ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

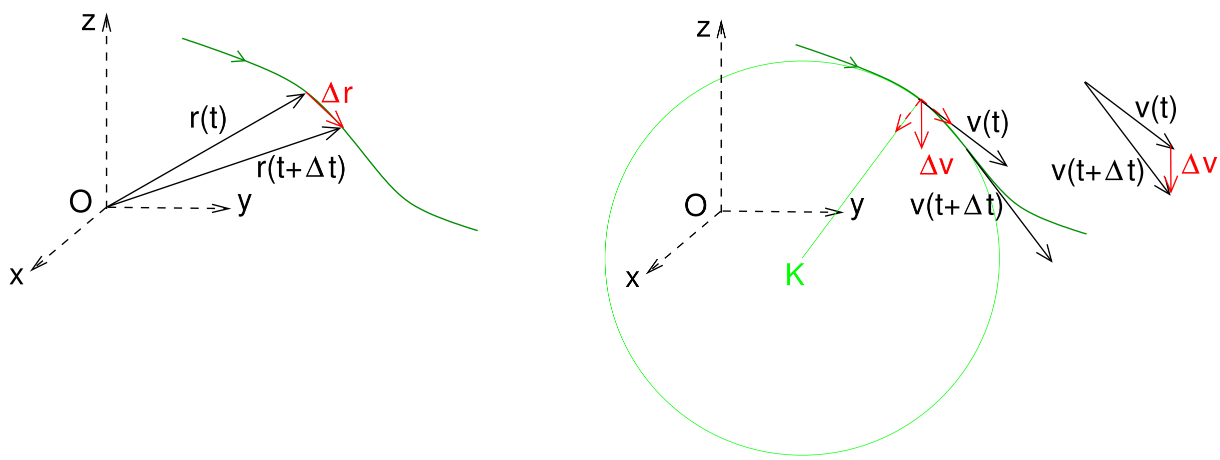
Περίληψη
Το κεφάλαιο αυτό αφορά τον τρόπο που περιγράφουμε την κίνηση ενός σημειακού σώματος. Συζητούνται τα βασικά μεγέθη που χρειάζονται – θέση, ταχύτητα, επιτάχυνση – και οι αναπαραστάσεις τους σε διάφορα συστήματα συντεταγμένων (καρτεσιανές, πολικές, κυλινδρικές, σφαιρικές), αλλά και στο σύστημα μοναδιαίων που ακολουθούν την τροχιά (εφαπτόμενο και κάθετα σε αυτή).
Προαπαιτούμενη γνώση: Στοιχεία διανυσματικής ανάλυσης του προηγούμενου κεφαλαίου.

2.1 Ταχύτητα και επιτάχυνση

Τη θέση ενός σημειακού σώματος την περιγράφουμε μέσω του διανύσματος θέσης $\boldsymbol{r}$ από την αρχή Ο κάποιου συστήματος αναφοράς. Η θέση αυτή είναι συνάρτηση του χρόνου $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ και είναι ο βασικός άγνωστος σε κάθε πρόβλημα Μηχανικής που αφορά τη μελέτη κίνησης ενός σημειακού σώματος. Δίνει τόσο την τροχιά σε παραμετρική μορφή, όσο και το πόσο γρήγορα κινείται το σώμα πάνω σε αυτή την τροχιά.

Το σχήμα 2.1 αριστερά δείχνει την τροχιά ενός κινούμενου σώματος, τη θέση του σε δύο κοντινές στιγμές $\boldsymbol{r}(t)$ και $\boldsymbol{r}(t + \Delta t)$, καθώς και τη διαφορά $\Delta\boldsymbol{r}$. Στο όριο που η χρονική διαφορά Δt τείνει στο μηδέν η διαφορά $\Delta\boldsymbol{r}$ έχει την διεύθυνση κίνησης του σώματος στην εφαπτομένη της τροχιάς και το μέτρο της $\Delta\boldsymbol{r}$ ισούται με το μήκος που διανύει το σώμα $\Delta s = |\Delta\boldsymbol{r}|$ στο χρόνο Δt. Συνεπώς η ταχύτητα του σώματος γράφεται διανυσματικά σαν το ρυθμό μεταβολής της θέσης $\boldsymbol{v} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$, ή για συντομία $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$.

Όμοια η επιτάχυνση είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας, δηλ. $\boldsymbol{a} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$, ή για συντομία $\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}}$. Όπως δείχνει το σχήμα 2.1 δεξιά η επιτάχυνση έχει γενικά δύο συνιστώσες, μία πάνω στην τροχιά (δηλ. παράλληλη στη στιγμιαία ταχύτητα) που λέγεται επιτρόχια και σχετίζεται με την αλλαγή του μέτρου της ταχύτητας, και μία κάθετη στην τροχιά, προς το μέρος που καμπυλώνεται αυτή (δηλ. προς το κέντρο καμπυλότητας Κ του σχήματος), που λέγεται κεντρομόλος και σχετίζεται με την αλλαγή της διεύθυνσης

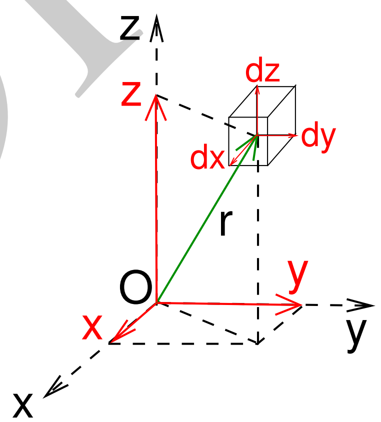


Σχήμα 2.1: Αριστερά: Η τροχιά ενός σώματος (πράσινη καμπύλη), το διάνυσμα θέσης του σε δύο διαδοχικές στιγμές και η διαφορά $\Delta \boldsymbol{r}$ που ισούται με $\boldsymbol{v}\Delta t$. Δεξιά: Η ταχύτητα του σώματος σε δύο διαδοχικές στιγμές, η μεταβολή της $\Delta \boldsymbol{v}$ που ισούται με $\boldsymbol{a}\Delta t$ και η ανάλυση της σε επιτρόχια (στη διεύθυνση της στιγμιαίας ταχύτητας) και κεντρομόλο (με φορά προς το κέντρο καμπυλότητας της τροχιάς K) συνιστώσες.

