

ΧΡΟΝΟΣ 20 λεπτά

Σημείωση: Δεν απαιτείται η λύση του εκάστοτε ερωτήματος για να προχωρήσετε στο επόμενο.

Επάνω στη μοναδιαία σφαίρα (ακτίνας 1 και κέντρου O) θεωρήστε τα σημεία:

$$A_1 : (\theta_1 = 0, \phi_1 = 0) \quad , \quad A_2 : (\theta_2 = \pi/2, \phi_2 = 0) \quad , \quad A_3 : (\theta_3 = \theta, \phi_3 = \pi/2).$$

Η $\theta \leq \pi/2$ είναι τέτοια, ώστε η (μικρότερη) στερεά γωνία του σφαιρικού τριγώνου που έχει κορυφές τα A_1, A_2, A_3 (δηλαδή του τριγώνου που σχηματίζεται από τόξα μέγιστων κύκλων που συνδέουν τα 3 σημεία) να ισούται αριθμητικά με τη θ .

1. Μπορείτε να υπολογίσετε την τιμή της θ ;
2. Αν για την θέση του A_3 , που συγκεκριμενοποιείται θέτοντας την τιμή $\theta = \pi/4$, υπολογίσουμε το $\vec{OA}_1 \times \vec{OA}_3$, αυτό θα είναι το διάνυσμα που σε καρτεσιανές συντεταγμένες θα έχει τη μορφή (x, y, z) . Ποιο θα είναι το όρισμα Φ του μιγαδικού αριθμού:

$$z = x + i \frac{\sqrt{2}}{2} ;$$

Σημείωση: Το καρτεσιανό σύστημα αξόνων είναι δεξιόστροφο, ως συνήθως. Ο άξονας x διέρχεται από το A_2 , και ο άξονας z από το A_1 .

3. Βάσει του Φ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, κατασκευάζουμε τον πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \Phi & 0 & \sin \Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Phi & 0 & \cos \Phi \end{pmatrix}.$$

Θέλουμε να φτιάξουμε ένα νέο διάνυσμα το οποίο να είναι ιδιοάνυσμα του \mathbf{A} . Ποιο είναι το νέο διάνυσμα που θα φτιάχνατε με μοναδικά δομικά στοιχεία τα $\vec{OA}_1, \vec{OA}_2, \vec{OA}_3$, ή κάποια εξ αυτών, εκτελώντας οποιεσδήποτε πράξεις μεταξύ τους;