



**Θέμα 1<sup>ο</sup>:**

Σώμα μάζας  $m = 1$  κινείται ευθύγραμμα υπό την επίδραση δύναμης αντίστασης  $F = -v - 0.1v^{1.5}$ , έχοντας αρχική θέση  $x|_{t=0} = 0$  και αρχική ταχύτητα  $v|_{t=0} = 1$  (όλα σε κατάλληλες μονάδες).

Βρείτε προσεγγιστικά:

(α) την ταχύτητα σε κάθε χρόνο

(πρέπει να προκύψει  $v = \frac{4}{5}e^{-t} + \frac{1}{5}e^{-1.5t}$ ),

(β) τη θέση σε κάθε χρόνο,

(γ) το διάστημα που διανύει το σώμα μέχρι να σταματήσει,

(δ) το συνολικό χρόνο κίνησης.

**Θέμα 2<sup>ο</sup>:**

Ένας μονοδιάστατος αρμονικός ταλαντωτής αποτελείται από μια μάζα  $m = 1$  συνδεδεμένη σε ένα ελατήριο σταθεράς  $k = 1$  και η οποία μπορεί να κινείται επί του οριζώντιου άξονα  $x$ . Ο ταλαντωτής υφίσταται μια δύναμη αντίστασης της μορφής  $F_{αντ} = -2v$  όπου  $v$  η ταχύτητα αυτού. Αρχικά ο ταλαντωτής είναι ακίνητος στη θέση ισορροπίας του,  $x = 0$ , και δέχεται σταθερή δύναμη  $F = 1$ .

(α) Να βρεθεί η  $x(t)$  του ταλαντωτή.

(β) Τη στιγμή που ο ταλαντωτής στιγμιαία παύει να επιταχύνεται για πρώτη φορά μετά την επενέργεια της εξωτερικής δύναμης, η εξωτερική αυτή δύναμη εξαφανίζεται. Πότε συμβαίνει αυτό;

(γ) Πότε ο ταλαντωτής θα φτάσει στην κοντινότερη απόσταση από το σημείο που θα έφτανε τελικά ο ταλαντωτής αν δεν άλλαζε η εξωτερική δύναμη;

**Θέμα 3<sup>ο</sup>:**

Ένα σωματίδιο μοναδιαίας μάζας, κινείται υπό την

επίδραση δύναμης της μορφής  $F(x) = -|x|/x$  για  $x \neq 0$  και  $F(x) = 0$  για  $x = 0$ .

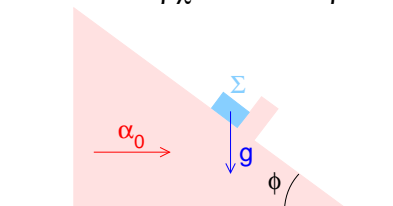
(α) Να γραφεί η έκφραση για τη δυναμική ενέργεια του σωματιδίου και να κατασκευαστεί το γράφημά της.

(β) Σχεδιάστε την κίνηση στο χώρο των φάσεων για δύο διαφορετικές τιμές της ενέργειας. Υπάρχει κάτι ιδιαίτερο στα διαγράμματα αυτά όταν το σωματίδιο διέρχεται από τη θέση  $x = 0$ ;

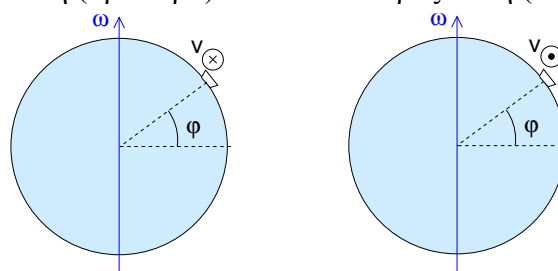
(γ) Υπολογίστε την περίοδο του αντίστοιχου ταλαντωτή, αν αυτός κινείται στο διάστημα  $[-1/2, 1/2]$ .

