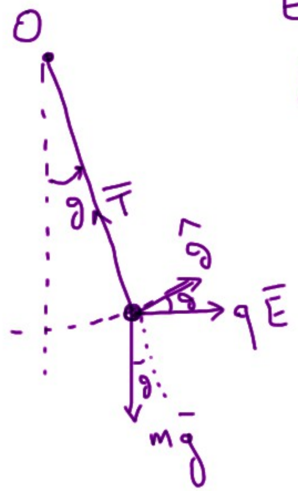
# Θέμα 2 εξέτασης 26/4/2010




$E = E_0 \sin(\omega t)$.

Αρχικά $(t=0)$ $\upsilon = 0$, $\theta = 0$.

(α) $\bar{\upsilon} = R\dot{\theta}\,\hat{\theta}$, $\bar{\alpha} = R\ddot{\theta}\,\hat{\theta} - R\dot{\theta}^2\,\hat{r}$

Νόμος Νεύτωνα πάνω στο $\hat{\theta}$:

$$mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + qE\cos\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = \frac{qE_0}{mR}\cos\theta\,\sin(\omega t)} \quad (*)$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$, $\omega = 3\omega_0$, $|\theta(t)| \ll 1$

(β) $\theta(t) =$;

$\sin(3\varphi) = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$

περίοδος $=$;

$\theta_{max} =$;

Για $|\theta| \ll 1$, $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1 \cancel{-\frac{\theta^2}{2}} \approx 1$

$$(*) \rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = \frac{qE_0}{mR}\sin(3\omega_0 t)$$

$\theta_{\mu\varepsilon\rho} = A\sin(3\omega_0 t)$ με $-9\omega_0^2 A + \omega_0^2 A = \frac{qE_0}{mR} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow A = -\frac{qE_0}{8mR\omega_0^2}.$$

Άρα γενική λύση $\theta = C_1\sin(\omega_0 t) + C_2\cos(\omega_0 t) - \frac{qE_0}{8mg}\sin(3\omega_0 t)$

$$\theta\big|_{t=0}=0 \Leftrightarrow c_2=0\,, \qquad \dot\theta\big|_{t=0}=0 \Leftrightarrow c_1\omega_0-\frac{3\omega_0 qE_0}{8mg}=0 \Leftrightarrow c_1=\frac{3qE_0}{8mg}$$

Δηλ. $$\theta(t)=\frac{qE_0}{8mg}\Big[3\underbrace{\sin(\omega_0 t)}_{\text{περίοδος }\frac{2\pi}{\omega_0}}-\underbrace{\sin(3\omega_0 t)}_{\text{περίοδος }\frac{2\pi}{3\omega_0}}\Big]=\frac{qE_0}{2mg}\sin^3(\omega_0 t)$$

Περίοδος: $T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

$$\theta_{max}=\frac{|qE_0|}{8mg}(3+1)=\frac{|qE_0|}{2mg} \quad \text{για} \quad \omega_0 t=\frac{\pi}{2}$$

Για να είναι $|\theta|<<1$ σε κάθε χρόνο πρέπει $|E_0|<<\dfrac{2mg}{|q|}$.

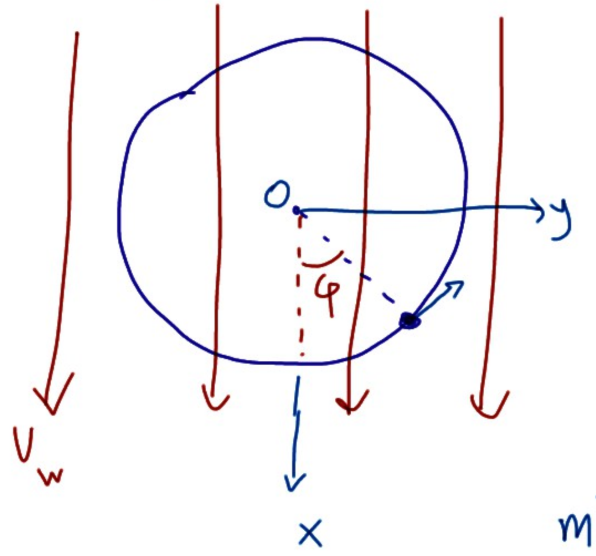
(γ) Στο διάστημα $0<t<t$ το πεδίο $\bar E$ έχει δώσει ενέργεια

