ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση 23 Ιανουαρίου 2026
στις Βασικές Μαθηματικές Μεθόδους

Σύνολο μορίων στα 10 ερωτήματα=12.5 μόρια. Φροντίστε να είναι εμφανείς οι υπολογισμοί σας.

1. Έστω $\vec{a}$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα του τριδιάστατου χώρου. Για ένα δεύτερο διάνυσμα $\vec{b}$ του ίδιου χώρου ισχύει ότι $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a} \times \vec{b}|$. (α) Μπορούμε να βρούμε το μέτρο του $\vec{b}$; (β) Ποια είναι η γωνία που σχηματίζει το $\vec{b}$ με το $\vec{a}$; (γ) Υπάρχουν δύο διαφορετικά διανύσματα $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ που να ικανοποιούν την αρχική δοθείσα σχέση τέτοια, ώστε το διάνυσμα $(\vec{b}_1 - \vec{b}_2)$ να είναι κάθετο στο $\vec{a}$; Σε αυτή την περίπτωση τι ιδιαίτερο θα πρέπει να έχουν τα δύο διανύσματα $\vec{b}_1, \vec{b}_2$; **[0.5+0.5+0.5 μόρια]**

2. Έστω το τραπέζιο $OAB\Gamma$ του επιπέδου με $OA \parallel B\Gamma$. Ορίζοντας τα διανύσματα $\vec{a}_1 = \vec{OA}$, $\vec{a}_2 = \vec{AB}$, $\vec{a}_3 = \vec{B\Gamma}$, $\vec{a}_4 = \vec{\Gamma O}$ και εκτελώντας πράξεις μεταξύ αυτών δείξτε ότι τα μέσα των *μη* παράλληλων πλευρών: AB, ΓO, είναι τα άκρα ενός διανύσματος με μέτρο ίσο με το ημιάθροισμα των μέτρων των δύο παραλλήλων πλευρών OA, $B\Gamma$. **[1 μόριο]**

3. Έστω η καμπύλη C πάνω σε μια σφαίρα που περιγράφεται από τη σχέση των σφαιρικών συντεταγμένων $\theta(\phi) = (\pi/3) + (\pi/3)\cos(2\phi)$ με $\phi \in [0, 2\pi)$. (α) Σε πόσα σημεία η καμπύλη αυτή τέμνει τον Ισημερινό της σφαίρας; (β) Υπάρχει ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων της C; (γ) Η καμπύλη χωρίζει τον Ισημερινό σε τόξα όπου η καμπύλη βρίσκεται στο άνω (βόρειο) ημισφαίριο και σε τόξα που βρίσκεται στο κάτω (νότιο) ημισφαίριο. Να βρεθεί ο λόγος των μηκών των δύο τόξων.
[0.5+0.5+0.5 μόρια]

4. Ένας κύλινδρος ακτίνας R έχει τη μια βάση του σε απόσταση $H > R$ και την άλλη σε απόσταση $2H$ από κάποιο σημείο Κ, ενώ ο άξονάς του δέρχεται από το Κ. (α) Να βρεθεί η στερεά γωνία υπό την οποια φαίνεται ολόκληρος ο κύλινδρος από το σημείο Κ. (β) Αν ο κύλινδρος είχε άπειρο μήκος με την απόμακρη βάση του όχι σε απόσταση $2H$ αλλά σε άπειρη απόσταση από το Κ, η αντίστοιχη στερεά γωνία θα ήταν μεγαλύτερη, μικρότερη, ή ίση με αυτή του ερωτήματος (α); (γ) Αν ο ίδιος με το (β) απείρου μήκους κύλινδρος τοποθετούνταν με τον άξονά του να διέρχεται σε απόσταση H από το Κ, πόση θα ήταν η στερεά γωνία υπό την οποια θα φαινόταν ολόκληρος ο κύλινδρος από το Κ; (Στο (γ) θα σας βοηθήσει να θεωρήσετε ότι ο κύλινδρος είναι τοποθετημένος παράλληλα με τη διεύθυνση άξονα νοτίου-βορείου πόλου της σφαίρας υπολογισμού των στερεών γωνιών.) **[1+0.5+0.5 μόρια]**

5. Για δύο πίνακες, $\mathbf{A}, \mathbf{B}$, ο πολλαπλασιασμός $\mathbf{AB}$ ορίζεται, αλλά ο πολλαπλασιασμός $\mathbf{BA}$ *δεν* ορίζεται. (α) Μπορει οι πίνακες να είναι και οι δύο τετραγωνικοί; Εξηγήστε. (β) Ορίζεται ο πολλαπλασιασμός $\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$; **[0.5+0.5 μόρια]**