**Θέμα 4<sup>ο</sup>:**

(α) Πάνω στη λεία σφήνα του σχήματος ισορροπεί σώμα  $\Sigma$  (ένα εμπόδιο εμποδίζει την κάθοδό του). Τι οριζόντια επιτάχυνση  $\vec{a}_0$  πρέπει να δώσουμε στη σφήνα ώστε το  $\Sigma$  να αρχίσει να ανεβαίνει;



(β) Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε δύο πλοία που ταξιδεύουν στον παράλληλο με γεωγραφικό πλάτος  $\varphi = 60^\circ$ , με ταχύτητα  $V = 50$  km/h, το ένα προς ανατολή (αριστερά) και το άλλο προς δύση (δεξιά).



Μέσα στα πλοία ζυγίζεται μία μάζα  $m = 10$  kg. Ποια η διαφορά στις ενδείξεις των δύο ζυγαριών;

**ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ:** (δεν χρειάζονται απαραίτητα)

$$\vec{v}_a = \vec{v}_0 + \vec{v}_\sigma + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad m\vec{a}_\sigma = \Sigma \vec{F} - m\vec{a}_0 - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_\sigma - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}.$$

Η γενική λύση της  $\frac{df(t)}{dt} + f(t) = \kappa e^{\lambda t}$  με σταθερά  $\kappa$  και  $\lambda$  είναι  $f(t) = De^{-t} + \frac{\kappa}{\lambda + 1}e^{\lambda t}$ .

Η γενική λύση της  $\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 2\frac{df(t)}{dt} + f(t) = 0$  είναι  $f(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t}$ .

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1<sup>ο</sup>:

(α) Μπορούμε να επιλύσουμε διαταρακτικά την εξίσωση κίνησης  $\dot{v} = -v - 0.1v^{1.5}$  θεωρώντας μικρή παράμετρο τον συντελεστή του δεύτερου όρου της αντίστασης.

Σε μηδενική τάξη  $\dot{v}^{(0)} = -v^{(0)}$ . Αυτή είναι ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές και έχει γενική λύση (βρίσκεται με χαρακτηριστικό πολώνυμο)  $v^{(0)} = Ce^{-t}$ . Από αρχική συνθήκη  $C = 1$  οπότε  $v^{(0)} = e^{-t}$ .

(Ισοδύναμα χωρίζουμε μεταβλητές  $\frac{dv^{(0)}}{v^{(0)}} = -dt$

και ολοκληρώνουμε  $\int_1^{v^{(0)}} \frac{dv^{(0)}}{v^{(0)}} = -\int_0^t dt \Leftrightarrow$

$$[\ln v^{(0)}]_1^{v^{(0)}} = -t \Leftrightarrow v^{(0)} = e^{-t}.)$$

Προσθέτοντας διαταραχή, δηλ. θέτοντας στην εξίσωση κίνησης  $v = v^{(0)} + v^{(1)}$ , έχουμε προσεγγιστικά  $\dot{v}^{(0)} + \dot{v}^{(1)} = -v^{(0)} - v^{(1)} - 0.1[v^{(0)}]^{1.5}$ .

Αντικαθιστώντας την  $v^{(0)} = e^{-t}$  βρίσκουμε

$$\dot{v}^{(1)} + v^{(1)} = -0.1e^{-1.5t}.$$

Αυτή είναι μη-ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές. Η λύση της ομογενούς είναι  $De^{-t}$  και μια μερική λύση είναι  $Ae^{-1.5t}$  με την αντικατάσταση να δίνει  $A = \frac{1}{5}$ . Άρα

η γενική λύση είναι  $v^{(1)} = De^{-t} + \frac{1}{5}e^{-1.5t}$ . Πρέπει  $v^{(1)}|_{t=0} = 0$  (αφού η αρχική συνθήκη  $v|_{t=0} = 1$  ικανοποιείται από την  $v^{(0)}$ ), οπότε  $D = -\frac{1}{5}$  και

$v^{(1)} = -\frac{1}{5}e^{-t} + \frac{1}{5}e^{-1.5t}$ . Έτσι καταλήγουμε στην προσεγγιστική λύση  $v = \frac{4}{5}e^{-t} + \frac{1}{5}e^{-1.5t}$ .