ένας τρόπος $\displaystyle\int_0^t q\bar E\cdot\bar\upsilon\, dt$ με $\bar\upsilon=R\dot\theta\hat\theta$, $\bar E\cdot\bar\upsilon\approx E_0\sin(\omega t)\cdot\underbrace{\cos\theta}_{\approx 1}\cdot R\dot\theta$

Πιο εύκολα: η ενέργεια έγινε $$\Delta E_{μηχ}=\Delta\left(\frac{m\upsilon^2}{2}-mgR\cos\theta\right)=\frac{m\upsilon^2}{2}-mgR\underbrace{\cos\theta}_{1-\theta^2/2}-(0-mgR)=$$

$$=\frac{mR^2\dot\theta^2}{2}+\frac{mgR\theta^2}{2}$$

Θέμα 2 εξέτασης 2/9/2010.




$$\bar F = -c\,\bar v_{\sigma\chi} = -c\left(\bar v - \bar v_w\right)$$

(α) εξίσωση κίνησης για την φ:

Σε πολικές $\bar V_w = V_w \hat x$

$r = R$, $\bar v = R\dot\varphi\hat\varphi$, $\bar\alpha = R\ddot\varphi\hat\varphi - R\dot\varphi^2\hat r$

$m\bar\alpha = m\bar g + \bar N + \bar F$ στην $\hat\varphi$ κατεύθυνση

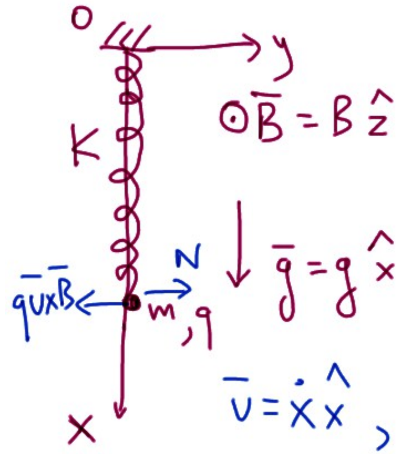
$$mR\ddot\varphi = \bar F\cdot\hat\varphi = -c\left(R\dot\varphi\hat\varphi - V_w\hat x\right)\cdot\hat\varphi \xRightarrow[\hat x\cdot\hat\varphi = -\sin\varphi]{\hat\varphi = -\sin\varphi\,\hat x + \cos\varphi\,\hat y}$$

$$\boxed{\ddot\varphi + \frac{c}{m}\dot\varphi + \frac{cV_w}{mR}\sin\varphi = 0}$$

(β) Για $|\varphi| \ll 1$, $\sin\varphi \approx \varphi$ και $\ddot\varphi + \frac{c}{m}\dot\varphi + \frac{cV_w}{mR}\varphi = 0$

δηλ. ταλάντωση με απόσβεση.

1η άσκηση από 7η εργασία 2015-2016:




$K = m\omega^2$

Τριβή ολίσθησης συντελεστή $\mu$.

