

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ



Τμήμα Φυσικής Εξέταση 3 Φεβρουαρίου 2025 στις Βασικές Μαθηματικές Μεθόδους

Σύνολο μορίων στα 10 ερωτήματα=12.5 μόρια. Φροντίστε να είναι εμφανείς οι υπολογισμοί σας.

- Χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (1, 3, 0)$, να κατασκευάσετε (α) τον αριθμό 4, (β) το διάνυσμα $(0, 0, 2)$, (γ) το διάνυσμα $(2, 2, 0)$. Επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε μόνο τις πράξεις μεταξύ διανυσμάτων, αλλά *κα-νέναν* αυθαίρετο αριθμό. **[0.3+0.3+0.4 μόρια]**
- Έστω N διανύσματα του επιπέδου $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_N$ (με $N \in \mathbb{N}$), όπου όλα έχουν ίδιο μέτρο $|\vec{a}_i| = a > 0$ (για όλα τα $i \in \{1, 2, \dots, N\}$). Μας δίνεται ότι κάθε δύο διαδοχικά διανύσματα έχουν εσωτερικό γινόμενο $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_{i+1} = a^2 \cos(2\pi/N)$. (α) Είναι το άθροισμα $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_N$, διάνυσμα συγκεκριμένου μήκους; (β) Ελέγξτε αν μπορεί το παραπάνω άθροισμα να είναι το μηδενικό διάνυσμα; (γ) Ποιο είναι το μέγιστο μήκος που μπορεί να έχει το παραπάνω διάνυσμα, αν ο αριθμός N είναι άρτιος; **[0.5+0.5+0.5 μόρια]**
- Υπολογίστε (α) το εσωτερικό και (β) το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων που έχουν ως αρχή το κέντρο της μοναδιαίας σφαίρας O και ως πέρατα τα σημεία $A_1 : (\theta_1 = \pi/2, \phi_1 = \pi/2)$ και $A_2 : (\theta_2 = \pi/3, \phi_2 = \pi/3)$, αντίστοιχα. (γ) Τι τιμή θα δίνετε στην ϕ_2 του A_2 , ώστε να μεγιστοποιήσετε το μέτρο της προβ $_{O\vec{A}_1} O\vec{A}_2$; **[0.25+0.25+0.5 μόρια]**
- (α) Υπολογίστε τη στερεά γωνία υπό την οποία το σημείο K “βλέπει” το μικρότερο χωρίο της μοναδιαίας σφαίρας (που έχει κέντρο το K) που περικλείεται από τις καμπύλες $C_1 : \phi = 0$, $C_2 : \phi = \pi/2$, $C_3 : \theta = \pi/2$. (β) Πόσο θα αλλάξει η αντίστοιχη στερεά γωνία, αν διπλασιαστεί η ακτίνα της σφαίρας; **[1+0.5 μόρια]**
- Για δύο $N \times N$ πίνακες, $\mathbf{A}, \mathbf{B}$, αντιστοιχίστε τις 3 ποσότητες $x = A_{ij}B_{ij}$, $y = A_{ij}B_{ji}$, $z = B_{kk}\delta_{ij}A_{ij}$, σε κάθε μια από τις ποσότητες: $M = \text{Tr}(\mathbf{A}) \text{Tr}(\mathbf{B}^\top)$, $K = \text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^\top)$, $L = \text{Tr}(\mathbf{B}\mathbf{A})$. [Υποννοείται η αθροιστική σύμβαση κατά τη χρήση δεικτών.] **[0.5+0.5+0.5 μόρια]**
- Έστω ένας 2×2 πίνακας $\mathbf{A}$, με ίχνος $\text{Tr}(\mathbf{A}) = x$ και ορίζουσα $\det(\mathbf{A}) = y$. (α) Να γραφεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, σύμφωνα με το θεώρημα Cayley-Hamilton που δίνει την τιμή του $\mathbf{A}^2$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\mathbf{A}$ και $\mathbf{I}$. (β) Βάσει της παραπάνω σχέσης γράψτε το $\text{Tr}(\mathbf{A}^2)$, ως συνάρτηση των x, y . **[0.5+0.5 μόρια]**
- Βρείτε τα ιδιοανύσματα και τις ιδιοτιμές του