της ταχύτητας.

Τα τρία διανύσματα (που είναι διανυσματικές συναρτήσεις του χρόνου), θέση $\boldsymbol{r}$, ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ και επιτάχυνση $\boldsymbol{a}$, αρκούν αφενός για να περιγράψουμε την κίνηση του σώματος, αφετέρου για να συνδέσουμε την κίνηση με τη δυναμική μέσω του νόμου Νεύτωνα (ο οποίος συνδέει δυνάμεις με δεύτερη παράγωγο της θέσης). Τα επόμενα υποκεφάλαια αφορούν τις αναπαραστάσεις αυτών των βασικών μεγεθών της κινηματικής σε διάφορα συστήματα συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε συνήθως στην φυσική (καρτεσιανές, πολικές, κυλινδρικές, σφαιρικές), αλλά και στο σύστημα μοναδιαίων που ακολουθούν την τροχιά (εφαπτόμενο και κάθετα σε αυτή).

2.2 Κινηματική σε Καρτεσιανές συντεταγμένες



Σχήμα 2.2: Οι καρτεσιανές συντεταγμένες σημείου με διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{r}$ (του οποίου οι συνιστώσες πάνω στα μοναδιαία των αξόνων είναι $x\hat{x}$, $y\hat{y}$ και $z\hat{z}$) και τα τρία ανεξάρτητα μέρη της στοιχειώδους μετατόπισης $d\boldsymbol{r} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$.

Χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες κάθε θέση $\boldsymbol{r}$ αντιστοιχεί στην τριάδα συντεταγμένων x, y, z (βλέπε σχήμα 2.2), η οποία πολλές φορές γράφεται x_1, x_2, x_3 (ιδιαίτερα όταν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τους δείκτες σε αθροίσματα). Οι συντεταγμένες αυτές είναι οι αλγεβρικές τιμές των προβολών του διανύσματος θέσης στους άξονες του συστήματος και εννοείται ότι είναι συναρτήσεις του χρόνου καθώς το σώμα κινείται. Αν $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα στους αντίστοιχους άξονες ισχύει

$$\boldsymbol{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}\,. \tag{2.1}$$

Η βάση των διανυσμάτων $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ επιλέγεται με τρόπο ώστε το σύστημα να είναι δεξιόστροφο, δηλ. $\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}$, ή γενικότερα $\hat{x}_i \times \hat{x}_j = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\hat{x}_k$ (η βάση είναι επίσης ορθοκανονική, αφού κάθε μοναδιαίο έχει μοναδιαίο μέτρο και είναι κάθετο με όλα τα υπόλοιπα της βάσης).

Η στοιχειώδης μετατόπιση γύρω από ένα σημείο αναλύεται όμοια στις συνιστώσες τις πάνω στους άξονες, δηλ. ισχύει

$$d\boldsymbol{r} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}\,. \tag{2.2}$$

Η έκφραση της στοιχειώδους μετατόπισης σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων είναι πολύ σημαντική, καθώς δίνει συναρτήσει των μεταβολών των συντεταγμένων το στοιχειώδες μήκος σε μία καμπύλη $ds = |d\boldsymbol{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$, τη στοιχειώδη επιφάνεια σε επίπεδο $z =$ σταθερό που είναι το γινόμενο των υπόλοιπων μετατοπίσεων $dx\,dy$ (εκτός της dz που είναι μηδενική) και όμοια στα άλλα επίπεδα, δίνει επίσης το στοιχειώδη όγκο $dx\,dy\,dz$. Όσον αφορά την κινηματική δίνει κατευθείαν την έκφραση της ταχύτητας $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\hat{x} + \frac{dy}{dt}\,\hat{y} + \frac{dz}{dt}\,\hat{z}$, δηλ.

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y} + \dot{z}\,\hat{z}\,. \tag{2.3}$$

(Οι παράγωγοι συναρτήσεων μίας μεταβλητής μπορούν να αντιμετωπίζονται ως λόγοι μικρών διαφορών, δηλ. «λόγοι διαφορικών». Εδώ μπορούμε να γράψουμε την ταχύτητα σαν τον λόγο $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}}{dt}$ εννοώντας το όριο $\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta x\,\hat{x} + \Delta y\,\hat{y} + \Delta z\,\hat{z}}{\Delta t}$.)

Η σχέση 2.3 δίνει τις συνιστώσες της ταχύτητας στη βάση των μοναδιαίων του συστήματος, δηλ. ότι ισχύει $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$ και $v_z = \dot{z}$. Η σχέση αυτή θα μπορούσε βέβαια να προκύψει και από την χρονική παράγωγο της εξίσωσης 2.1, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι τα μοναδιαία είναι χρονοανεξάρτητα.

