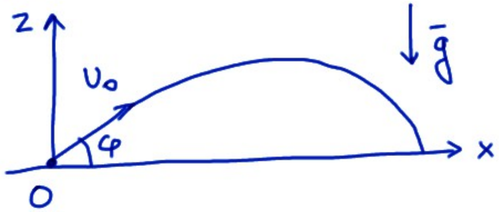
Πλάγια βολή με μικρή αντίσταση $-km\bar{v}$. Πόσο διαφέρουν ο χρόνος κίνησης και το βεληνεκές σε σχέση με την περίπτωση χωρίς αντίσταση;

Λύση:



$$\begin{cases} \ddot{x} = -k\dot{x} \\ \ddot{z} = -g - k\dot{z} \end{cases}$$

$$x = x_0(t) + \underbrace{x_1(t)}_{\text{τάξης } k} \quad , \quad z = z_0(t) + z_1(t)$$

Μηδενικής τάξης λύση: $\ddot{x}_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = v_0 \cos\varphi \, t \quad , \quad \ddot{z}_0 = -g \Leftrightarrow z_0 = v_0 \sin\varphi \, t - \frac{gt^2}{2}$

Πρώτης τάξης: $\cancel{\ddot{x}_0} + \ddot{x}_1 = -k\dot{x}_0 - \cancel{k\dot{x}_1} \Leftrightarrow \ddot{x}_1 = -k\dot{x}_0 \Leftrightarrow \dot{x}_1 = -kx_0 + \cancel{c}^{\,0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dot{x}_1 = -k v_0 \cos\varphi \, t \Leftrightarrow x_1 = -k v_0 \cos\varphi \frac{t^2}{2} + \cancel{c_0}^{\,0}$

και $\cancel{\ddot{z}_0} + \ddot{z}_1 = \cancel{-g} - k\dot{z}_0 \Leftrightarrow \dot{z}_1 = -kz_0 \Leftrightarrow \dot{z}_1 = -k v_0 \sin\varphi \, t + k\frac{gt^2}{2} \Leftrightarrow z_1 = -k v_0 \sin\varphi \frac{t^2}{2} + k\frac{gt^3}{6}.$

Δηλ. $x = v_0 \cos\varphi \, t - k v_0 \cos\varphi \frac{t^2}{2}$

και $z \approx v_0 \sin\varphi \, t - \frac{gt^2}{2} - k v_0 \sin\varphi \frac{t^2}{2} + k\frac{gt^3}{6}.$

$$z=0 \Leftrightarrow T = T_0 + T_1 \quad \text{όπου} \quad T_0 = \frac{2 v_0 \sin\varphi}{g} \quad (\text{από} \quad z_0\big|_{t=T_0} = 0) \quad \text{και}$$

$$z\Big|_{t=T_0+T_1} = 0 \Leftrightarrow v_0 \sin\varphi \,(T_0+T_1) - \frac{g}{2}(T_0+T_1)^2 - k v_0 \sin\varphi \frac{(T_0+T_1)^2}{2} + kg\frac{(T_0+T_1)^3}{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{v_0 \sin\varphi\, T_0} + v_0 \sin\varphi\, T_1 - \frac{g}{2}\left(\cancel{T_0^2} + 2T_0T_1 + \cancel{T_1^2}\right) - k v_0 \sin\varphi \frac{T_0^2}{2} + kg\frac{T_0^3}{6} = 0$$

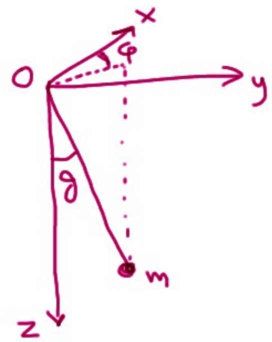
$$\Leftrightarrow T_1 = -kT_0^2/6 \quad \text{Άρα} \quad T = T_0\left(1 - \frac{kT_0}{6}\right) = \frac{2v_0 \sin\varphi}{g}\left(1 - \frac{k v_0 \sin\varphi}{3g}\right).$$

Βεληνεκές $R = \left[x_0(t) + x_1(t)\right]_{t=T_0+T_1} = x_0(T_0+T_1) + x_1(T_0) =$

$$= v_0 \cos\varphi\, T_0 + v_0 \cos\varphi\, T_1 - k\frac{v_0\cos\varphi}{2}T_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{2v_0^2 \sin\varphi\cos\varphi}{g}\left(1 - \frac{4 k v_0 \sin\varphi}{3g}\right).$$

Έστω σφαιρικό ιδανικό εκκρεμές με μάζα m και μήκος R.



