



Θέμα 1<sup>ο</sup>:

Σώμα κινείται σε ελικοειδή τροχιά ακτίνας  $R$  και σταθερού βήματος  $\beta$ , η οποία περιγράφεται από  $\varpi = R, z = \frac{\beta}{2\pi}\phi$  σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Σε κάθε χρόνο είναι  $\phi = \omega t$  με σταθερό  $\omega > 0$ .

(α) Βρείτε την ταχύτητα (σε κυλινδρικές συντεταγμένες) και το εφαπτόμενο μοναδιαίο της τροχιάς.

(β) Βρείτε την επιτάχυνση και τις επιτρόχια και κεντρομόλο συνιστώσες της.

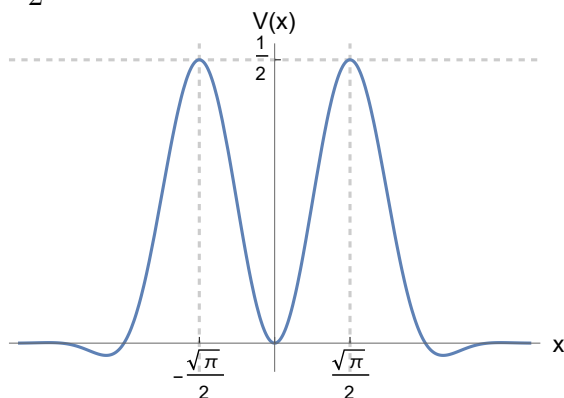
(γ) Βρείτε την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς.

(δ) Για ποιο  $\beta$  το κέντρο καμπυλότητας διαγράφει την ίδια έλικα;

Θέμα 2<sup>ο</sup>:

Σώμα μάζας  $m = 1$  κινείται στον άξονα  $x$  υπό την επίδραση πεδίου δύναμης με δυναμική ενέργεια

$$V = \frac{1}{2}\Omega^2 e^{-x^2} \sin(x^2), \text{ όπου } \Omega = 2^{1/4} e^{\pi/8}.$$



(α) Αν αρχικά βρίσκεται στο  $x_i = 0$  περιγράψτε την κίνηση ανάλογα με την τιμή της αρχικής του ταχύτητας  $v_i \geq 0$ .

(β) Βρείτε την περίοδο των μικρών ταλαντώσεων

γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας  $x = 0$ .

(γ) Έστω ο άξονας  $x$  περιστρέφεται γύρω από τον άξονα  $z$  με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega \hat{z}$  και το σώμα παραμένει πάντα πάνω στον άξονα  $x$ . Για ποιες τιμές της  $\omega$  το  $x = 0$  παραμένει ευσταθές σημείο ισορροπίας;

(δ – bonus) Έστω υπάρχει τριβή ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του άξονα  $x$ , με συντελεστή  $\mu$ . Ποια είναι η εξίσωση κίνησης κοντά στο  $x = 0$ ; (Ο άξονας περιστρέφεται όπως στο προηγούμενο ερώτημα.)

Θέμα 3<sup>ο</sup>:

Θεωρήστε έναν ταχυτητο-εξαρτώμενο ταλαντωτή, μάζας  $m = 1$ , με σημείο ισορροπίας το  $x = 0$ . Ο ταλαντωτής όταν κινείται με θετική ταχύτητα χαρακτηρίζεται από συχνότητα  $\omega^2 = 1$ , ενώ όταν κινείται με αρνητική ταχύτητα χαρακτηρίζεται από  $\omega^2 = 4$ .

(α) Το διάγραμμα φάσης του είναι κλειστή καμπύλη; Τι σχήμα έχει;

(β) Να υπολογιστεί η περίοδος του ταλαντωτή.