6. Να γραφούν με χρήση δεικτών οι ποσότητες (α) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, (β) $|\vec{a} \times \vec{b}|$, (γ) $\mathrm{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\top)$, όπου $\vec{a}, \vec{b}$ διανύσματα του τριδιάστατου χώρου και $\mathbf{A}$ τετραγωνικός πίνακας διάστασης 3×3. **[0.5+0.5+0.5 μόρια]**

7. Ένας 2×2 *συμμετρικός* πίνακας έχει ιδιοάνυσμα το $(2,1)^\top$ με ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$. Αν το δεύτερο ιδιοάνυσμα έχει ιδιοτιμή $\lambda_2 = -3$ να βρεθούν οι συνιστώσες του πίνακα και το 2ο ιδιοάνυσμα. **[1 μόριο]**

8. Ένας μιγαδικός αριθμός z ικανοποιεί τη σχέση $z^3 = (z + z^\star)$. Να υπολογιστούν (α) το πιθανό όρισμα $\mathrm{Arg}(z)$, (β) οι μοναδικοί αριθμοί που την επαληθεύουν. **[0.5+0.5 μόρια]**

9. Αν ένας $n \times n$ πίνακας έχει ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, τι ιδιοτιμές έχει ο αντίστροφός του; **[1 μόριο]**

10. Δίδεται κάποιος μιγαδικός αριθμός z. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $\zeta_1 = z + e^{i\theta}$ και $\zeta_2 = e^{i\mathrm{Arg}(z)} + |z| e^{i\theta}$. (α) Δείξτε ότι οι 2 αριθμοί έχουν ίδιο μέτρο. Εξηγήστε. (β) Τι θα πρέπει να ισχύει έτσι ώστε οι δύο αριθμοί ζ_1, ζ_2 να συμπίπτουν; **[0.5+0.5 μόρια]**

Καλή Επιτυχία

Απαντήσεις

1. (α,β)

$$\cancel{|\vec{a}|}|\vec{b}|\cos\theta = |\cancel{|\vec{a}|}|\vec{b}|\sin\theta| \Rightarrow \cos\theta = |\sin\theta|$$

οπότε η γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων είναι οξεία και συγκεκριμένα ίση με $\pi/4$ αφού $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ και $\cos^2\theta = \sin^2\theta$ και $\theta \in [0, \pi/2]$. Το μέτρο του $\vec{b}$ δεν παίζει κάποιο ρόλο στη δοθείσα ισότητα εκτός από την περίπτωση να είναι το μηδενικό διάνυσμα (οπότε δεν ορίζονται και οι παραπάνω γωνίες). (γ) Για να είναι το $\vec{b}_1 - \vec{b}_2$ κάθετο στο $\vec{a}$ θα πρέπει

$$(\vec{b}_1 - \vec{b}_2)\cdot\vec{a} = 0 \Rightarrow |\vec{b}_1||\vec{a}|\cos(\pi/4) = |\vec{b}_2||\vec{a}|\cos(\pi/4)$$

οπότε συμπεραίνουμε ότι τα δύο διανύσματα πρέπει να έχουν ίδιο μέτρο.

2. Έστω M N τα μέσα των , ΓO, αντίστοιχα. Θα είναι

$$\begin{aligned} \vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM} &= -\vec{a}_4/2 - (\vec{a}_1 + \vec{a}_2/2) \\ &= -(\vec{a}_4 + \vec{a}_1 + \vec{a}_2)/2 - \vec{a}_1/2 \\ &= -\frac{(\vec{a}_4 + \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3)}{2} + \frac{\vec{a}_1 - \vec{a}_3}{2} \\ &= \vec{0} - \frac{\vec{a}_1 - \vec{a}_3}{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Όμως τα $\vec{a}_1, \vec{a}_3$ είναι παράλληλα και αντίρροπα διανύσματα, οπότε $|\vec{a}_1 - \vec{a}_3| = |\vec{a}_1| + |\vec{a}_3|$. Συνεπώς

$$|\vec{MN}| = \frac{|\vec{a}_1| + |\vec{a}_3|}{2}.$$

3. Αν σχεδιάσει κανείς το γράφημα της συνάρτησης $\theta(\phi)$ παρατηρεί ότι ταλαντώνεται αρμονικά (ημιτονοειδώς) μεταξύ των τιμών $\theta = 0$ και $\theta = 2\pi/3$ και μάλιστα ολοκληρώνονται 2 πλήρεις κύκλοι ταλαντώσεων. (α) Συνεπώς η καμπύλη διάρχεται από το $\theta = \pi/2$ (ισημερινός) 4 φορές. Αυτό συμβαίνει όταν $\theta(\phi) = \pi/2$ δηλαδή

$$\pi/3 + \pi/3\cos(2\phi) = \pi/2 \Rightarrow \pi/3\cos(2\phi) = \pi/6 \Rightarrow \cos(2\phi) = 1/2.$$