Η έκφραση της επιτάχυνσης προκύπτει από την χρονική παράγωγο της εξίσωσης 2.3 και είναι

$$\boldsymbol{a} = \ddot{x}\,\hat{x} + \ddot{y}\,\hat{y} + \ddot{z}\,\hat{z}\,, \tag{2.4}$$

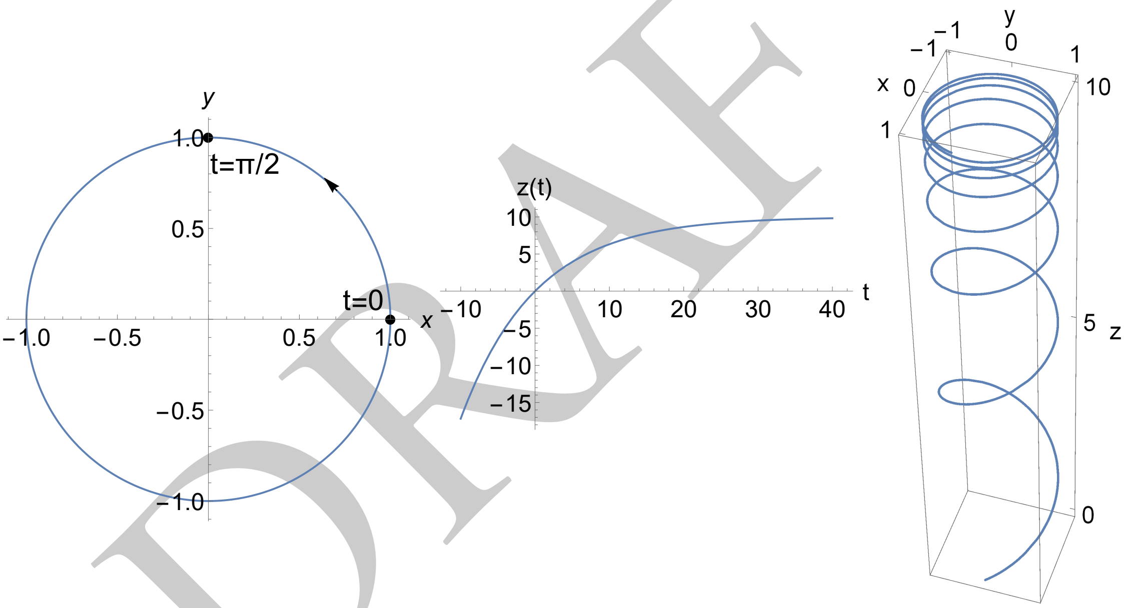
δηλ. οι συνιστώσες της επιτάχυνσης στη βάση των μοναδιαίων του συστήματος είναι $a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$, $a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$ και $a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$.

Παράδειγμα 2.1:
Έστω σώμα του οποίου η θέση σε κάθε χρόνο είναι (σε κατάλληλες μονάδες) $\boldsymbol{r} = \cos t\,\hat{x} + \sin t\,\hat{y} + 10(1 - e^{-t/10})\,\hat{z}$.
(α) Σχεδιάστε την προβολή της τροχιάς στο επίπεδο xy.
(β) Σχεδιάστε την τρισδιάστατη τροχιά.
(γ) Βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση σαν συναρτήσεις του χρόνου.
(δ) Δείξτε ότι η $\hat{z}$ συνιστώσα της στροφορμής διατηρείται.
(ε) Υπάρχει στιγμή στην οποία η επιτάχυνση είναι κάθετη στο διάνυσμα θέσης;
(στ) Γράψτε την επιτάχυνση σαν $\boldsymbol{a} = a_x(x)\,\hat{x} + a_y(y)\,\hat{y} + a_z(z)\,\hat{z}$ (βρείτε τις συναρτήσεις $a_x(x)$, $a_y(y)$ και $a_z(z)$).
(ζ) Γράψτε την επιτάχυνση σαν $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} - k v_z \hat{z}$ όπου k σταθερά και το $\boldsymbol{\omega}$ είναι σταθερό διάνυσμα στην $\hat{z}$ κατεύθυνση (βρείτε τα k και $\boldsymbol{\omega}$).
Λύση: Δίνονται μέσω της έκφρασης του $\boldsymbol{r}(t)$ οι $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ και $z(t) = 10(1 - e^{-t/10})$.
(α) Η προβολή της τροχιάς στο επίπεδο xy δίνεται από $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ σε παραμετρική μορφή (με παράμετρο το χρόνο). Μπορεί και να δοθεί σαν άμεση σχέση μεταξύ των x και y, η οποία προκύπτει απαλείφοντας το χρόνο $x^2 + y^2 = 1$. Αυτή είναι εξίσωση κύκλου μοναδιαίας ακτίνας με κέντρο την αρχή των αξόνων. Για να βρούμε τη φορά διαγραφής του σώματος πάνω στον κύκλο αυτό αρκεί να σκεφτούμε δύο χρονικές

στιγμές που αντιστοιχούν σε χαρακτηριστικές τιμές της φάσης των τριγωνομετρικών αριθμών, π.χ. $t = 0$ και $t = \pi/2$. Τη στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στο σημείο $x = 1, y = 0$ ενώ τη στιγμή $t = \pi/2$ το σώμα βρίσκεται στο σημείο $x = 0, y = 1$. Άρα ο κύκλος διαγράφεται αριστερόστροφα, δηλ. κατά την ορθή φορά (αντίστροφα από τους δείκτες του ρολογιού) αν βλέπουμε το επίπεδο xy από τα θετικά του άξονα z (σχήμα 2.3 αριστερά). Η κίνηση είναι περιοδική με περίοδο 2π.

(β) Η κίνηση στην z διεύθυνση προκύπτει από τη δοσμένη συνάρτηση $z(t) = 10(1-e^{-t/10})$. Το σώμα για $t = 0$ βρίσκεται στο $z = 0$ και καθώς περνά ο χρόνος η $z(t)$ είναι αύξουσα και προσεγγίζει ασυμπτωτικά την τιμή $\lim_{t\to\infty} z = 10$. Αν επεκτείνουμε τη λύση και για αρνητικούς χρόνους, το σώμα βρίσκεται σε αρνητικά z στους χρόνους $t < 0$ και $z \to -\infty$ για $t \to -\infty$ (το $|z|$ αυξάνει εκθετικά). Η συνάρτηση $z(t)$ φαίνεται στο σχήμα 2.3 μέσο.