(β) Θέτοντας  $v = \frac{dx}{dt}$  και ολοκληρώνοντας έχουμε

$$x = \int_0^t \left( \frac{4}{5}e^{-t} + \frac{1}{5}e^{-1.5t} \right) dt = \frac{14}{15} - \frac{4}{5}e^{-t} - \frac{2}{15}e^{-1.5t}.$$

(Μπορεί να θεωρηθεί άθροισμα της  $x^{(0)} = \int_0^t v^{(0)} dt = 1 - e^{-t}$  και της  $x^{(1)} = \int_0^t v^{(1)} dt = -\frac{1}{15} + \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{2}{15}e^{-1.5t}$ .)

(γ) Σε μεγάλους χρόνους  $x \approx \frac{14}{15}$ .

(δ) Το εκθετικό  $e^{-1.5t}$  πρακτικά μηδενίζεται όταν  $1.5t \approx 5 \Leftrightarrow t \approx 3$  ενώ το εκθετικό  $e^{-t}$  πρακτικά μηδενίζεται όταν  $t \approx 5$  (σβήνει πιο

αργά). Επομένως η θέση προσεγγίζει την τελική τιμή πρακτικά σε χρόνο  $t \approx 5$ .

Μπορούν να βρεθούν οι ακριβείς σχέσεις σε κλειστή μορφή για το συγκεκριμένο πρόβλημα και γενικότερα για το  $\dot{v} = -v - kv^{1+1/n}$  με  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Η σχέση ταχύτητας-χρόνου προκύπτει από την

$$\begin{aligned} \text{ολοκλήρωση } t &= \int_0^t dt = \int_1^v \frac{dv}{\dot{v}} = \\ &= -\int_1^v \frac{v^{-1/n-1} dv}{v^{-1/n} + k} = n \ln \frac{v^{-1/n} + k}{1 + k} \text{ και αντιστρέ-} \\ &\text{φοντας } v = \frac{1}{[(1+k)e^{t/n} - k]^n}. \end{aligned}$$

Η σχέση θέσης-χρόνου προκύπτει από  $x = \int_0^t v dt$ ,

ανάγεται στο  $\int \frac{d\xi}{(1 - e^\xi)^n}$  που βρίσκεται γράφο-

ντας  $\frac{1}{(1 - e^\xi)^n} = 1 + \left(\frac{1}{1 - e^\xi} - 1\right) \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{(1 - e^\xi)^\nu} =$

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{e^\xi}{(1 - e^\xi)^{\nu+1}} - \frac{e^{-\xi}}{1 - e^{-\xi}}. \text{ Έτσι } \int \frac{d\xi}{(1 - e^\xi)^n} =$$

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu(1 - e^\xi)^\nu} - \ln |1 - e^{-\xi}| + \text{σταθερά και τελικά}$$

$$x = \frac{n}{(-k)^n} \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{(-k)^\nu}{\nu} \left\{ \frac{1}{[(1+k)e^{t/n} - k]^\nu} - 1 \right\} -$$

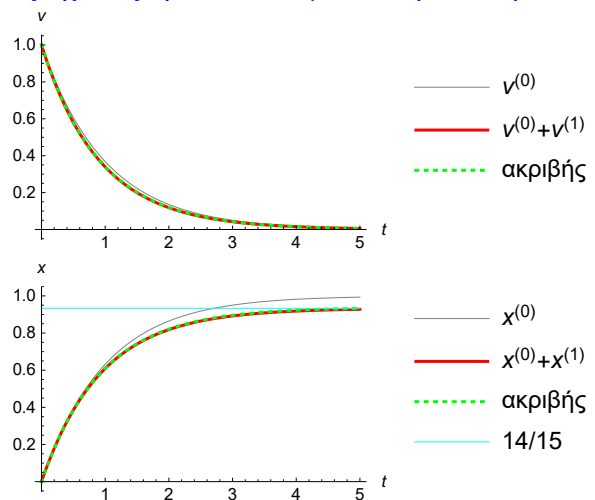
$\frac{n}{(-k)^n} \ln |1 + k - ke^{-t/n}|$  (για  $n = 1$  δεν υπάρχει ο πρώτος όρος με το άθροισμα).