Αυτό συμβαίνει στις τιμές της ϕ: $\phi_1 = \pi/6, \phi_2 = 5\pi/6, \phi_3 = 7\pi/6, \phi_4 = 11\pi/6$. (β) Για να υπάρχουν αντιδιαμετρικά σημεια θα πρέπει $\theta(\phi_1) = \pi - \theta(\phi_2)$ και $\phi_2 = \phi + \pi$ θεωρώντας οτι το πρώτο σημειο έχει $\phi \in [0, \pi)$. Οπότε θα πρέπει

$$\pi/3 + \pi/3\cos(2\phi_1) = \pi - \pi/3 - \pi/3\cos(2\phi_1 + 2\pi) = 2\pi/3 - \pi/3\cos(2\phi_1).$$

Λύνοντας βρίσκουμε

$$\pi/3 = 2\pi/3\cos(2\phi_1) \Rightarrow \cos(2\phi_1) = 1/2$$

Δύο είναι οι γωνίες στο διάστημα $[0, \pi)$ που ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη: Οι ϕ_1 και ϕ_2 του προγούμενου ερωτήματος. Επομένως υπάρχουν 2 τέτοια ζευγάρια αντιπόδων (και τα 2 στον Ισημερινό) τα 1-3 και τα 2-4. (γ) Στο βόρειο ημισφαίριο είναι τα τόξα στο διάστημα από το 1 ως το 2 και από το 3 ως το 4. Επομένως το συνολικό μήκος των τόξων αυτών είναι $(5\pi/6 - \pi/6) = 2\pi/3$ και $(11\pi/6 - 7\pi/6) = 2\pi/3$. Ο λόγος λοπόν είναι

$$\frac{2 \times (2\pi/3)}{2\pi - 2 \times (2\pi/3)} = 2.$$

4. (α) Η στερεά γωνία είναι αυτή που αντιστοιχεί στον κώνο που βλέπει την κάτω βάση, Μέσα σε αυτόν τον κώνο βρίσκεται όλος ο κύλινδρος.

$$\Omega_1 = 2\pi(1 - \cos\theta) = 2\pi(1 - H/\sqrt{R^2 + H^2})$$

(β) Όσο ψηλός και να είναι ο κύλινδρος είναι πάντα εντός αυτού του κώνου. (γ) Αν τοποθετήσουμε τον άπειρο κύλινδρο παράλληλα με τον άξονα της σφαίρας τότε αυτός θα βρίσκεται εντός μιας διέδρης γωνίας που καταλαμβάνει ένα εύρος γωνιών που αντιστοιχούν στα επίπεδα των μεσημβρινών των δύο ακραίων γωνιών $\phi_{1,2}$ που εφάπτονται στην παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου αλλά εμπεριέχει όλες τις γωνίες θ από 0 ως π. Επομένως

$$\Omega_2 = \Delta\phi(1 - \cos(\pi)) = 2\Delta\phi$$

Οι γωνίες ϕ_1, ϕ_2 θα πρέπει να είναι τέτοιες ώστε προεκτεινόμενες οι ακίνες της σφαίρας με $\theta = \pi/2$ και $\phi = \pi_{1,2}$ να εφάπτονται στον κύκλο που έχει ακτίνα R και το κέντρο του βρίσκεται σε απόσταση H από το κέντρο της σφαίρας. Επομένως

$$\cos(\Delta\phi/2) = \frac{\sqrt{H^2 - R^2}}{H}$$

και

$$\Omega_2 = 4\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{H^2 - R^2}}{H}\right)$$

5. (α) Αν ήταν τετραγωνικοί θα έπρεπε να έχουν ίδιες διαστάσεις για να ορίζεται το **AB**. Τότε όμως θα οριζόταν και το γινόμενο με την αντίστροφη διάταξη. (β) Ορίζεται γιατί $\mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top = (\mathbf{AB})^\top$.