Ο συνδυασμός της περιοδικής κυκλικής κίνησης στο επίπεδο xy με την κίνηση στην z διεύθυνση δίνει ότι η τριδιάστατη κίνηση είναι ελικοειδής, γίνεται πάνω στον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$. Το βήμα της έλικας συνεχώς μειώνεται και ασυμπτωτικά το σώμα καταλήγει να κινείται πάνω στον κύκλο $(x^2 + y^2 = 1, z = 10)$. Η τροχιά φαίνεται στο σχήμα 2.3 δεξιά.



Σχήμα 2.3: Αριστερά: Η προβολή της τροχιάς στο επίπεδο xy. Μέσο: Η συνάρτηση $z(t)$. Δεξιά: Η τριδιάστατη τροχιά.

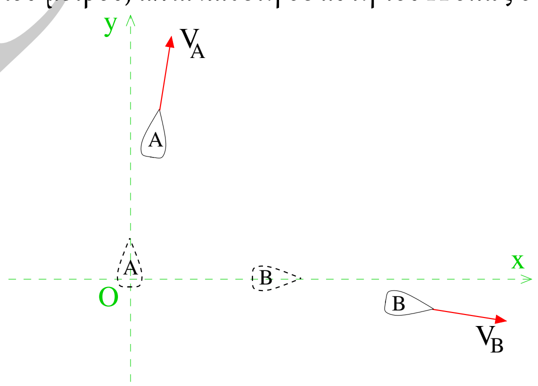
(γ) Η ταχύτητα είναι $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d}{dt}\left[\cos t\,\hat{x} + \sin t\,\hat{y} + 10(1-e^{-t/10})\,\hat{z}\right] = -\sin t\,\hat{x} + \cos t\,\hat{y} + e^{-t/10}\,\hat{z}$, δηλ. $v_x = -\sin t, v_y = \cos t, v_z = e^{-t/10}$. (Το ίδιο βέβαια δίνει η έκφραση $\boldsymbol{v} = \dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y} + \dot{z}\,\hat{z}$ με αντικατάσταση των γνωστών $x(t), y(t)$ και $z(t)$.)

Παρατηρώντας ότι ισχύει $v_x^2 + v_y^2 = 1$ συμπεραίνουμε ότι η κυκλική κίνηση στο επίπεδο xy είναι ομαλή (δηλ. γίνεται με σταθερό μέτρο ταχύτητας). Η γωνιακή ταχύτητα αυτής της κίνησης είναι μοναδιαία, αφού η γραμμική είναι μοναδιαία και η ακτίνα επίσης μονάδα.

Η επιτάχυνση είναι $\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{d}{dt}\left[-\sin t\,\hat{x} + \cos t\,\hat{y} + e^{-t/10}\,\hat{z}\right] = -\cos t\,\hat{x} - \sin t\,\hat{y} - \frac{1}{10}e^{-t/10}\,\hat{z}$, δηλ. $a_x = -\sin t$, $a_y = \cos t, a_z = -\frac{1}{10}e^{-t/10}$. (Το ίδιο βέβαια δίνει η έκφραση $\boldsymbol{a} = \ddot{x}\,\hat{x} + \ddot{y}\,\hat{y} + \ddot{z}\,\hat{z}$ με αντικατάσταση των γνωστών

$x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$, ή η $\boldsymbol{a} = \dot{v}_x\,\hat{x} + \dot{v}_y\,\hat{y} + \dot{v}_z\,\hat{z}$ με αντικατάσταση των γνωστών $v_x(t)$, $v_y(t)$ και $v_z(t)$.)
Το μέρος της επιτάχυνσης στο xy επίπεδο έχει μοναδιαίο μέτρο και φορά προς το κέντρο της κυκλικής κίνησης (αντίθετο του διανύσματος θέσης στο επίπεδο xy), κάτι που αναμέναμε αφού αντιστοιχεί στην κεντρομόλο επιτάχυνση της ομαλής κυκλικής κίνησης για την οποία η ακτίνα, η γραμμική ταχύτητα και η γωνιακή ταχύτητα είναι ίσες με τη μονάδα (στις κατάλληλες μονάδες που δόθηκε η θέση στην εκφώνηση).
(δ) Η στροφορμή (εννοείται ως προς το κέντρο του συστήματος ως προς το οποίο μας δόθηκε και η θέση) είναι $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$. Η $\hat{z}$ συνιστώσα της είναι $L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$ και η άμεση αντικατάσταση δίνει ότι είναι πράγματι σταθερά και ίση με $L_z = m$.
Εναλλακτικά, για να δείξουμε ότι η L_z είναι σταθερή θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι έχει μηδενική χρονική παράγωγο. Η παράγωγος του διανύσματος της στροφορμής είναι $\dot{\boldsymbol{L}} = \dot{\boldsymbol{r}} \times m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times m\dot{\boldsymbol{v}} = 0 + \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{a}$ (ο πρώτος όρος μηδενίζεται διότι είναι εξωτερικό γινόμενο παράλληλων διανυσμάτων) και η $\hat{z}$ συνιστώσα της $\dot{L}_z = (\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{a}) \cdot \hat{z} = 0$ μετά από αντικατάσταση.
(ε) $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{r} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r} = 0 \Leftrightarrow -1 - e^{-t/10}(1 - e^{-t/10}) = 0 \Leftrightarrow \left(e^{-t/10}\right)^2 - \left(e^{-t/10}\right) - 1 = 0$, δηλ. τριώνυμο ως προς την μεταβλητή $e^{-t/10}$ με λύσεις $e^{-t/10} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Η λύση με το κάτω πρόσημο απορρίπτεται γιατί η μεταβλητή $e^{-t/10}$ είναι πάντα θετική για πραγματικούς χρόνους. Η λύση με το πάνω πρόσημο αντιστοιχεί σε αρνητικό χρόνο $t = -10 \ln \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Είναι δεκτή αν η κίνηση της εκφώνησης επεκτείνεται και σε αρνητικούς χρόνους (αρνητικός χρόνος σε ένα πρόβλημα Μηχανικής σημαίνει απλά μικρότερος του χρόνου στον οποίο αυθαίρετα μηδενίσαμε το ρολόι μας).
(στ) Έχουμε βρει $a_x = \cos t$ και συνδυάζοντας με την $x = -\cos t$ προκύπτει $a_x = -x$. Όμοια $a_y = -y$ και $a_z = \dfrac{z-10}{100}$ όπως προκύπτει με απαλοιφή του χρόνου μεταξύ των $a_z = -\dfrac{1}{10}e^{-t/10}$ και $z = 10(1 - e^{-t/10})$.
(ζ) Η δοσμένη σχέση ισοδυναμεί με $-\cos t\,\hat{x} - \sin t\,\hat{y} - \dfrac{1}{10}e^{-t/10}\,\hat{z} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\sin t & \cos t & e^{-t/10} \end{vmatrix} - ke^{-t/10}\,\hat{z}$. Η $\hat{x}$ συνιστώσα δίνει $-\cos t = -\omega \cos t$ (για κάθε χρόνο), άρα πρέπει $\omega = 1$ ή διανυσματικά $\boldsymbol{\omega} = \hat{z}$. Η $\hat{y}$ συνιστώσα δίνει $-\sin t = -\omega \sin t$ και ικανοποιείται για κάθε χρόνο αν $\omega = 1$. Η $\hat{z}$ συνιστώσα δίνει $-\dfrac{1}{10}e^{-t/10} = -ke^{-t/10}$ (για κάθε χρόνο), άρα πρέπει $k = \dfrac{1}{10}$.