(α) Αναγωγή σε μονοδιάστατο πρόβλημα.

(β) Έστω αρχικά $\vartheta=\vartheta_0=\frac{\pi}{3}$ και η ταχύτητα $v_0\hat{\varphi}$.

(β_1) Για ποια v_0 το νήμα φτάνει μέχρι την οριζόντια θέση;

(β_2) Για ποια v_0 το σώμα κινείται οριζόντια (κωνικό εκκρεμές);

(Παρόμοιο με θέμα 2, 9/6/2015 και άσκηση 1 εργασίας 5, 2015-2016)

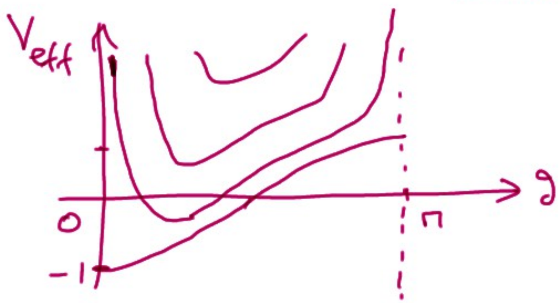
Λύση:

(α) Σφαιρικές $\bar{r}=R\hat{r}$, $\bar{v}=R\dot{\vartheta}\hat{\vartheta}+R\sin\vartheta\,\dot{\varphi}\hat{\varphi}$, δυνάμεις $mg\hat{z}-T\hat{r}$

Ολοκλήρωμα ενέργειας $\frac{mv^2}{2}+\underbrace{V}_{-mgz \text{ με } z=R\cos\vartheta}=E \Leftrightarrow \frac{mR^2\dot{\vartheta}^2}{2}+\frac{mR^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2}{2}-mgR\cos\vartheta=E$ (*)

$\dot{\bar{L}}=\bar{r}\times(mg\hat{z}-T\hat{r})$ άρα η L_z διατηρείται, $L_z=m\varpi^2\dot{\varphi}=mR^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi} \Leftrightarrow \boxed{\dot{\varphi}=\frac{L_z}{mR^2\sin^2\vartheta}}$

και (*) $\rightarrow \frac{mR^2\dot{\vartheta}^2}{2}+V_{eff}(\vartheta)=E$ με $V_{eff}(\vartheta)=\frac{L_z^2}{2mR^2\sin^2\vartheta}-mgR\cos\vartheta$.



(β) Από αρχικές συνθήκες $\dot{\vartheta}_0 = 0$, $R\sin\vartheta_0 \dot{\varphi}_0 = v_0$ άρα $L_z = mR\sin\vartheta_0\, v_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} mRv_0$

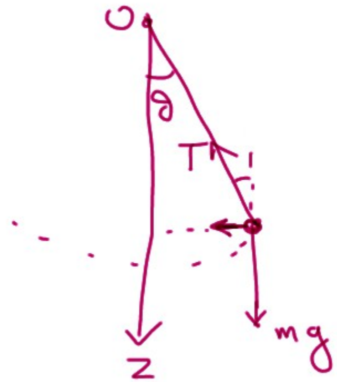
και $E = \frac{mv_0^2}{2} - mgR\cos\vartheta_0 = \frac{mv_0^2 - mgR}{2}$. (Η αρχική θέση ακραία, δηλ. $V_{eff}(\frac{\pi}{3}) = E$).

(β₁) $E = V_{eff}(\frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \frac{mv_0^2 - mgR}{2} = \frac{3}{8} mv_0^2 \Leftrightarrow v_0 = 2\sqrt{gR}$.

(β₂) Πρέπει η V_{eff} να έχει ελάχιστο στο $\vartheta_0 = \frac{\pi}{3}$.

