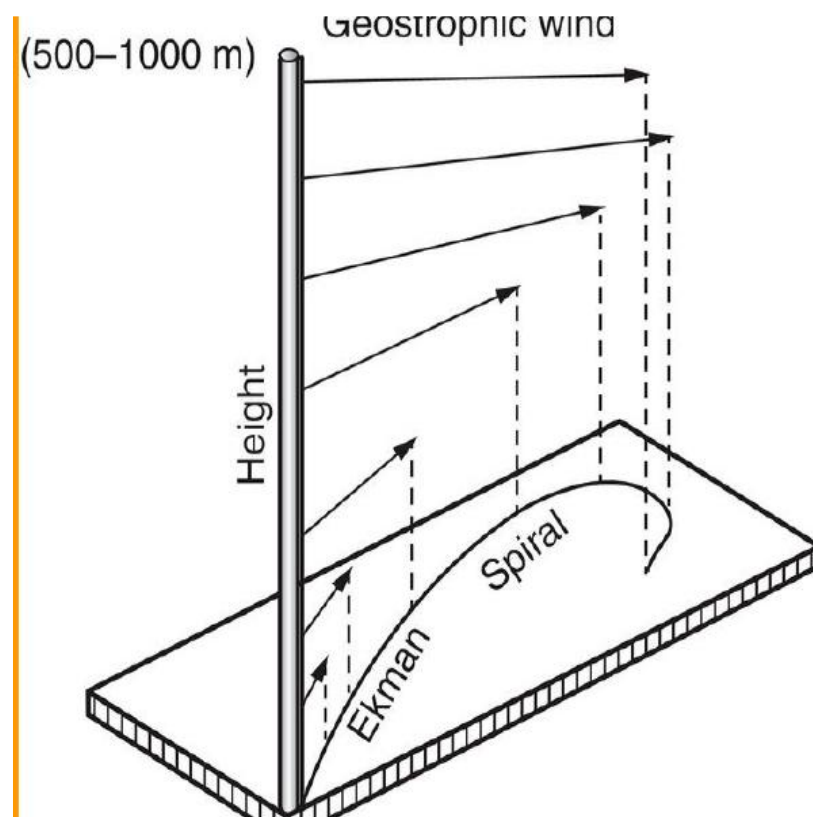
$$K \frac{\partial^2 (u + iv)}{\partial z^2} - if(u + iv) = -if(u_g + iv_g)$$

Η λύση που προκύπτει από τις εξισώσεις κίνησης στο οριακό στρώμα Ekman

$$u = u_g \left( 1 - e^{-\sqrt{\frac{f}{2K}}z} \cos\left(\sqrt{\frac{f}{2K}}z\right) \right)$$
$$v = u_g e^{-\sqrt{\frac{f}{2K}}z} \sin\left(\sqrt{\frac{f}{2K}}z\right)$$

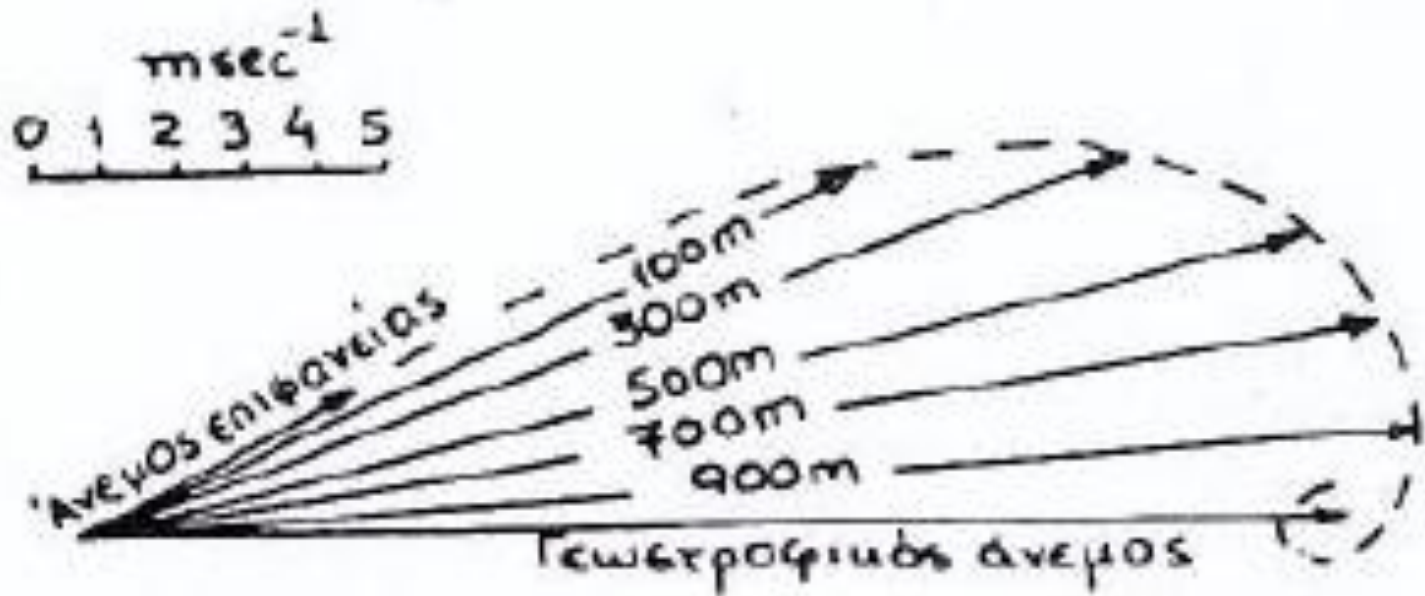
Ο άνεμος είναι 0 στο έδαφος, η ταχύτητα αυξάνει με το ύψος και ταυτόχρονα στρέφεται.  
Σχηματίζεται η σπείρα Ekman

Αν  $\phi$  είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα του ανέμου με το διάνυσμα της αρνητικής βαροβαθμίδας τότε σε ύψος περίπου 1 km η γωνία  $\phi$  γίνεται  $90^\circ$  και ο άνεμος γεωστροφικός



Ο άνεμος έχει πάντοτε συνιστώσα προς τις χαμηλές πιέσεις

## Σπείρα Ekman



Ο άνεμος προσεγγίζει τον γεωστροφικό περίπου στο 1km από το έδαφος

# Άνεμος στην επιφάνεια λόγω επίδρασης τριβής σε κυκλωνικά και αντικυκλωνικά συστήματα