Παράδειγμα 2.2:
Δύο ταχύπλοα Α και Β βρίσκονται ακίνητα απέχοντας μεταξύ τους απόσταση R. Έστω Oxy το επίπεδο της θάλασσας και οι αρχικές θέσεις $\boldsymbol{r}_{A0} = 0$, $\boldsymbol{r}_{B0} = R\hat{x}$. Οι οδηγοί συμφωνούν να τρέξουν με τρόπο ώστε κάθε στιγμή ο Β να έχει ταχύτητα ίδιου μέτρου, αλλά κάθετη σε αυτή του Α όπως στο σχήμα, δηλ. $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A \times \hat{z}$.



Πως πρέπει να κινηθεί ο Α ώστε να συναντήσει τον Β;
Λύση: Η σχέση $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A \times \hat{z}$ περιέχει και τα δύο δεδομένα του προβλήματος, τόσο την ισότητα των μέτρων, όσο και την καθετότητα (με τη συγκεκριμένη φορά του σχήματος, δηλ. η ταχύτητα του Β προκύπτει αν στρέψουμε δεξιόστροφα κατά $\pi/2$ την ταχύτητα του Α, κοιτώντας από τα θετικά του άξονα z που έχει φορά από τη σελίδα προς τα έξω). Επομένως αυτή η σχέση θα δώσει και την απάντηση. Επειδή το ερώτημα αφορά θέ-

σεις (συνάντηση σημαίνει $\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_B$) πρέπει να ολοκληρώσουμε την $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A \times \hat{z}$. Γράφοντας $\boldsymbol{v}_A = \dfrac{d\boldsymbol{r}_A}{dt}$ και $\boldsymbol{v}_B = \dfrac{d\boldsymbol{r}_B}{dt}$ η παραπάνω σχέση δίνει $\dfrac{d\boldsymbol{r}_B}{dt} = \dfrac{d\boldsymbol{r}_A}{dt} \times \hat{z} \Leftrightarrow d\boldsymbol{r}_B = d\boldsymbol{r}_A \times \hat{z}$ (όπως είπαμε μπορούμε να χειριζόμαστε παραγώγους μίας μεταβλητής σαν λόγους, οπότε «απαλείφεται» το dt). Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη από την αρχική στιγμή μέχρι τη στιγμή της συνάντησης έχουμε $\int_{R\hat{x}}^{\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r}_B = \int_0^{\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r}_A \times \hat{z} \Leftrightarrow \boldsymbol{r} - R\hat{x} = \boldsymbol{r} \times \hat{z}$. (Θα μπορούσαμε να ολοκληρώσουμε αόριστα την σχέση $\int d\boldsymbol{r}_B = \int d\boldsymbol{r}_A \times \hat{z} \Leftrightarrow \boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{r}_A \times \hat{z} + \boldsymbol{C}$ και να βρούμε τη σταθερά ολοκλήρωσης από τις αρχικές τιμές των θέσεων $\boldsymbol{C} = R\hat{x}$.) Οι συνιστώσες της εξίσωσης αυτής αποτελούν σύστημα $x - R = y$, $y = -x$. (Στις ίδιες σχέσεις θα καταλήγαμε αν ολοκληρώναμε τις δύο συνιστώσες της $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A \times \hat{z}$, δηλ. τις $v_{Bx} = v_{Ay}$ και $v_{By} = -v_{Ax}$.) Η λύση του συστήματος είναι $x = R/2$, $y = -R/2$. Η απάντηση είναι λοιπόν ότι ο Α πρέπει να οδηγήσει το σκάφος του στο σημείο $x = R/2$, $y = -R/2$ (δεν έχει σημασία μέσω ποιας τροχιάς ούτε πόσο θα αλλάζει το μέτρο της ταχύτητάς του) και αυτόματα ο Β θα φτάσει ταυτόχρονα στο ίδιο σημείο!

