ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις επί Πτυχίω 17-5-2024
στις Βασικές Μαθηματικές Μεθόδους

Σύνολο μορίων στα 10 ερωτήματα=11 μόρια. Φροντίστε να είναι εμφανείς οι υπολογισμοί σας.
Καλή σας επιτυχία.

1. Γράψτε δύο μη συγγραμμικά διανύσματα ενός δισδιάστατου χώρου $\vec{a}_1, \vec{a}_2$. Στη συνέχεια υπολογίστε τα (i) $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$, (ii) $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$, (iii) $|\vec{a}_1|\vec{a}_2 + |\vec{a}_2|\vec{a}_1$, (iv) προβ$_{\vec{a}_1}\vec{a}_2$. **[0.25+0.25+0.25+0.25 μόρια]**

2. Γράψτε και υπολογίστε όλα τα δυνατά γινόμενα δύο πινάκων χρησιμοποιώντας αυτούσιους τους ίδιους τους πίνακες

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   και **όχι** κάποιο μετασχηματισμό αυτών (ανάστροφο, αντίστροφο, κλπ). **[1 μόριο]**

3. Αν δ και ϵ οι γνωστοί τανυστές και με βάση την αθροιστική σύμβαση, υπολογίστε τις ποσότητες: (i) $\delta_{1a}\delta_{a2}$, (ii) $\delta_{ab}\epsilon_{ab3}$, (iii) $\epsilon_{12}\epsilon_{21}$, (iv) $\epsilon_{ab}\epsilon_{ba}$. **[0.25+0.25+0.25+0.25 μόρια]**

4. Η καμπύλη $C_1 : \theta = \pi/4, \phi \in [0, 2\pi)$ ή η $C_2 : \phi = \pi/4, \theta \in [0, \pi)$ είναι μεγαλύτερη; Υπολογίστε τα μήκη και των δύο. θ, ϕ είναι οι κλασικές σφαιρικές γωνιακές συντεταγμένες. **[1 μόριο]**

5. Δύο μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις (και τις 2 ταυτόχρονα):

$$\Re(z_1) = |z_2| \quad , \quad \Im(z_2) = |z_1|.$$

   Να υπολογιστεί η ποσότητα iz_1/z_2. **[1 μόριο]**

6. Υπολογίστε τη στερεά γωνία υπό την οποία φαίνεται από την κορυφή ενός κώνου η **εξωτερική** περιοχή του κώνου, αν ο κώνος έχει άνοιγμα γωνίας θ (το άνοιγμα ορίζεται ως η γωνία μεταξύ του άξονα συμμετρίας του κώνου και μιας γενέτειρας του κώνου, δηλαδή μιας ημιευθείας επάνω στην επιφάνεια του κώνου με άκρο την κορυφή αυτού). **[1 μόριο]**

7. Τα $\vec{X}_1, \vec{X}_2$ είναι ιδιοανύσματα ενός τετραγωνικού πίνακα **A** με αντίστοιχες ιδιοτιμές λ_1, λ_2. Να υπολογιστεί το διάνυσμα

$$\mathbf{A}^N[(\lambda_2)^N \vec{X}_1 + (\lambda_2)^N \vec{X}_2].$$

όπου N κάποιος φυσικός αριθμός. [**1 μόριο**]

8. Έστω ένα διάνυσμα $\vec{X}$ του 3-διάστατου χώρου, το οποίο ικανοποιεί τη σχέση

$$\vec{X} \cdot \text{προβ}_{\hat{e}} \vec{X} = 1,$$

όπου $\hat{e}$ κάποιο δοσμένο μοναδιαίο διάνυσμα του χώρου. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των περάτων όλων των διανυσμάτων $\vec{X}$ που ικανοποιούν την παραπάνω σχέση και έχουν ως αρχή την ίδια αρχή με το $\hat{e}$. Τι θα άλλαζε αν στο δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης είχαμε αντί του 1, το $|\hat{e} \times \vec{X}|^2$; [**0.7+0.8 μόρια**]

9. Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου A_1A_3 ενός κανονικού πολυγώνου με N πλευρές που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R, χρησιμοποιώντας μιγαδικούς αριθμούς που αντιπροσωπεύουν τις N-οστές ρίζες της μονάδας. [**1.5 μόρια**]

10. Έστω ο 2×2 πίνακας

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} w^2 & w^2 \\ (w^\star)^2 & w^2 \end{pmatrix}.$$

όπου w κάποιος μιγαδικός αριθμός μέτρου 1 και με όρισμα $\text{Arg}(w) = \pi/4$. Αφού βρεθούν τα ιδιοανύσματα και οι ιδιοτιμές του **A** να υπολογιστεί η δράση του $\mathbf{A}^{100}$ στο διάνυσμα

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} w \\ w^\star \end{pmatrix}.$$

[**1 μόριο**]

Συνοπτικές απαντήσεις

1. $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = 1$ με απευθείας εκτέλεση της πράξης

$$
\begin{aligned}
\vec{\Psi} \times (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) &= (2\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \\
&= [\vec{a}_1 + (\vec{a}_1 + \vec{a}_2)] \times (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \\
&= \vec{a}_1 \times (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \\
&= \vec{a}_1 \times \vec{a}_2
\end{aligned}
$$

2. Μόνο αν $\hat{e}_1 \perp \hat{e}_2$ οι προβολές συμπίπτουν με τις συνιστώσες του $\vec{X}$. Μπορεί να γραφτεί με ανάλυση του $\vec{X} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2$ και υπολογισμό των a_1, a_2 μέσω εσωτερικού γινομένου με το $\vec{X}$.