Αν  $|k| \ll 1$  αναπτύσσοντας ως προς  $k$  έχουμε

$$v \approx (1 - nk)e^{-t} + nke^{-(1+1/n)t} \text{ και}$$

$$x \approx 1 - \frac{nk}{n+1} - (1 - nk)e^{-t} - \frac{n^2k}{n+1}e^{-(1+1/n)t}.$$

Ίδιες σχέσεις προκύπτουν με διαταρακτική επίλυση.



### Θέμα 2<sup>ο</sup>:

(α)  $m\ddot{x} = -2\dot{x} - kx + 1 \Rightarrow \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 1$ .  
 Η ειδική λύση είναι  $x_s(t) = 1$  και η γενική λύση  $x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + 1$ . Επιβάλλοντας τις δοθείσες αρχ. συνθήκες  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$  βρίσκουμε  $C_1 = C_2 = -1$  οπότε η θέση του ταλαντωτή θα δίνεται από την έκφραση

$$x(t) = 1 - (1+t)e^{-t}.$$

(β) Η επιτάχυνση του ταλαντωτή θα είναι σε κάθε χρονική στιγμή  $\ddot{x} = -2\dot{x} - x + 1$  οπότε κατόπιν υπολογισμού της  $\dot{x} = +e^{-t}(1+t) - e^{-t} = te^{-t}$ , βρίσκουμε

$$\ddot{x} = -2te^{-t} - [1 - (1+t)e^{-t}] + 1 = e^{-t}(1-t).$$

Επομένως η επιτάχυνση θα μηδενιστεί όταν  $t_1 = 1$ .

(γ) Για χρόνο μεγαλύτερο του  $t_1$  ο ταλαντωτής συνεχίζει να κινείται βάσει της  $\dot{x}' + 2x' + x' = 0$  με αντίστοιχη λύση  $x'(t) = [C'_1 + C'_2(t - t_1)]e^{-(t-t_1)}$  με  $x(t_1) = C'_1$  τη θέση που είχε αποκτήσει κατά την πρότερη κίνηση δηλαδή  $1 - 2e^{-1}$  και ταχύτητα  $\dot{x}'(t_1) = -C'_1 + C'_2$  αυτήν που είχε αποκτήσει κατά την πρότερη κίνηση δηλαδή  $e^{-1}$ . Από τις 2 αυτές εκφράσεις καταλήγουμε ότι  $C'_1 = 1 - 2e^{-1}$  και  $C'_2 = 1 - e^{-1}$ . Συνολικά λοιπόν για  $t > t_1$  η κίνηση θα δίνεται από την έκφραση

$$x'(t) = [(1 - 2e^{-1}) + (1 - e^{-1})(t - t_1)]e^{-(t-t_1)}.$$

Ενώ αρχικά (αν δεν έσβηνε η εξωτερική δύναμη) το σωματίδιο θα πλησίαζε ασυμπτωτικά τη θέση ισορροπίας  $x_\infty = 1$ , τώρα το σωματίδιο θα φτάσει στην απώτερη απόσταση από το νέο σημείο ισορροπίας  $x'_\infty = 0$  όταν η ταχύτητά του θα μηδενιστεί, δηλαδή όταν

$$\begin{aligned} \dot{x}' = 0 &\Rightarrow (1 - e^{-1})e^{-(t-t_1)} \\ &- [(1 - 2e^{-1}) + (1 - e^{-1})(t - t_1)]e^{-(t-t_1)} = 0 \end{aligned}$$

Αυτό συμβαίνει όταν  $t_2 = t_1 + 1/(e - 1)$ .