δηλ. $-\frac{L_z^2 \cos\vartheta_0}{mR^2\sin^3\vartheta_0} + mgR\sin\vartheta_0 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{3}{2} gR}$.

Το ίδιο με δυνάμεις



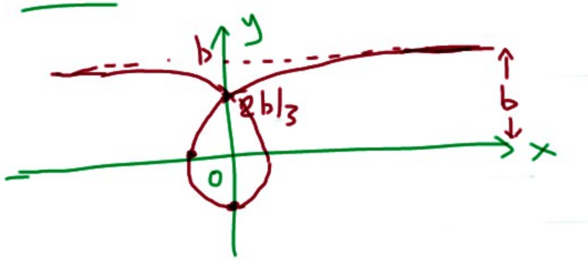
Πρέπει $\bar{T} + m\bar{g} = \frac{mv_0^2}{R\sin\vartheta}\hat{n} \to -\hat{\varrho}$

$$\left.\begin{aligned} T\cos\vartheta_0 &= mg \\ T\sin\vartheta_0 &= \frac{mv_0^2}{R\sin\vartheta_0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_0 = \sqrt{gR\frac{\sin^2\vartheta_0}{\cos\vartheta_0}}$$

Σώμα ενέργειας E πλησιάζει το κέντρο του πεδίου $V = -\frac{8k}{r^2}$.

Για ποια παράμετρο κρούσης b η τροχιά είναι $r = \frac{b/3}{\sin(\varphi/3)}$;

Λύση:



$y = r\sin\varphi$ για $\varphi \approx 0$

$$y = \frac{b/3}{\sin(\varphi/3)}\sin\varphi \approx \frac{b/3}{\varphi/3}\varphi = b$$

$$u'' + u = -\frac{mF}{L^2u^2} = \frac{m\frac{dV}{dr}}{L^2u^2} \xRightarrow{u = \frac{3}{b}\sin\frac{\varphi}{3}} L^2 = 18mk \Leftrightarrow L = \pm\sqrt{18mk}$$

$$L = m|\bar{r}_\perp \times \bar{v}| = m b v_\infty \Leftrightarrow b = \frac{L}{m v_\infty} \xRightarrow[L=\sqrt{18mk}]{E = \frac{m v_\infty^2}{2}} b = 3\sqrt{\frac{k}{E}}.$$

Θέμα 4 εξέτασης 1/9/2015 :

(α) Αρχική ταχύτητα σώματος 2m : $v_0=\sqrt{\frac{GM}{r_0}}$ (από $\frac{(\cancel{2m})v_0^2}{r_0} = \frac{GM(\cancel{2m})}{r_0^2}$)

Το m_1 μετά τη διάσπαση έχει ίδιου μέτρου ταχύτητα

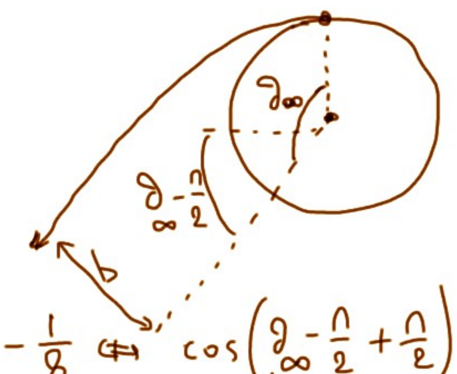
Διατήρηση ορμής $(2m)v_0 = \overset{m}{\cancel{m_2}}\, v_2 - m v_0$

$\Leftrightarrow \boxed{v_2 = 3v_0}$ αρχική ταχύτητα του m_2.

(β) $E = \frac{m v_2^2}{2} - \frac{GMm}{r_0} = \frac{7}{2}\frac{GMm}{r_0}$ (>0 σημαίνει υπερβολική τροχιά).

$L = m r_0 v_2 = 3m\sqrt{GMr_0}$.

(γ) $\varepsilon = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}} = 8$



(δ) $E = \frac{m v_\infty^2}{2} \Leftrightarrow v_\infty = \sqrt{\frac{7GM}{r_0}}$.