Θα μπορούσαμε να γράψουμε τη σχέση μεταξύ των ταχυτήτων χρησιμοποιώντας μιγαδικούς αριθμούς. Συμφωνώντας η $\hat{x}$ συνιστώσα της θέσης να είναι το πραγματικό μέρος του μιγαδικού ζ και η $\hat{y}$ συνιστώσα το φανταστικό μέρος, δηλ. $\zeta = x + iy$, η σχέση των ταχυτήτων γράφεται $\dot{\zeta}_A = i\dot{\zeta}_B$ (η στροφή κατά 90 μοίρες κατά την ορθή φορά αντιστοιχεί με πολλαπλασιασμό με $i = e^{i\pi/2}$ στο μιγαδικό επίπεδο). Η ολοκλήρωσή της από την αρχική στιγμή μέχρι τη στιγμή της συνάντησης δίνει $\int_0^{\zeta} d\zeta_A = i\int_R^{\zeta} d\zeta_B \Leftrightarrow \zeta = i(\zeta - R) \Leftrightarrow \zeta = (1-i)\dfrac{R}{2}$, δηλ. $x = R/2$, $y = -R/2$.

Ο σκοπός ήταν το πρόβλημα να λυθεί μέσω κινηματικής, αλλά υπάρχουν βέβαια και άλλες γεωμετρικές λύσεις. Θα μπορούσαμε για παράδειγμα να σκεφτούμε ότι οι τροχιές του Α στο σύστημα Oxy και του Β σε ένα σύστημα $O'x'y'$ που έχει αρχή O' την αρχική θέση του Β και είναι στραμμένο κατά 90 μοίρες ως προς το Oxy (άρα $\hat{x}' = -\hat{y}$ και $\hat{y}' = \hat{x}$) είναι ακριβώς ίδιες, δηλ. σε κάθε στιγμή ισχύουν οι $x' = x$, $y' = y$. Οι συντεταγμένες κάθε σημείου Σ σε αυτά τα δύο συστήματα συνδέονται μέσω $\boldsymbol{O\Sigma} = \boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{O'\Sigma}$, δηλ. $x = R + y'$, $y = -x'$, κι έτσι καταλήγουμε στο ότι το μόνο σημείο που έχει ίδιες συντεταγμένες σε αυτά τα δύο συστήματα είναι το $x = x' = R/2$, $y = y' = -R/2$.

Πιο αφηρημένα, θα μπορούσαμε να ψάξουμε γύρω από ποιο σημείο πρέπει να στρέψουμε κατά 90 μοίρες την τροχιά του Α για να πάρουμε την τροχιά του Β (μιλάμε μόνο για στροφή, χωρίς μετατόπιση). Ψάχνουμε δηλ. σημείο Σ ως προς το οποίο ακόμα και οι θέσεις (όχι μόνο οι ταχύτητες) ικανοποιούν τη σχέση $\boldsymbol{\Sigma B} = \boldsymbol{\Sigma A} \times \hat{z}$. Η σχέση αυτή στην αρχική στιγμή δίνει $R\hat{x} - \boldsymbol{r}_\Sigma = (0 - \boldsymbol{r}_\Sigma) \times \hat{z}$ οπότε το σημείο που ψάχνουμε είναι το $x_\Sigma = R/2$, $y_\Sigma = R/2$. Αφού η μία τροχιά προκύπτει με στροφή της άλλης γύρω από το Σ, προφανώς μόνο σε αυτό το σημείο μπορούν να συναντηθούν οι τροχιές.

2.3 Κινηματική σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες

Παρότι οι καρτεσιανές είναι οι απλούστερες συντεταγμένες, αφού τα αντίστοιχα μοναδιαία είναι σταθερά και οι επιφάνειες $x_i =$ σταθερό είναι επίπεδα, υπάρχουν περιπτώσεις όπου η κίνηση κάποιου σώματος περιγράφεται ευκολότερα σε άλλες συντεταγμένες u_i που γενικά λέγονται καμπυλόγραμμες συντεταγμένες (γιατί οι επιφάνειες $u_i =$ σταθερό έχουν γενικά καμπυλότητα, δεν είναι επίπεδες όπως οι καρτεσιανές). Π.χ. αν η κίνηση είναι επίπεδη κυκλική είναι προτιμότερο να περιγράψουμε τη θέση μέσω μίας γωνίας παρά με τις x και y. Η θέση πάνω σε μία σφαίρα, όπως π.χ. κάποιου τόπου πάνω στη Γη, καθορίζεται ευκολότερα μέσω δύο γωνιών, του γεωγραφικού πλάτους και του γεωγραφικού μήκους, παρά με τις καρτεσιανές συντεταγμένες.

Υπάρχουν άπειρες επιλογές τέτοιων συντεταγμένων, αλλά οι συνηθέστερα χρησιμοποιούμενες είναι οι πολικές (στο επίπεδο), οι κυλινδρικές και οι σφαιρικές, οι οποίες θα αναλυθούν σε επόμενα υποκεφάλαια.

Εδώ θα παρουσιαστεί σύντομα η θεωρία της γενικής περίπτωσης ορθοκανονικού συστήματος τέτοιων συντεταγμένων για τον τριδιάστατο χώρο.

Το να μπορούμε να αντιστοιχίσουμε κάθε σημείο του χώρου με μία τριάδα (u_1, u_2, u_3) είναι ισοδύναμο με το να γνωρίζουμε τις συναρτήσεις $x_i = x_i(u_j)$ που συνδέουν τις καρτεσιανές με τις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες και οι συναρτήσεις αυτές να είναι ένα προς ένα και αντιστρέψιμες, ώστε κάθε σημείο του χώρου να αντιστοιχεί σε μία και μόνο μία τριάδα (u_1, u_2, u_3).