Δεν μετρήθηκε στη βαθμολόγηση: Το ερώτημα, βέβαια, είναι αν ο ταλαντωτής στο χρονικό αυτό διάστημα κατάφερε (με την αρχική ταχύτητα που είχε) να φτάσει στο  $x_\infty$  ή όχι. Η αντίστοιχη υπερβατική εξίσωση  $x'(t) = 1$  δεν είναι εύκολο να λυθεί, αλλά γνωρίζουμε πως στο διάστημα  $t \in [t_1, t_2]$  η συνάρτηση  $x'(t)$  είναι αύξουσα αφού ξεκίνησε με θετική ταχύτητα ( $e^{-1}$ ) και στο τέλος του διαστήματος αυτού μηδενίστηκε η ταχύτητα. Επομένως

αρκεί να υπολογίσουμε την τιμή  $x'(t_2)$ . Μετά από πράξεις βρίσκουμε

$$x'(t_2) = \frac{(e-1)}{e} e^{-1/(e-1)} = 0.353.$$

Η απόσταση αυτή δεν προσπερνά την  $x_\infty$  και επομένως στον παραπάνω χρόνο  $t_2$  η απόσταση από το  $x_\infty$  ελαχιστοποιείται και ισούται με  $1 - 0.353 = 0.647$ .

### Θέμα 3<sup>ο</sup>:

$$(α) V(x) = - \int_0^x F(x') dx' = \dots = |x|.$$

Το γράφημά της είναι τριγωνικού σχήματος.

(β) Επιτρεπόμενες ενέργειες είναι μόνο οι θετικές  $E > V(x)$ . Η ταχύτητα είναι  $\dot{x}^2/2 + |x| = E \Rightarrow \dot{x} = \pm \sqrt{2(E - |x|)}$ . Πρόκειται για παραβολές με άξονα συμμετρίας τον άξονα  $x$ . Για  $x \geq 0$  οι παραβολές κοιτάζουν (έχουν τα κοίλα στραμμένα) προς τα αριστερά και για  $x < 0$  οι παραβολές κοιτάζουν προς τα δεξιά. Στο σημείο  $x = 0$  οι αντικριστές παραβολές τέμνονται με διαφορετική κλίση  $dv/dx = (dv/dt)v = Fv/m$  που αντικατοπτρίζει την ασυνέχεια της δύναμης στο σημείο αυτό. Όλες οι καμπύλες στο χώρο των φάσεων έχουν ροή ωρολογιακή.

(γ) Στην περίπτωση μας δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την περίοδο από την  $V''$  στο κατώτερο σημείο, αφού αυτή δεν ορίζεται στο σημείο αυτό.

Για τον υπολογισμό της περιόδου μπορούμε να εκτελέσουμε τον υπολογισμό

$$\begin{aligned} T &= 4 \int_0^{1/2} dx/v = 4 \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{2(E - |x|)}} \\ &= 4 \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{2(1/2 - x)}} = 4 \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x}} = 4 \end{aligned}$$

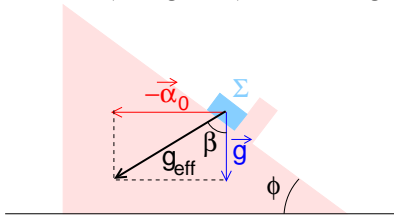
όπου χρησιμοποιήσαμε την τιμή της ενέργειας με δεδομένο το ακρότατο σημείο  $E = |x_{\max}| = 1/2$ . Εναλλακτικά μπορούμε να κάνουμε τον υπολογισμό δεδομένου ότι έχουμε ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση:

$$x(t) = v_0 t - t^2/2$$

με απώτερο σημείο  $x_{\max} = 1/2 = x(t = v_0) = v_0^2/2$ , δηλαδή για  $v_0 = 1$ . Έτσι η μισή περίοδος (από το 0, πίσω στο 0) θα δίνεται από την λύση της  $0 = t - t^2/2 = t(2 - t)/2$  δηλαδή για  $t = 2$ . Η συνολική λοιπόν περίοδος θα είναι 4.