$1+\varepsilon\cos\theta_\infty = 0 \Leftrightarrow \theta_\infty = \arccos\left(-\frac{1}{8}\right)$ ή $\cos\theta_\infty = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \cos\left(\underbrace{\theta_\infty - \frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \sin\left(\theta_\infty - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{8}$

δηλ. $\theta_\infty \approx \frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}$ ακτίνια άρα $\theta_\infty - \frac{\pi}{2} \approx \frac{1}{8}$ rad $= \frac{1}{8}\frac{180}{\pi} = 7.2^\circ$.

(ε) $L = m b v_\infty \Leftrightarrow b = \frac{3}{\sqrt{7}} r_0$.

Κατάρρευση ομογενούς νέφους κάτω από την ιδιοβαρύτητά του:

Νέφος ακτίνας R, πυκνότητας ρ_0, αρχικά στατικό.

Κάθε μάζα δm σε αρχική ακτίνα r_0 κινείται υπό την επίδραση της $g = -\frac{G M_{εσω}}{r^2} = -\frac{4\pi G \rho_0 r_0^3}{3 r^2}$

(σε κάθε χρόνο η μάζα για $r < r(t)$ είναι σταθερή και ίση με $M_{εσω} = \frac{4\pi r_0^3}{3}\rho_0$).

Άρα $\ddot{r} = -\frac{k}{r^2}$ με $k = 4\pi G \rho_0 r_0^3/3$

Ολοκλήρωμα ενέργειας $\frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{k}{r} = σταθ = -\frac{k}{r_0} \Leftrightarrow \dot{r} = -\sqrt{2k\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = \int_r^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{2k\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}}$ Θέτοντας $r = r_0 \cos^2\varphi$ βρίσκουμε $t = \sqrt{\frac{2r_0^3}{k}} \int_0^{\varphi} \underbrace{\cos^2\varphi}_{\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}} d\varphi$

$\Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{r_0^3}{2k}} \left(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi\right) \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{3}{8\pi G \rho_0}} \left(\arccos\sqrt{\frac{r}{r_0}} + \frac{r}{r_0}\sqrt{1 - \frac{r}{r_0}}\right).$

Όλες οι μάζες φτάνουν ταυτόχρονα στο κέντρο, σε χρόνο

$$t_{ff} = \sqrt{\frac{3\pi}{32 G \rho_0}}.$$

Τι θυμόμαστε:

1) $\bar{r}, \bar{v}$ σε όλα τα συστήματα

$\bar{\alpha}$ μόνο για καρτεσιανές και για την κυκλική κίνηση

2) Ορισμούς βασικών μεγεθών (όπως I, $E_{κιν}$, $\bar{P}$, W)

3) νόμος Νεύτωνα σε μη-αδρανειακά

4) Για κεντρικές $L = mr^2\dot{\varphi}$, $V_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$, $u'' + u = -\frac{mF}{L^2u^2}$

Χαρακτηριστικά κωνικών τομών $r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi - \varphi_\Pi)}$

(όχι $p = \frac{L^2}{mk}$, $\varepsilon = \sqrt{1 + 2EL^2/mk^2}$ για $F = -k/r^2$) $E = -\frac{k}{2\alpha}$, $T = \frac{2\pi\, \alpha^{3/2}}{\sqrt{k/m}}$

5) πρόβλημα 2 σωμάτων σχέσης

6) νόμος Gauss $\oiint \bar{g}\cdot d\bar{S} = -4\pi G M_{εγκ}$, σχέση $\bar{g} = -\nabla\Phi \Leftrightarrow \Phi = -\int_\infty^{\bar{r}} \bar{g}\cdot d\bar{r}$

$V = \frac{1}{2}\iiint \Phi\, \rho\, d^3\bar{r}$

όχι ∇, $\nabla\cdot$, ∇^2 σε καμπυλόγραμμες συντ/νες.

Μαθηματικά εργαλεία

λύση γραμμικών διαφορικών και χωριζομένων μεταβλητών

απλά ολοκληρώματα

αναπτύγματα Taylor

ειδικές συναρτήσεις $\sin x$ $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, e^x, $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, $\coth x$, $\ln x$

διανύσματα