(γ) Αν το ακραίο θετικό σημείο που φτάνει ο ταλαντωτής είναι  $x_{\max} = 1$  και διέρχεται από αυτό τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , ποια είναι η μέγιστη τιμή που λαμβάνει η απόλυτη τιμή της ταχύτητας  $|v|$  και ποια χρονική στιγμή θα λάβει ο ταλαντωτής για πρώτη φορά την ταχύτητα αυτή;

(δ) Τη στιγμή που ο ταλαντωτής λαμβάνει τη μέγιστη αυτή (κατ' απόλυτη τιμή) ταχύτητα δρα πάνω στο σωματίδιο μια θετική δύναμη στιγμιαίας διάρκειας, αλλά ικανή να αλλάξει την ορμή του σώματος, δίνοντάς του ώθηση  $+2$ . Περιγράψτε την κίνηση του σώματος στη συνέχεια.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ: (δεν χρειάζονται απαραίτητα)

$$\vec{a} = (\ddot{\omega} - \dot{\omega}^2)\hat{\omega} + (2\dot{\omega}\dot{\phi} + \omega\ddot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z}$$

$$m\vec{a}_\sigma = \Sigma\vec{F} - m\vec{a}_0 - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_\sigma - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1<sup>ο</sup>:

(α)  $\vec{v} = \dot{\omega}\hat{\omega} + \omega\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}$  και αντικαθιστώντας  $\omega = R, \phi = \omega t, z = (\beta/2\pi)\omega t$  βρίσκουμε  $\vec{v} = R\omega\hat{\phi} + (\beta/2\pi)\omega\hat{z}$ .

Το εφαπτόμενο μοναδιαίο είναι

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{R\hat{\phi} + (\beta/2\pi)\hat{z}}{\sqrt{R^2 + (\beta/2\pi)^2}}$$

(β)  $\vec{a} = (\ddot{\omega} - \omega\dot{\phi}^2)\hat{\omega} + \frac{1}{\omega} \frac{d(\omega^2\dot{\phi})}{dt}\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z} = -R\omega^2\hat{\omega}$ .

(Η κίνηση μπορεί να θεωρηθεί επαλληλία ευθύγραμμης και ομαλής στην διεύθυνση  $z$ , για την οποία δεν υπάρχει επιτάχυνση, και ομαλής κυκλικής σε επίπεδο  $z = \text{σταθερό}$ , για την οποία η επιτάχυνση είναι η κεντρομόλος  $-R\omega^2\hat{\omega}$ .)

Επιτρόχια συνιστώσα της επιτάχυνσης δεν υπάρχει αφού η ταχύτητα έχει σταθερό μέτρο, κάτι που προκύπτει και από  $\vec{a} \cdot \hat{\varepsilon} = 0$ .

Επομένως  $\vec{a}_\kappa = \vec{a} - \vec{a}_\varepsilon = -R\omega^2\hat{\omega}$ .

(γ)  $a_\kappa = \frac{v^2}{R} \Leftrightarrow R = \frac{R^2 + (\beta/2\pi)^2}{R}$ .

(δ) Το κέντρο καμπυλότητας  $K$  κάθε στιγμή βρίσκεται πάνω στην διεύθυνση  $\hat{n} = -\hat{\omega}$ , δηλ. στο ίδιο  $z$  με το σώμα και σε απόσταση  $R > R$ . Επομένως διαγράφει την ίδια έλικα, ευρισκόμενο κάθε φορά στο αντιδιαμετρικό σημείο, αν  $R = 2R \Leftrightarrow \beta = 2\pi R$ .

Θέμα 2<sup>ο</sup>:

Η συνάρτηση  $V(x)$  είναι άρτια και αρκεί να μελετηθεί στο  $x \in [0, +\infty)$ .