Εξίσωση κίνησης;

$$m\bar{\alpha} = m\bar{g} + \bar{F}_{\varepsilon\lambda} + q\bar{v}\times\bar{B} + \bar{N} + \bar{T}$$

$\bar{v} = \dot{x}\hat{x}$, $\bar{\alpha} = \ddot{x}\hat{x}$, $\bar{g} = g\hat{x}$, $\bar{F}_{\varepsilon\lambda} = -m\omega^2(x-\ell_0)\hat{x}$, $q\bar{v}\times\bar{B} = q\dot{x}B\hat{x}\times\hat{z} = -q\dot{x}B\hat{y}$

$\bar{T} = -|\bar{T}|\dfrac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = -\mu|\bar{N}|\dfrac{\dot{x}}{|\dot{x}|}\hat{x}$, $\bar{N} = N\hat{y}$

Νόμος Νεύτωνα $\hat{y}$: $0 = -q\dot{x}B + N \Leftrightarrow N = q\dot{x}B$ (1)

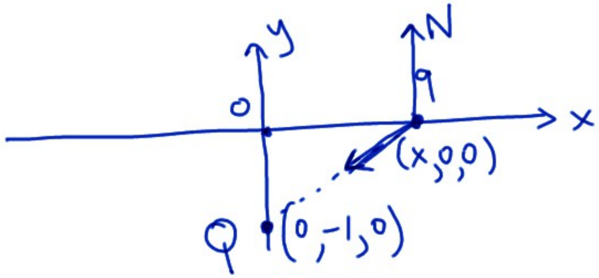
-"- $\hat{x}$: $m\ddot{x} = mg - m\omega^2(x-\ell_0) - \mu|\bar{N}|\dfrac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$ (2)

(2) $\xrightarrow{(1)}$ $m\ddot{x} = mg - m\omega^2(x-\ell_0) - \mu|qB|\dot{x}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \mu\frac{|qB|}{m}\dot{x} + \omega^2 x = g + \omega^2\ell_0}$$

φθίνουσα ταλάντωση με σημείο ισορροπίας την $x_{\iota\sigma} = \dfrac{g+\omega^2\ell_0}{\omega^2}$.

Θέμα 2 από εξέταση 26|9|2016




$m=1$
$q$

$$\bar F = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\bar r - \bar r_Q}{|\bar r - \bar r_Q|^3} =$$

$$= -\frac{x\hat x + \hat y}{(x^2+1)^{3/2}}$$ αφού $\bar r = x\hat x$, $\bar r_Q = -\hat y$

$$\bar N = N\hat y$$

τριβή $\bar T$ συντελεστής μ.

(α) Αν $T=0$ ποιο το ολοκλήρωμα ενέργειας;

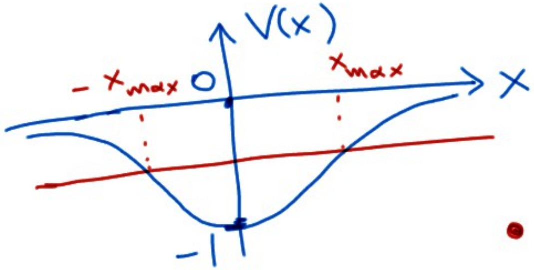
$$m\bar\alpha = \bar N + \bar F + \cancel{\bar T} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot x = \dfrac{-x}{(x^2+1)^{3/2}} = F_x(x) & (1)\\ 0 = N - \dfrac{1}{(x^2+1)^{3/2}} & (2)\end{cases}$$

Η (1) ισοδύναμη με $\frac{\dot x^2}{2} + V(x) = E$ με $V(x) = -\int F_x(x)\,dx =$

$$= \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \cancel{c}^{\,0}$$ (όπως περίμενα $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{|\bar r - \bar r_Q|}$)

$V(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ , $V'(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^{3/2}} > 0$ για $x>0$ (αύξουσα)

άρα




$$\frac{v_0^2}{2} + \underbrace{V(0)}_{-1} = E \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{2(E+1)}$$

- $E = -1 \Leftrightarrow v_0 = 0$ : ακίνητο στο $x=0$
- $-1 < E < 0 \Leftrightarrow 0 < v_0 < \sqrt{2}$ : ταλάντωση

$|x| \leq x_{max}$ όπου $V(x_{max}) = E \Leftrightarrow x_{max} = \sqrt{\dfrac{1}{E^2} - 1}$