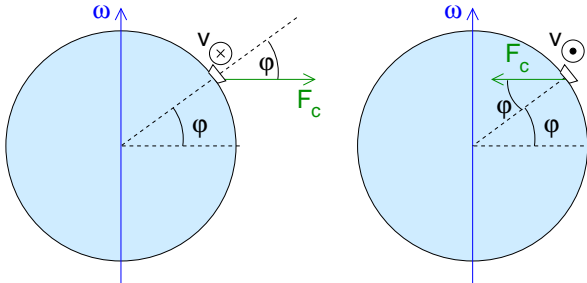
**Θέμα 4<sup>ο</sup>:**

(α) Η συνιστώσα του  $\vec{g}_{\text{eff}} = \vec{g} - \vec{a}_0$  πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο πρέπει να έχει φορά προς τα πάνω, δηλ. πρέπει  $a_0 \cos \phi > g \sin \phi \Leftrightarrow a_0 > g \tan \phi$ .



Ισοδύναμα πρέπει  $\beta > \phi$  όπου  $\tan \beta = a_0/g$ .

(β) Στο σύστημα αναφοράς που περιστρέφεται με τη Γη και έχει αρχή σε τόπο κοντά στα πλοία η διαφορά οφείλεται στη δύναμη Coriolis  $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}$  που έχει ίδιο μέτρο  $F_c = 2m\omega V$  αλλά αντίθετη φορά όπως φαίνεται στα σχήματα (φαινόμενο Εöttnös).



Λόγω της κατακόρυφης συνιστώσας της  $F_c \cos \phi$  στο αριστερά πλοίο η ζυγαριά θα δείξει  $2m\omega V \cos \phi$  λιγότερο και στο δεξιά  $2m\omega V \cos \phi$  περισσότερο.

Η διαφορά των δύο ενδείξεων είναι  $4m\omega V \cos \phi = 0.02 \text{ N}$  (αντικαθιστώντας  $m = 10 \text{ kg}$ ,  $\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600 \text{ s}}$ ,  $V = 50 \times \frac{10^3 \text{ m}}{3600 \text{ s}}$ ,  $\cos \phi = \frac{1}{2}$ ).

(Η διαφορά σε μάζα είναι  $\frac{0.02 \text{ N}}{g} \approx 2 \text{ γραμμάρια}$ .)

Η διαφορά θα βρισκόταν ίδια σε όποιο σύστημα αναφοράς και αν εργαζόμασταν. Π.χ. στο αδρανειακό με αρχή το κέντρο της Γης η μάζα εκτελεί κυκλική τροχιά ακτίνας  $R \cos \phi$  με γωνιακή ταχύτητα  $\omega \pm \frac{V}{R \cos \phi}$  (πάνω πρόσημο για το αριστερά πλοίο και κάτω για το δεξιά). Η συνισταμένη βάρους και αντίδρασης από τη ζυγαριά δίνει την κεντρομόλο η οποία έχει φορά προς το κέντρο της τροχιάς και μέτρο  $m(\omega \pm \frac{V}{R \cos \phi})^2 R \cos \phi$ .

Η προβολή της διανυσματικής αυτής σχέσης πάνω στην κατακόρυφο δίνει ότι η ένδειξη της ζυγαριάς είναι μικρότερη από το βάρος κατά

$$m(\omega \pm \frac{V}{R \cos \phi})^2 R \cos^2 \phi = m\omega^2 R \cos^2 \phi + m(\frac{V}{R \cos \phi})^2 R \cos^2 \phi \pm 2m\omega V \cos \phi.$$

Ο πρώτος όρος είναι μέρος του  $g_{\text{eff}}$  σε κάθε τόπο και ο δεύτερος είναι αμελητέος σε σχέση με τον πρώτο (ούτως ή άλλως οι όροι αυτοί είναι κοινοί στα δύο πλοία). Η διαφορά στις ενδείξεις οφείλεται στον τρίτο όρο και είναι  $4m\omega V \cos \phi$ .