Γράφοντας το διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \hat{x}_i$ μπορούμε να το θεωρήσουμε συνάρτηση των u_1, u_2, u_3 και να σκεφτούμε τη στοιχειώδη μετατόπιση σαν $d\boldsymbol{r} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j} du_j$ όπου $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \hat{x}_i$. Το μέρος $(d\boldsymbol{r})_j = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j} du_j$ που αντιστοιχεί στην μεταβολή της συντεταγμένης u_j έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j} = h_j\, \hat{u}_j$, όπου h_j το μέτρο του και $\hat{u}_j$ η διανυσματική μονάδα. Έτσι γράφεται $(d\boldsymbol{r})_j = h_j du_j\, \hat{u}_j$ και οι συναρτήσεις h_j λέγονται στοιχεία μήκους γιατί πολλαπλασιαζόμενα με τη μεταβολή του u_j δίνουν το αντίστοιχο μήκος της μετατόπισης $(d\boldsymbol{r})_j$.

Σε κάθε σημείο του χώρου η τριάδα των διανυσματικών μονάδων $(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$ αποτελεί διανυσματική βάση. Στα συστήματα που θα μας απασχολήσουν η βάση είναι ορθοκανονική, δηλ. εκτός του ότι τα διανύσματα της βάσης είναι μοναδιαία, είναι και κάθετα μεταξύ τους. Συνεπώς υπάρχει ένας πίνακας στροφής που συνδέει τα καρτεσιανά μοναδιαία με τα μοναδιαία των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων (ο οποίος βέβαια είναι γενικά συνάρτηση της θέσης). Δηλ. ισχύει $\hat{u}_j = \sum_{i=1}^{3} A_{ji} \hat{x}_i$ και ο αντίστροφος μετασχηματισμός αντιστοιχεί στον ανάστροφο πίνακα $\hat{x}_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ij} \hat{u}_j$. Όπως προκύπτει από τη σχέση $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_j} = h_j\, \hat{u}_j$ με $\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \hat{x}_i$ τα στοιχεία του πίνακα αυτού είναι $A_{ji} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}$.

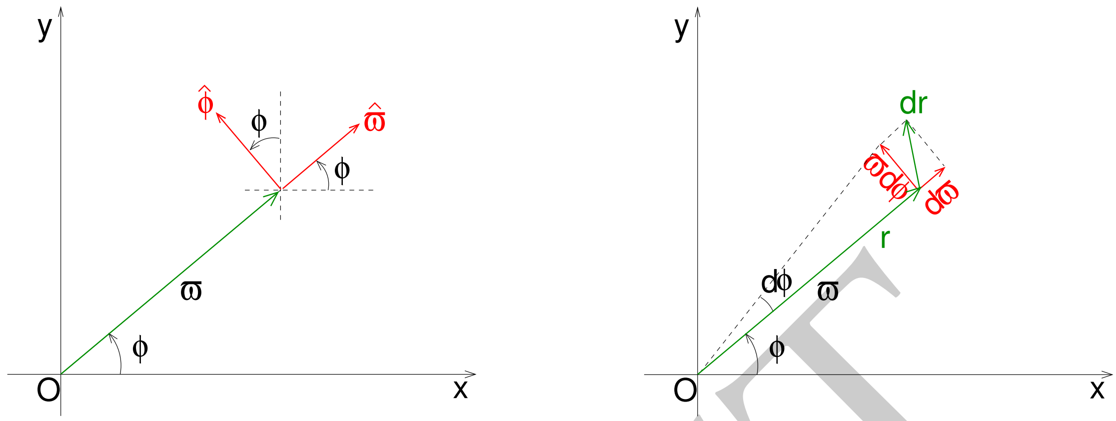
Αν σκεφτόμασταν τις σχέσεις $u_j = u_j(x_i)$ που δίνουν τις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες συναρτήσει των καρτεσιανών, τα διανύσματα βάσης θα μπορούσαμε να τα γράψουμε και σαν $\hat{u}_j = \frac{\boldsymbol{\nabla} u_j}{|\boldsymbol{\nabla} u_j|}$. Τα στοιχεία μήκους γράφονται και σαν $h_j = \frac{1}{|\boldsymbol{\nabla} u_j|}$.

Γνωρίζοντας τις συναρτήσεις $x_i = x_i(u_j)$, αλλά και τις σχέσεις που δίνουν τα $\hat{x}_i$ συναρτήσει των $\hat{u}_j$ μπορούμε να εκφράσουμε τη θέση $\boldsymbol{r}$ συναρτήσει των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων και των αντίστοιχων μοναδιαίων (παρότι συνήθως την εκφράζουμε αμεσότερα εκμεταλλευόμενοι τη γεωμετρία των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων). Η ταχύτητα βρίσκεται είτε παραγωγίζοντας τη θέση είτε αμεσότερα από $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \sum_j h_j \dot{u}_j \hat{u}_j$, ενώ η επιτάχυνση βρίσκεται παραγωγίζοντας την ταχύτητα. Σημειώστε ότι τα μοναδιαία $\hat{u}_j$ είναι στη γενική περίπτωση συναρτήσεις της θέσης και οι χρονικές τους παράγωγοι δεν είναι μηδενικές. Μπορούν να βρεθούν χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\hat{u}_j = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_j} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \hat{x}_i$, παραγωγίζοντας εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι τα καρτεσιανά μοναδιαία είναι σταθερά και κατόπιν αντικαθιστώντας τα καρτεσιανά μοναδιαία με τις σχέσεις που τα συνδέουν με τα μοναδιαία των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων.