- $E > 0 \Leftrightarrow v_0 > \sqrt{2}$ : πηγαίνει στο $+\infty$.
- $E = 0 \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{2}$ : πηγαίνει στο $+\infty$ (φτάνει εκεί με $v_\infty = 0$)

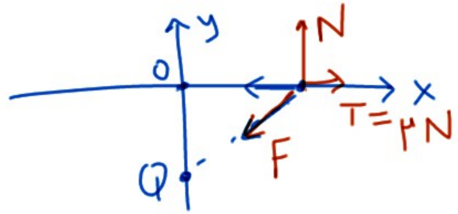
Για $v_0 \ll 1$ μικρές ταλαντώσεις. $V'(x) \simeq x$ άρα $m\ddot{x} = -V'(x)$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} = -x \Leftrightarrow \ddot{x} + x = 0 \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x &= C_1 \sin t + C_2 \cos t \\ \dot{x} &= C_1 \cos t - C_2 \sin t \end{aligned}\right\}$$

Αρχικά $x|_{t=0} = 0 \Leftrightarrow C_2 = 0$, $\dot{x}|_{t=0} = v_0 \Leftrightarrow C_1 = v_0$ άρα $x = v_0 \sin t$, $\boxed{v = v_0 \cos t}$

(β) $\underline{\text{με τριβή}}$ : $\quad x\big|_{t=0} = 1 \,,\quad \dot{x}\big|_{t=0} = 0$

Αν $\dot{x}\big|_{x=0} = 0$ ποιο το $\mu$;




$$m\ddot{x}\,\hat{x} = N\hat{y} + \overline{T} + \overline{F}$$

$$\overline{T} = -|\overline{T}|\frac{\dot{x}\,\hat{x}}{|\dot{x}|} \quad \text{με} \quad |\overline{T}| = \mu|\overline{N}|$$

$$\Leftrightarrow \quad \hat{x}: \quad \ddot{x} = -\mu|N|\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} - \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}} \quad (1)$$

$$\hat{y}: \quad 0 = N - \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} \quad (2)$$

$$(2) \rightarrow N = \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} \quad \text{και} \quad (1) \xrightarrow{(2)} \boxed{\ddot{x} = -\mu\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} - \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}} \quad (*)$$

$$(*) \xrightarrow{\dot{x}<0} \ddot{x} = \frac{\mu - x}{(x^2+1)^{3/2}}$$

Θέτω $\ddot{x} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = u\frac{du}{dx} = \frac{d(u^2/2)}{dx}$ και έχω

$$\int_0^0 d(u^2/2) = \int_1^0 \frac{\mu - x}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^{3/2}} = \mu\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} \Leftrightarrow \mu = \sqrt{2} - 1$$

(γ) Με τριβή δείξτε $\frac{mv^2}{2} + V_\pm(x) = \text{σταθ}$ με κατάλληλες $V_\pm(x)$ με πάνω πρόσημο για $\dot{x}>0$ και κάτω για $\dot{x}<0$.