Η παράγωγος  $V' = \Omega^2 x e^{-x^2} [\cos(x^2) - \sin(x^2)]$  μηδενίζεται για  $x = 0$  και για  $\tan(x^2) = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{n\pi + \pi/4}, n = 0, 1, 2, \dots$ . Η δεύτερη παράγωγος είναι  $V''(0) > 0$ , άρα η  $V$  έχει ελάχιστο στο  $x = 0$ , ίσο με  $V(0) = 0$  (όπως φαίνεται και στο σχήμα). Στα άλλα ακρότατα είναι  $V''(\sqrt{n\pi + \pi/4}) \propto -\cos(n\pi + \pi/4) \propto -(-1)^n$ , επομένως για άρτια  $n$  είναι μέγιστα και για περιττά  $n$  είναι ελάχιστα. Το πρώτο μέγιστο αντιστοιχεί σε  $x = \sqrt{\pi}/2$  και έχει τιμή  $V(\sqrt{\pi}/2) = 1/2$  (όπως φαίνεται και στο σχήμα).

(α) Για  $v_i = 0$  το σώμα μένει ακίνητο στο  $x = 0$ , αφού είναι σημείο ισορροπίας.

Για  $0 < E < 1/2 \Leftrightarrow 0 < v_i < 1$  το σώμα εκτελεί ταλάντωση μεταξύ των θέσεων όπου  $E = V(x)$  (τις

πρώτες τομές εκατέρωθεν του  $x = 0$ ).

Για  $E > 1/2 \Leftrightarrow v_i > 1$  το σώμα περνά το λόφο δυναμικού (και τους επόμενους που έχουν μικρότερο ύψος) και καταλήγει στο  $x = +\infty$  κινούμενο με ταχύτητα  $v_i$ .

Για  $E = 1/2 \Leftrightarrow v_i = 1$  το σώμα πλησιάζει επ' άπειρον το ασταθές σημείο ισορροπίας  $x = \sqrt{\pi}/2$ .

(β) Για  $|x| \ll 1$  είναι  $V(x) \approx V(0) + V'(0)x + \frac{1}{2}V''(0)x^2 = \frac{\Omega^2 x^2}{2}$ , άρα η εξίσωση κίνησης είναι  $\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\Omega^2 x^2}{2} = \text{σταθερά}$ , ή ισοδύναμα παραγωγίζοντας  $\dot{x} + \Omega^2 x = 0$ , οπότε η κυκλική συχνότητα είναι  $\Omega$  και η περίοδος  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ .

(γ) Στο περιστρεφόμενο σύστημα υπάρχει ολοκλήρωμα «ενέργειας», προσθέτοντας την δυναμική ενέργεια της φυγόκεντρου  $-\frac{m\omega^2 r_\perp^2}{2} = -\frac{\omega^2 x^2}{2}$ ,

αφού  $r_\perp = |x|$ . Άρα  $\frac{\dot{x}^2}{2} + V_\sigma(x) - \frac{\omega^2 x^2}{2} = \text{σταθερά}$ ,

όπου  $V_\sigma(x) = V(x) - \frac{\omega^2 x^2}{2}$ . Είναι  $V'_\sigma(0) = 0$  (παραμένει σημείο ισορροπίας). Για να είναι ευσταθές πρέπει  $V''_\sigma > 0 \Leftrightarrow \omega^2 < V''(0)$ , δηλ.  $|\omega| < \Omega$ .