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Δεδομένου ότι τα ιδιοανύσματα είναι μιγαδικά, πώς θα ορίζατε το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ δύο μιγαδικών διανυσμάτων ώστε να εξασφαλίσετε ότι το μέτρο κάθε μη μηδενικού ιδιοανύσματος είναι αμιγώς θετικός αριθμός; **[1+0.5 μόρια]**

8. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = \sqrt{2}(1 + i) + 2e^{i\phi}$. (α) Να ελέγξετε αν υπάρχει γωνία $\phi \in [0, 2\pi)$, τέτοια ώστε ο αριθμός z να είναι ίσος με 0. (β) Οι μιγαδικοί αριθμοί z που αναπαριστώνονται με την παραπάνω μορφή, με $\phi \in [0, 2\pi)$, πάνω σε ποια καμπύλη του μιγαδικού επιπέδου βρίσκονται; (Περιγράψτε ακριβώς τη μορφή και τα χαρακτηριστικά της καμπύλης.) [Υποδ: ίσως σας βοηθήσει να απαντήσετε στο (β) ερώτημα πρώτα.] **[0.5+0.5 μόρια]**
9. Αν $z = e^{i\theta}$, γράψτε το (α) $\cos \theta$, (β) $\cos(2\theta)$, (γ) $\tan \theta$, με τη βοήθεια του z , εκτελώντας οποιαδήποτε από τις πράξεις $+$, $-$, $\cdot$, $:$, χρησιμοποιώντας, αν θέλετε, και την πράξη της συζυγίας $*$ και το i . [Δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε στην τελική έκφραση για τις παραπάνω ποσότητες τα $\mathcal{R}, \mathcal{I}$ (πραγματικό και φανταστικό μέρος).] **[0.5+0.5+0.5 μόρια]**
10. Υπολογίστε τη δράση του $\mathbf{A}^n$ (με $n \in \mathbb{N}$) στο διάνυσμα $(3, 3)^\top$, αν γνωρίζετε ότι τα διανύσματα $X_1 = (1, 2)^\top$, $X_2 = (2, 1)^\top$ είναι ιδιοανύσματα του $\mathbf{A}$, με αντίστοιχες ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. **[1 μόριο]**

Καλή Επιτυχία

Απαντήσεις

1. $x = \vec{a} \cdot \vec{b} = 4, y = \vec{a} \cdot \vec{a} = 2, z = \vec{b} \cdot \vec{b} = 10$ και $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, 2)$. Οπότε (α) x , (β) $\vec{c}$, (γ) $y\vec{a}$. Τα διανύσματα $\vec{a} \pm \vec{b}$ δεν σχετίζονται με τα ζητούμενα.
2. Το γεγονός ότι στο εσωτερικό γινόμενο εμφανίζεται το $\cos(2\pi/N)$ σημαίνει ότι η γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους δύο διαδοχικά διανύσματα είναι $\pm 2\pi/N$. (α) Ανάλογα με το πρόσημο της γωνίας το άθροισμα των διανυσμάτων (τοποθετώντας τα στη σειρά) μπορεί να έχει διαφορετικό μέτρο. (β) Αν όλες οι γωνίες έχουν ίδιο πρόσημο, τότε τα διανύσματα σχηματίζουν κανονικό N -γωνο και η τεθλασμένη γραμμή που ορίζουν κλείνει οπότε το άθροισμά τους είναι μηδενικό. (γ) Προκειμένου να μεγιστοποιηθεί το μέτρο του αθροίσματος, αρκεί να είναι συνευθειακά τα αθροίσματα όλων των ζευγών των διανυσμάτων, γεγονός το οποίο μπορεί να επιτευχθεί με εναλλαγή των προσήμων των γωνιών (σχηματίζεται ένα ζιγκ-ζαγκ από τη σειρά των διανυσμάτων). Κάθε ζευγάρι σχηματίζει το σταθερό διάνυσμα $\vec{b} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}_3 + \vec{a}_4 = \dots$. Οπότε το συνολικό άθροισμα θα είναι

$$\vec{A} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_N = (N/2)\vec{b}$$

με μέτρο

$$|\vec{A}| = (N/2)\sqrt{a^2 + a^2 + 2a^2 \cos(2\pi/N)} = (N/\sqrt{2})a\sqrt{1 + \cos(2\pi/N)} = Na \cos(\pi/N),$$

με χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας $\cos 2\phi = 2 \cos^2 \phi - 1$.

3. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες τα δύο διανύσματα είναι

$$O\vec{A}_1 = (0, 1, 0), \quad O\vec{A}_2 = (\sqrt{3}/4, 3/4, 1/2)$$

Και τα δύο διανύσματα είναι μοναδιαία. Έτσι έχουμε (α) $O\vec{A}_1 \cdot O\vec{A}_2 = 3/4$ και (β) $O\vec{A}_1 \times O\vec{A}_2 = (1/2, 0, -\sqrt{3}/4)$. (γ) Αφού πρόκειται για δύο μοναδιαία διανύσματα θα πρέπει η μεταξύ τους γωνία να ελαχιστοποιηθεί για να μεγιστοποιηθεί το μέτρο της προβολής του ενός στο άλλο. Επομένως θα πρέπει να επιλέξουμε $\phi_2 = \pi/2$ προκειμένου να βρεθούν στον ίδιο μεσημβρινό. Το μέγιστο αυτό μέτρο θα είναι $\cos(\pi/2 - \pi/3) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$.

4. (α) Πρόκειται για ένα χωρίο που καταλαμβάνει το ένα όγδοο (1 ογδοημόριο) της σφαίρας, οπότε $\Omega = \pi/2$. Υπολογιστικά

$$\Omega = \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \pi/2 (-\cos \theta)|_0^{\pi/2} = \pi/2$$

(β) Η επιφάνεια θα μεγαλώσει αλλά η στερεά γωνία θα μείνει ίδια.

- 5.

$$x = A_{ij}B_{ij} = A_{ij}B_{ji}^\top = \text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^\top) = K$$

$$y = A_{ij}B_{ji} = \text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \text{Tr}(\mathbf{B}\mathbf{A}) = L$$

$$z = B_{kk}\delta_{ij}A_{ij} = B_{kk}A_{ii} = \text{Tr}(\mathbf{B})\text{Tr}(\mathbf{A}) = \text{Tr}(\mathbf{A})\text{Tr}(\mathbf{B}) = \text{Tr}(\mathbf{A})\text{Tr}(\mathbf{B}^\top) = M$$

6. (α) Σύμφωνα με το Θεωρ. C-H

$$\mathbf{A}^2 - \text{Tr}(\mathbf{A})\mathbf{A} + \det(\mathbf{A})\mathbf{I} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}^2 = x\mathbf{A} - y\mathbf{I}.$$

(β) $\text{Tr}(\mathbf{A}^2) = x^2 - 2y.$

7. Οι ιδιοτιμές βγαίνουν ± 1 (πρόκειται για έναν από τους πίνακες του Pauli που είναι ερμιτιανός) και τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα $(1, i)^\top, (1, -i)^\top$. Τα ιδιοανύσματα θα είχαν μέτρο, με το κλασικό εσωτερικό γινόμενο 0, οπότε προκειμένου να έχουν θετικό μέτρο θα χρησιμοποιούσαμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = x_1^* y_1 + x_2^* y_2 \text{ ή } y_1^* x_1 + y_2^* x_2.$$

8. Ο δοσμένος αριθμός γράφεται και $z = 2e^{i\pi/4} + 2e^{i\phi}$, οπότε αν θέσουμε $\phi = \pi/4 + \pi$ ο μιγαδικός αριθμός μηδενίζεται. Με τη νέα πολική μορφή είναι εμφανές ότι ο μιγαδικός αριθμός z γενικά κείται σε ένα κύκλο κέντρου $2e^{i\pi/4}$ με ακτίνα 2, οπότε ο κύκλος αυτός διέρχεται από το 0 και επομένως υπάρχει κατάλληλη γωνία ϕ που καθιστά τον μιγαδικό αριθμό μηδενικό.

9.

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \mathcal{R}(z) = \frac{z + z^*}{2} \\ \cos 2\theta &= \mathcal{R}(e^{2i\theta}) = \mathcal{R}(z^2) = \frac{z^2 + z^{*2}}{2} \\ \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{z - z^*}{2i}}{\frac{z + z^*}{2}} = -i \frac{z - z^*}{z + z^*} \end{aligned}$$

10. Αναλύοντας το διάνυσμα στα ιδιοανύσματα

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = X_1 + X_2.$$

Έτσι $A^n X = \lambda_1^n X_1 + \lambda_2^n X_2 = X_1 + (-1)^n X_2$. Επομένως αν n άρτιος $A^n X = X$, ενώ αν n περιττός $A^n X = X_1 - X_2 = (-1, 1)^\top$.