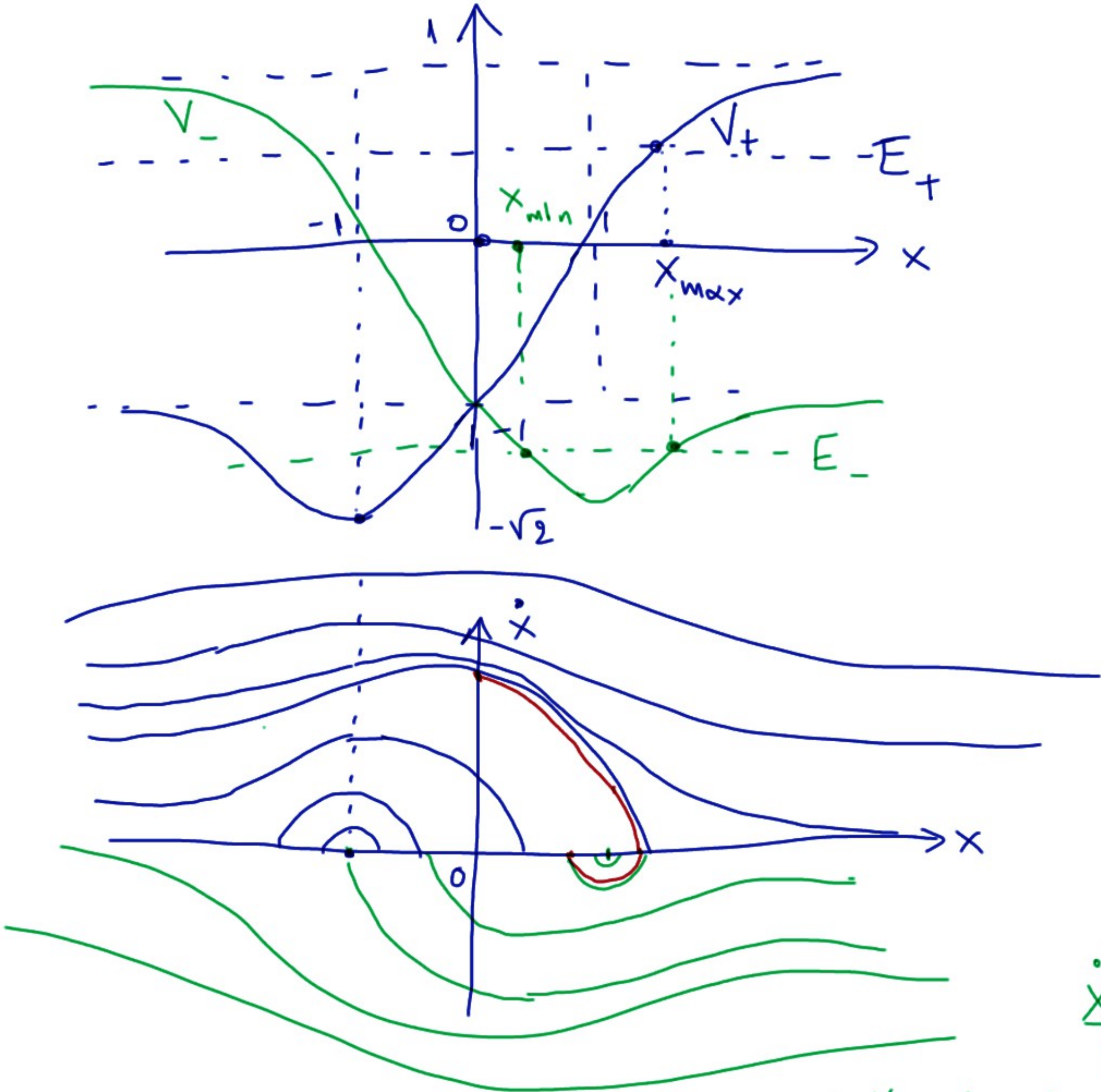
$$\ddot{x} = \mp \frac{\mu}{(x^2+1)^{3/2}} - \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}} = F_\pm(x) \quad \left(\text{διότι } \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = \pm 1\right)$$

Άρα ισοδύναμο με $\frac{mv^2}{2} + V_\pm(x) = \text{σταθ}$ όπου $V_\pm(x) = -\int F_\pm(x)\,dx \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow V_\pm(x) = \frac{-1 \pm \mu x}{\sqrt{x^2+1}} + \cancelto{0}{C}$$

Αν $\mu = 1$, $x\big|_{t=0} = 0$, $\dot{x}\big|_{t=0} = \sqrt{3}$

Με τη βοήθεια των $V_\pm(x)$ περιγράψτε την κίνηση.




$$V_+(x) = \frac{-1+x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$V_-(x) = \frac{-1-x}{\sqrt{x^2+1}} = V_+(-x)$$

Αρχικά $x=0$, $\dot{x}>0$, $\dot{x}=\sqrt{3}$

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + V_+(x) = E_+ = \frac{3}{2} + V_+(0) = \frac{1}{2}$$