3. Ο κώνος έχει άνοιγμα $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$ επομένως η στερεά γωνία είναι

$$
\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta) = 2\pi\left[1 - \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)\right] \ .
$$

4.

$$
C_{ij} = A_{ia}E_{ab}(A^\top)_{bj} = A_{ia}\epsilon_{ab}A_{jb}
$$

οπότε

$$
C_{ji} = A_{ja}\epsilon_{ab}A_{ib} = A_{jb}\epsilon_{ba}A_{ia} = -A_{jb}\epsilon_{ab}A_{ia} = -C_{ij} \ .
$$

Ο **C** είναι αντισυμμετρικός. Η συγκεκριμένη συνιστώσα του είναι

$$
C_{12} = A_{1a}\epsilon_{ab}A_{2b} = A_{11}\epsilon_{12}A_{22} + A_{12}\epsilon_{21}A_{21} = \det(\mathbf{A}) \ .
$$

5. Οι μοναδικοί όροι που θα επιβώσουν από την αθροιστική σύμβασηείναι οι

$$
\epsilon_{12}\epsilon 21 + \epsilon_{21}\epsilon 12 = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = -2 \ .
$$

Το αποτέλεσμα είναι βαθμωτό μέγεθος. Κανένας περισευούμενος δέικτης.

6.

$$
\theta_{A'} = \pi - \pi/6 = 5\pi/6 \ , \ \phi_{A'} = \pi + \pi/6 = 7\pi/6
$$

και

$$
\theta_B = 2\pi/3 \ , \ \phi_B = \pi/6 \ .
$$

Η παραπάνω είναι μια από τις θέσεις των δυνατών Β. [**Τα ακόλουθα δεν ζητούνταν:**] Οι υπόλοιπες δυνατές θέσεις των Β σχηματίζουν έναν μέγιστο κύκλο πάνω στη σφαίρα με άξονα την ευθεία ΚΑ (ο αντίστοιχος Ισημερινός αν το Α ήταν ο πόλος). Για να βρει κανείς τη σχέση $\theta_B - \phi_B$ χρειάζεται να γράψει τις καρτεσιανές συντεταγμένες των 2 σημείων κι να θέσει το εσωτερικό τους γινόμενο ίσο με 0. Η τελική σχέση είναι

$$-2\sqrt{3}\cot\theta_b = \sqrt{3}\cos\phi_B + \sin\phi_B$$

και μπορεί να γίνει και λίγο πιο κομψή αν το δεξί μέλος το γράψουμε σαν ένα σκέτο cos με μια φάση και έναν αριθμητικό συντελεστή μπροστά του:

$$-\sqrt{3}\cot\theta_b = \cos(\phi_B - \pi/6)\ .$$

7. Ο πίνακας είναι ο αντίθετος του πίνακας του Pauli σ_2 [**Δεν απαιτούνταν να τον αναγνωρίσετε.**] Είναι ερμιτιανός και επομένως αναμένει κανείς πραγματικές ιδιοτιμές. Είναι

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\ ,\ [\mathbf{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

με $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$.

8.
$$(-i)^{(-i)} = (e^{-i\pi/2})^{(-i)} = e^{-\pi/2}$$

στην 1η περίπτωση και

$$(-i)^{(-i)} = (e^{i3\pi/2})^{(-i)} = e^{3\pi/2}$$

στη 2η περίπτωση.

9.
$$z^{-1} - (-i/2) = \frac{x-i}{x^2+1} + \frac{i}{2} = \frac{2x + i(x^2-1)}{2(x^2+1)}$$

και

$$|z^{-1} - (-i/2)| = \frac{\sqrt{4x^2 + (x^2-1)^2}}{2(x^2+1)} = 1/2\ .$$

Επομένως οι z^{-1} βρίσκονται σε κύκλο ακτίνας $1/2$ και κέντρο το $-i/2$. Στην πραγματικότητα πρόκειται για έναν ‘‘τρύπιο’’ κύκλο αφού το ανώτερο σημείο του: $0 = -i/2 + i/2$, δεν μπορεί να ικανοποιηθεί για καμία τιμή του x, απλώς το πλησιάζουμε καθώς $x \to \pm\infty$. [**Η τελευταία παρατήρηση δεν απαιτούνταν.**]

10. Για να βρεθεί ο **A** μπορούμε να γράψουμε το σύστημα που ικανοποιούν τα ιδιοανύσματά του. Έτσι αν

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

τότε

$$2a + b \quad = 4$$

$$
\begin{aligned}
2c + d &= 2 \\
a + 2b &= 1/2 \\
c + 2d &= 1
\end{aligned}
$$

οπότε βρίσκουμε $a = 5/2, b = -1, c = 1, d = 0$. Για τα υπόλοιπα αρκεί να αναλύσουμε το

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) = (1/3)\mathbf{X}^{(1)} + (1/3)\mathbf{X}^{(2)}$$

και να δράσουμε πάνω του 100 φορές με το **A**:

$$\boldsymbol{P}si = (1/3)2^{100}\mathbf{X}^{(1)} + (1/3)(1/2)^{100}\mathbf{X}^{(2)} = (1/3) \left(\begin{array}{c} 2^{101} + 1/2^{100} \\ 2^{100} + 1/2^{99} \end{array} \right) \simeq (1/3)2^{100} \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right) .$$

Προφανώς το αποτέλεσμα έχει διεύθυνση πολύ πιο κοντά στο $\mathbf{X}^{(1)}$ που έχει τη μεγαλύτερη κατά μέτρο ιδιοτιμή.