6. (α) $a_i b_i$, (β)

$$\begin{aligned} |\hat{\mathbf{e}}_i \epsilon_{ijk} a_j b_k| &= \sqrt{\epsilon_{ijk} a_j b_k \epsilon_{ilm} a_l b_m} \\ &= \sqrt{a_j b_k a_l b_m (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta kl)} \\ &= \sqrt{a_j a_j b_k b_k - a_j b_j a_k b_k} \end{aligned} \tag{2}$$

(γ) $\mathrm{Tr}(A_{ij} A^\top_{jk}) = A_{ij} A^\top_{ji} = A_{ij} A_{ij}$ δηλαδή το άθροισμα των τετραγώνων όλων των 9 συνιστωσών του πίνακα.

7.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

αφού οι συμμετρικοί πίνακες έχουν ορθογώνια ιδιοανύσματα. Έχουμε λοιπόν το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} 2a + b &= 4 && (3) \\ 2b + c &= 2 && (4) \\ a - 2b &= -3 && (5) \\ b - 2c &= 6 && (6) \end{aligned}$$

οπότε λύνοντας βρίσκουμε $a = 1$, $b = 2$, $c = -2$. Τα αποτελέσματα αυτά θα μπορούσαν να εξαχθούν και χωρίς την υπόθεση περί καθετότητας του 2ου ιδιοανύσματος αφού εμμέσως το γεγονός αυτό καθιστά το σύνολο των 4 εξισώσεων με 3 αγνώστους επιλύσιμο. Αν δεν είχε χρησιμοποιηθεί αυτή η ιδιότητα θα είχαμε 4 εξισώσεις με 4 αγνώστους. Ο 4ος άγνωστος θα ήταν η κλίση κ του 2ου ιδιοανύσματος $\vec{X}_2 = (x, \kappa x)^\top$.

8.

$$|z|^3 e^{3i\theta} = 2|z| \cos\theta$$

επομένως θα πρέπει $e^{3i\theta}$ να είναι πραγματικός: $3\theta = k\pi$ δηλαδή $\theta_i = 0, \pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3$. Συνεπώς

$$|z|^2 = 2\cos\theta_i / e^{3i\theta_i}$$

Οι 6 περιπτώσεις δίνουν

$$\begin{gathered} |z_1|^2 = 2 \Rightarrow z_1 = \sqrt{2}, \\ |z_2|^2 = 2(1/2)/(-1) = -1 \Rightarrow \text{αδύνατο}, \\ |z_3|^2 = 2(-1/2)/(1) = -1 \Rightarrow \text{αδύνατο}. \\ |z_4|^2 = 2(-1)/(-1) \Rightarrow z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi} = -\sqrt{2}, \\ |z_5|^2 = 2(-1/2)/(1) = -1 \Rightarrow \text{αδύνατο}, \\ |z_6|^2 = 2(1/2)/(-1) = -1 \Rightarrow \text{αδύνατο}. \end{gathered}$$

Συνεπώς μοναδικές λύσεις είναι οι $\pm\sqrt{2}$.

9. $\lambda_i' = 1/\lambda_i$, αφού $\mathbf{A}\vec{X}_i = \lambda_i \vec{X}_i \Rightarrow \vec{X}_i = \mathbf{A}^{-1}\lambda_i \vec{X}_i \Rightarrow (\lambda_i)^{-1}\vec{X}_i = \mathbf{A}^{-1}\vec{X}_i$. Τα ιδιοανύσματα του $\mathbf{A}$ παραμένουν ιδιοανύσματα και του $\mathbf{A}^{-1}$.

10. (α) Οι δύο αριθμοί σχηματίζουν τη διαγώνιο παραλληλόγραμμων με λόγο πλευρών $|z|/1$ και $1/|z|$ αλλά με κοινή γωνία.

$$\begin{aligned} \zeta_1\zeta_1^\star &= |z|^2 + 1 + (ze^{-itheta} + z^\star e^{i\theta}) \\ \zeta_2\zeta_2^\star &= 1 + |z|^2 + ((z/|z|)(|z|e^{-itheta} + (z^\star/|z|)|z|e^{i\theta}) && (7) \end{aligned}$$

Επομένως είναι ίδια. (β) Για να ισούνται θα πρέπει η διαφορά τους να είναι μηδενική:

$$0 = \zeta_1 - \zeta_2 = z + e^{i\theta} - (z/|z|) - |z|e^{i\theta} \Rightarrow z(|z|-1)/|z| = (|z|-1)e^{i\theta} \qquad (8)$$

Δηλαδή ή $|z| = 1$ ή $z = |z|e^{i\theta}$.