

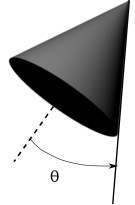


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής Εξέταση 26 Σεπτεμβρίου 2024 στις Βασικές Μαθηματικές Μεθόδους

Σύνολο μορίων στα 10 ερωτήματα=12.5 μόρια. Φροντίστε να είναι εμφανείς οι υπολογισμοί σας.

1. Υπό ποια στερεά γωνία φαίνεται ένας άπειρος κώνος ανοίγματος θ από την κορυφή του κώνου K ; ($\theta \leq \pi/2$ είναι η γωνία που σχηματίζεται από τον άξονα του κώνου και μια γενέτειρα της παράπλευρης επιφάνειας του, βλ. σχήμα) Αν η κορυφή του κώνου απομακρυνθεί από το σημείο μέτρησης των στερεών γωνιών K κατά απόσταση d , με την προέκταση του άξονα του κώνου να συνεχίζει να διέρχεται από το σημείο K , θα μεγαλώσει, θα μικρύνει, ή θα μείνει ίση η στερεά γωνία που υπολογίσατε; **[1+0.5 μόρια]**



[**Απ:** $\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta)$. Όντας άπειρος ο κώνος δεν είναι διαφορετικό το άνοιγμα της στερεάς γωνίας που βλέπει όλο τον κώνο. Προσοχή: Η εκφώνηση δεν έλεγε ότι η γωνία είναι $\theta = \pi/2$, αλλά είναι μικρότερη από τόσο!]

2. Έστω δύο μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ τα οποία σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\pi/2$. Να κατασκευαστεί μέσω αποκλειστικά αυτών των δύο, ένα τρίτο μοναδιαίο διάνυσμα στις 3 διαστάσεις που να σχηματίζει γωνία θ με τα δύο πρώτα. Τι τιμές μπορεί να πάρει η θ ; **[1+0.5 μόρια]**

[**Απ:** Το ζητούμενο διάνυσμα είναι το $\hat{\mathbf{e}} = \cos \theta(\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2) + \sqrt{1 - 2\cos^2 \theta}(\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2)$. Λόγω της ρίζας δεν μπορεί $1 - 2\cos^2 \theta < 0$ οπότε η $\theta \in [\pi/4, 3\pi/4]$.]

3. Δύο σημεία επάνω στη μοναδιαία σφαίρα απέχουν απόσταση $d = 1$ (μετρημένη πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας). Αν το πρώτο σημείο έχει σφαιρικές συντεταγμένες $\theta_1 = \phi_1 = \pi/6$, τότε βρείτε δύο άλλα σημεία, γράφοντας τις σφαιρικές τους συντεταγμένες που θα μπορούσαν να περιγράψουν το 2ο σημείο. **[0.5+0.5 μόρια]**

[**Απ:** Δύο κατάλληλα τέτοια σημεία είναι τα $(\pi/6 + 1, \pi/6)$ και $(1 - \pi/6, 7\pi/6)$ που βρίσκονται πάνω στον ίδιο ή τον αντιδιαμετρικό μεσημβρινό με το αρχικό σημείο. Προσοχή: η απόσταση 1 ήταν επί της σφαίρας, όχι απόσταση σημείων στο χώρο. Επίσης το να αλλάξει κανείς τη γωνία ϕ κατά τέτοιο τόξο ώστε να αντιστοιχεί σε απόσταση επί του παράλληλου κύκλου 1 δεν καθορίζει την απόσταση των σημείων επί της σφαίρας, αφού ο παράλληλος κύκλος δεν είναι μέγιστος κύκλος.]

4. Κατασκευάστε έναν συμμετρικό 2×2 πίνακα \mathbf{A} για τον οποίο να ισχύει ότι $\det(\mathbf{A}) = -1$ και να έχει ιδιοτιμές ± 1 . **[1 μόριο]**

[**Απ:** Η γενικότερη μορφή τέτοιου πίνακα είναι

$$\mathbf{A}_{\pm} = \begin{pmatrix} a & \pm\sqrt{1-a^2} \\ \pm\sqrt{1-a^2} & -a \end{pmatrix}.$$

Προσοχή: Δινόταν ότι ο πίνακας είναι συμμετρικός.]

5. Για τον πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

να υπολογιστούν οι ακόλουθοι αριθμοί: (α) $x = A_{i,4-i}$, (β) $y = (\mathbf{A}^T)_{ij}\delta_{ij}$, (γ) $z = A_{1j}A_{j3}$. **[0.5+0.5+0.5 μόρια]**

[**Απ:** $x = 15, y = 15, z = 42$. Υποννοείται αθροιστική σύμβαση.]

6. Ένας πίνακας 2×2 δρώντας στο διάνυσμα $(1, 0)^T$ το μετασχηματίζει στο $(1, 1)^T$, ενώ δρώντας στο διάνυσμα $(0, 1)^T$ το μετασχηματίζει στο $(-1, 1)^T$. Ποια είναι η ορίζουσα του πίνακα; **[1 μόριο]**

[**Απ:** 2. Ο πίνακας έχει ως στήλες, τα μετασχηματισμένα διανύσματα.]

7. Το τετράγωνο ενός μιγαδικού αριθμού z είναι ο $1 + i$. Τι όρισμα μπορεί να έχει ο μιγαδικός αριθμός z ; Ποιους αριθμούς μπορείτε να βρείτε που να επαληθεύουν την εξίσωση $z^2 = 1 + i$; **[0.5+0.5 μόρια]**

[**Απ:** $k\pi + \pi/8, z_1 = \sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}, z_2 = \sqrt[4]{2}e^{i9\pi/8} = -z_1$.]

8. Ποιοι μιγαδικοί αριθμοί z επαληθεύουν α) τη σχέση $z = |z|$, β) τη σχέση $z = 1/z$, γ) τη σχέση $z = -z^*$; **[0.5+0.5+0.5 μόρια]**

[**Απ:** $\mathbb{R}^+, \pm 1, ia, a \in \mathbb{R}$.]

9. Ποια είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού από x, y σε a, b , όπου $a = 2x, b = y/2$; Ποιο χωρίο στις καρτεσιανές συντεταγμένες x, y περικλείει η περιοχική $a \in [0, 1], b \in [0, 1]$. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου αυτού με κατάλληλη ολοκλήρωση στις συντεταγμένες a, b . **[1+0.5 μόρια]**

[**Απ:** $J = 1$. Το παραλληλόγραμμο στο χώρο x, y με $x \in [0, 1/2], y \in [0, 2]$.]

10. Δράστε με έναν πίνακα στροφής στα διανύσματα του διδιάστατου χώρου $\vec{X} = (a, b)^T$ και $\vec{Y} = (-b, a)^T$ με $(b \neq a)$ κατασκευάζοντας έτσι τα \vec{X}', \vec{Y}' αντίστοιχα. Συγκρίνετε τις ποσότητες $A = \vec{X}' \cdot \vec{Y}$ και $B = \vec{Y}' \cdot \vec{X}$. **[1 μόριο]**

[**Απ:** $A = -B$ αφού οι γωνίες των δύο ζευγαριών είναι παραπληρωματικές. Η περίπτωση μηδενικής στροφής αντιστοιχεί σε γωνίες $\pi/2$, οπότε τότε είναι $A = B = -B = 0$. Προσοχή: Τα εσωτερικά γινόμενα είναι αριθμοί και όχι διανύσματα όπως μεταφέρθηκε η σχετική απάντηση από «στόμα» σε «στόμα»...]

Καλή Επιτυχία