(δ) Η σχέση  $m\vec{a}_\sigma = \Sigma \vec{F} - m\vec{a}_0 - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_\sigma - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - m\vec{\omega} \times \vec{r}$  δίνει  $\ddot{x}\hat{x} = -V'\hat{x} + \vec{N} + \vec{T} - 2\omega\dot{y}\hat{y} + \omega^2 x\hat{x}$  όπου  $\vec{N}$  η κάθετη αντίδραση και  $\vec{T}$  η τριβή. Η  $\hat{y}$  συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα δίνει  $\vec{N} = 2\omega\dot{y}\hat{y}$  και άρα  $|\vec{T}| = \mu|\vec{N}| = 2\mu|\omega\dot{x}|$ . Αφού η  $\vec{T}$  είναι αντίρροπη της ταχύτητας η διανυσματική της έκφραση είναι  $\vec{T} = -2\mu|\omega|\dot{x}\hat{x}$  και η  $\hat{x}$  συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα δίνει  $\ddot{x} = -V' - 2\mu|\omega|\dot{x} + \omega^2 x$ . Για κινήσεις κοντά στο  $x = 0$  είναι  $V' \approx V'(0) + V''(0)x = \Omega^2 x$ , επομένως η εξίσωση κίνησης είναι  $\ddot{x} = -\Omega^2 x - 2\mu|\omega|\dot{x} + \omega^2 x \Leftrightarrow \ddot{x} + 2\mu|\omega|\dot{x} + (\Omega^2 - \omega^2)x = 0$  (περιγράφει φθίνουσα ταλάντωση αν  $|\omega| < \Omega$ ).

Θέμα 3<sup>ο</sup>:

(α) Όταν ο ταλαντωτής κινείται με θετική ταχύτητα (δηλαδή,  $\dot{x} > 0$  - πάνω από τον άξονα  $x$ ) η καμπύλη θα έχει τη μορφή

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2} = E$$

και όταν ο ταλαντωτής κινείται με αρνητική ταχύτητα (δηλαδή,  $\dot{x} < 0$  - κάτω από τον άξονα  $x$ ) η

καμπύλη θα έχει τη μορφή

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + 4\frac{x^2}{2} = E'.$$

Οι  $E, E'$  δεν είναι κατ' ανάγκη ίσες αφού όταν το σωματίδιο φτάσει με θετική (αρνητική) ταχύτητα στην μέγιστη (ελάχιστη) θέση και αντιστραφεί η φορά της κίνησης η σταθερά επαναφοράς  $k = m\omega^2$  αλλάζει τιμή έτσι ώστε να προσαρμόζεται η δυναμική ενέργεια στην αλλαγή που συμβαίνει στο  $\omega^2$ . Επιπλέον επειδή στα ακραία σημεία η ταχύτητα μηδενίζεται ισχύει ότι  $E' = 4E$ . Οι καμπύλες λοιπόν που περιγράφουν την κίνηση στο χώρο των φάσεων είναι (α) (για θετικά  $v$ ) μια ημιέλλειψη με ημιμάξονα στον  $x$ ,  $a = \sqrt{2E}$  και ημιμάξονα στον  $v$ ,  $b = \sqrt{2E}$  (δηλαδή ημικόκλιο) και (β) (για αρνητικά  $v$ ) μια ημιέλλειψη με ημιμάξονα στον  $x$ ,  $a' = \sqrt{2E'/4} = \sqrt{2E} = a$  και ημιμάξονα στον  $v$ ,  $b' = \sqrt{2E'} = 2\sqrt{2E} = 2b$ .

(β) Η περίοδος του ταλαντωτή θα είναι

$$T = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{\omega_1} + \frac{2\pi}{\omega_2} \right) = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.$$

(γ) Όπως φαίνεται από το διάγραμμα φάσης η μέγιστη κατ' απόλυτη τιμή ταχύτητα θα είναι αυτή στο κατώτερο σημείο δηλαδή θα είναι στο  $x = 0$ , καθώς κινείται προς τα αρνητικά. Έτσι

$$|v|_{\max} = b' = 2\sqrt{2E} = 2a = 2x_{\max} = 2.$$

Αυτό θα συμβεί μετά από  $T_2/4 = \pi/4$ .

(δ) Δεδομένου ότι στο σημείο αυτό η ταχύτητα είναι αρνητική και ίση με  $v = -2$ , η ώθηση θα εκμηδενίσει την ταχύτητα στιγμιαία και το σωματίδιο θα βρεθεί ακίνητο στην θέση ισορροπίας. Επομένως στη συνέχεια (για  $t > \pi/4$ ) θα είναι

$$x(t) = 0.$$