



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις Φεβρουαρίου 2022
στις Βασικές Μαθηματικές Μεθόδους

Σύνολο μορίων στα 10 ερωτήματα=11 μόρια. Φροντίστε να είναι εμφανείς οι υπολογισμοί σας. Καλή σας επιτυχία.

1. Υπολογίστε τα γινόμενα (i) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ και (ii) $\vec{a} \times \vec{b}$, αν $\vec{a} = (0, 1, 2)$ και $\vec{b} = (3, 4, 5)$.

Απ: $-3(\hat{x} - 2\hat{y} + \hat{z})$.

2. Κατασκευάστε διάνυσμα του επιπέδου, το οποίο είναι κάθετο στο $\vec{a} = (3, 4)$ και έχει μέτρο 1. Πόσα τέτοια διανύσματα υπάρχουν;

Απ: 2. Τα $\frac{1}{5}(4, -3)$, $\frac{1}{5}(-4, 3)$.

3. Αν το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων του επιπέδου είναι 1 και το ένα εξ αυτών έχει μέτρο 2, ποιο είναι το ελάχιστο μέτρο του δεύτερου; Εξαρτάται η απάντηση από τις διαστάσεις του χώρου;

Απ: 1/2. Όχι.

4. Υπολογίστε τη στερεά γωνία που αντιστοιχεί σε ένα ογδοημόριο της σφαίρας, δηλαδή στο κομμάτι της σφαίρας που καλύπτεται από σφαιρικές συντεταγμένες που περιορίζονται στο διάστημα $\phi \in [0, \pi/2]$ και $\theta \in [0, \pi/2]$.

Απ: $\pi/2$.

5. (α) Υπολογίστε την ποσότητα $A_{1k}B_{k2}$ για τους πίνακες

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

χρησιμοποιώντας την αθροιστική σύμβαση. (β) Υπολογίστε την ποσότητα (πάλι μέσω της αθροιστικής σύμβασης) $\epsilon_{1k}\epsilon_{2k}$ σε ένα χώρο 2 διαστάσεων, δηλαδή το k παίρνει τιμές 1, 2. Το ϵ_{ij} είναι ο πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής τάξης 2.

Απ: (α) 3. (β) 0.

6. Υπολογίστε τον πίνακα

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}^T,$$

όπου $^{\top}$ συμβολίζει αναστροφή του πίνακα. Αν ο πίνακας \mathbf{C} δράσει σε δύο μη παράλληλα διανύσματα του επιπέδου που ορίζουν ένα παραλληλόγραμμο, πόσο θα αλλάξει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ύστερα από τον μετασχηματισμό που θα προκαλέσει η δράση αυτού του πίνακα στα διανύσματα;

Απ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Θα μηδενιστεί.

7. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα του πίνακα

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Απ: $\lambda_1 = 2, \mathbf{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 3, \mathbf{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

8. Να υπολογίσετε τους αριθμούς $z_1 = i^4, z_2 = |i|, z_3 = (z_1 + iz_2)^*$, όπου το w^* συμβολίζει τον συζυγή του w .

Απ: $1, 1, 1 - i.$

9. Κατασκευάστε τον 2×2 πίνακα που έχει ως ιδιοανύσματα τα

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ και } \mathbf{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

με αντίστοιχες ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 4$.

Απ: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$

10. Έστω $z = e^{2\pi i/3}$. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$(1 + w)(1 - w + w^2) = 1 + w^3$$

η οποία ισχύει είτε για πραγματικούς αριθμούς, είτε για μιγαδικούς αριθμούς, w , υπολογίστε την ποσότητα

$$z - z^2 + z^3.$$

Σχεδιάστε στο μιγαδικό πεδίο τους αριθμούς αυτούς. Υπολογίστε, μέσω του προηγούμενου αποτελέσματός σας το διανυσματικό άθροισμα 3 δυνάμεων ίσου μέτρου, F_0 , οι οποίες ασκούνται στην αρχή των αξόνων και σχηματίζουν ανά δύο

γωνία $2\pi/3$. Οι κατευθύνσεις τους είναι διαδοχικά μία ακτινικά προς τα έξω και μία προς το κέντρο. Η \vec{F}_1 κατευθύνεται προς τα θετικά του άξονα x , η επόμενη, η \vec{F}_2 , που σχηματίζει γωνία $2\pi/3$ σε σχέση με τον άξονα x , έχει κατεύθυνση απομάκρυνσης από το κέντρο, και η τρίτη, η \vec{F}_3 , έχει κατεύθυνση προς το κέντρο.

Απ: $1 + i\sqrt{3}, \hat{\mathbf{x}} + \sqrt{3}\hat{\mathbf{y}}$.