Το σώμα φτάνει στο $x_{max}$:

$$V_+(x_{max}) = E_+ \Leftrightarrow$$

$$\frac{-1+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_{max} = \frac{4+\sqrt{7}}{3}$$

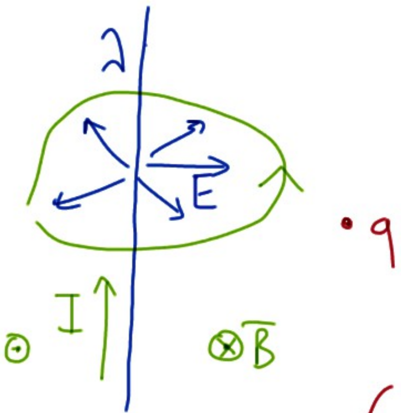
$$\frac{\dot{x}^2}{2} + V_-(x) = E_- = 0 + V_-(x_{max})$$

$$V_-(x_{min}) = E_- = V_-(x_{max}) = V_+(-x_{max}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{min} = \frac{4-\sqrt{7}}{3}.$$

# 1ο θέμα εξέτασης 6/7/2012

$$\bar{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \varpi}\hat{\varpi} = -\nabla\Phi \quad \text{με} \quad \Phi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\varpi$$

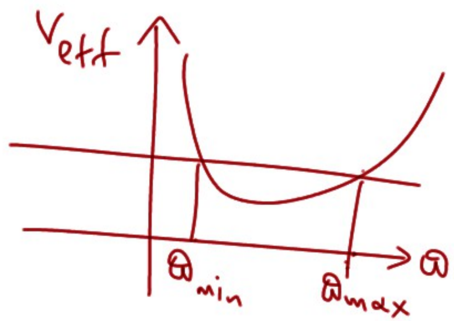



$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\varpi}\hat{\varphi}$$

$$m\bar{\alpha} = q\bar{E} + q\bar{v}\times\bar{B} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m\bar{\alpha} = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\varpi}}{\varpi} + \underbrace{q\bar{v}\times\frac{\mu_0 I}{2\pi\varpi}\hat{\varphi}}_{\frac{q\mu_0 I}{2\pi\varpi}\begin{vmatrix}\hat{\varpi} & \hat{\varphi} & \hat{z}\\ \dot{\varpi} & \varpi\dot{\varphi} & \dot{z}\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\left(\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\varphi}^2\right) = \dfrac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0\varpi} - \dfrac{\mu_0 I q}{2\pi\varpi}\dot{z} & (1)\\[2mm] \dfrac{d}{dt}\left(m\varpi^2\dot{\varphi}\right) = 0 & (2)\\[2mm] m\ddot{z} = \dfrac{\mu_0 I q\dot{\varpi}}{2\pi\varpi} & (3)\end{cases}$$




(2) → ολοκλήρωμα στροφορμής $L = m\varpi^2\dot{\varphi} \Leftrightarrow \dot{\varphi} = \dfrac{L}{m\varpi^2}$

(3) → $\dfrac{d}{dt}(m\dot{z}) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\mu_0 I q}{2\pi}\ln\varpi\right) \Leftrightarrow m\dot{z} \underbrace{- \dfrac{\mu_0 I q}{2\pi}\ln\varpi}_{qA_z} = P_z = \text{σταθ} \Leftrightarrow \dot{z} = \dfrac{P_z}{m} + \dfrac{\mu_0 I q}{2\pi m}\ln\varpi$

(1) $\xrightarrow{(2),(3)}$ μονοδιάστατο $\quad m\ddot{\varpi} = f(\varpi) \Leftrightarrow \dfrac{m\dot{\varpi}^2}{2} + \overbrace{V_{eff}(\varpi)}^{\frac{m(\varpi\dot{\varphi})^2}{2} + \frac{m\dot{z}^2}{2} + q\Phi} = E, \quad V_{eff} = -\int f\,d\varpi$