2.4 Κινηματική σε πολικές συντεταγμένες

Έστω έχουμε επίπεδη κίνηση, έστω στο επίπεδο xy. Κάθε σημείο του επιπέδου μπορεί να αντιστοιχηθεί στην δυάδα συντεταγμένων ϖ, ϕ. Η πρώτη είναι η απόσταση του σημείου από την αρχή του συστήματος O και η δεύτερη είναι η προσανατολισμένη γωνία του διανύσματος θέσης από τον άξονα $\hat{x}$, όπως στο σχήμα 2.4 αριστερά. Τα σημεία με σταθερό ϖ βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το O και η συντεταγμένη ϖ παίρνει τιμές

$0 \le \varpi < +\infty$. Τα σημεία με σταθερό ϕ βρίσκονται σε ημιευθείες που ξεκινούν από το O. Αρκούν οι τιμές της ϕ σε ένα διάστημα 2π (π.χ. $\phi \in [0, 2\pi)$ ή $\phi \in (-\pi, \pi]$) για να καλύψουμε όλο το επίπεδο, αλλά πολλές φορές θεωρούμε ότι η γωνία $\phi \in (-\infty, +\infty)$, επιτρέποντας δηλ. πολλές τιμές της ϕ να αντιστοιχούν στην ίδια ημιευθεία, αφού κινούμενοι κυκλικά (με σταθερό ϖ) και προσθέτοντας ή αφαιρώντας πολλαπλάσια του 2π είναι προφανές ότι γυρνάμε στο ίδιο σημείο.



Σχήμα 2.4: Αριστερά: Οι πολικές συντεταγμένες ϖ, ϕ σημείου στο επίπεδο xy και τα μοναδιαία που αναλύονται σε $\hat{\varpi} = \hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi$, $\hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}$. Δεξιά: Μία στοιχειώδης μετατόπιση $d\boldsymbol{r}$ και η ανάλυσή της σε συνιστώσες πάνω στα μοναδιαία $\hat{\varpi}$ και $\hat{\phi}$.

Από τον ορισμό των συντεταγμένων, αλλά και γεωμετρικά από το σχήμα, προκύπτουν οι σχέσεις μεταξύ καρτεσιανών και πολικών

$$\left.\begin{array}{l} x = \varpi\cos\phi \\ y = \varpi\sin\phi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \varpi = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \text{κοινή λύση των } \sin\phi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ και } \cos\phi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}\right. \tag{2.5}$$

(για τον καθορισμό της ϕ δεν αρκεί ένας τριγωνομετρικός αριθμός).

Το μοναδιαίο $\hat{\varpi}$ έχει τη φορά του $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varpi}$, δηλ. της μετατόπισης όταν αυξάνεται η συντεταγμένη ϖ ενώ η ϕ μένει σταθερή. Από το σχήμα φαίνεται ότι αναλύεται σε $\hat{\varpi} = \hat{x}(\hat{x}\cdot\hat{\varpi}) + \hat{y}(\hat{y}\cdot\hat{\varpi}) = \hat{x}\cos\phi + \hat{y}\cos(\pi/2 - \phi) = \hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi$. Η αντίστοιχη μετατόπιση είναι $(d\boldsymbol{r})_\varpi = \hat{\varpi}d\varpi$ και φαίνεται στο σχήμα 2.4 δεξιά (η μετατόπιση έχει τη φορά του $\hat{\varpi}$ αν $d\varpi > 0$ και αντίρροπη αν $d\varpi < 0$). Όμοια το μοναδιαίο $\hat{\phi}$ έχει τη φορά του $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}$, δηλ. της μετατόπισης όταν αυξάνεται η συντεταγμένη ϕ ενώ η ϖ μένει σταθερή (μετατόπιση πάνω στην εφαπτομένη του κύκλου ακτίνας ϖ). Από το σχήμα φαίνεται ότι αναλύεται σε $\hat{\phi} = \hat{x}(\hat{x}\cdot\hat{\phi}) + \hat{y}(\hat{y}\cdot\hat{\phi}) = \hat{x}\cos(\pi/2+\phi) + \hat{y}\cos\phi = -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi$. Η αντίστοιχη μετατόπιση, όπως φαίνεται και στο σχήμα, είναι μήκος τόξου πάνω στον κύκλο ακτίνας ϖ που βαίνει σε γωνία $d\phi$, δηλ. $(d\boldsymbol{r})_\phi = \hat{\phi}\varpi\,d\phi$ (η μετατόπιση έχει τη φορά του $\hat{\phi}$ αν $d\phi > 0$ και αντίρροπη αν $d\phi < 0$).

Τα παραπάνω θα μπορούσαν να βρεθούν και γράφοντας το διάνυσμα θέσης σαν $\boldsymbol{r} = \hat{x}\varpi\cos\phi + \hat{y}\varpi\sin\phi$ και παραγωγίζοντας ως προς την κάθε συντεταγμένη. Είναι $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varpi} = \hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi$, το οποίο έχει μέτρο μονάδα, άρα το αντίστοιχο μοναδιαίο με την ίδια φορά είναι $\hat{\varpi} = \hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi$ και η αντίστοιχη μετατόπιση είναι $(d\boldsymbol{r})_\varpi = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varpi}d\varpi = \hat{\varpi}d\varpi$. Όμοια $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = -\hat{x}\varpi\sin\phi + \hat{y}\varpi\cos\phi$, το οποίο έχει μέτρο μονάδα $\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}\right| = \varpi$, άρα το αντίστοιχο μοναδιαίο με την ίδια φορά είναι $\hat{\phi} = -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi$ και η αντίστοιχη μετατόπιση είναι $(d\boldsymbol{r})_\phi = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}d\phi = \hat{\phi}\varpi\,d\phi$.

Τα μοναδιαία $\hat{\varpi}, \hat{\phi}$ είναι κάθετα μεταξύ τους και αποτελούν ορθοκανονική βάση των διανυσμάτων στο επίπεδο. Κάθε διάνυσμα μπορεί να αναλυθεί σε αυτά, π.χ. το $\hat{x} = \hat{\varpi}(\hat{\varpi}\cdot\hat{x}) + \hat{\phi}(\hat{\phi}\cdot\hat{x}) = \hat{\varpi}\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi$.

Στη βάση αυτή το διάνυσμα θέσης γράφεται σαν

$$\boldsymbol{r} = \varpi\hat{\varpi}\,, \tag{2.6}$$

όπως φαίνεται άμεσα από το σχήμα 2.4 αριστερά.
Η στοιχειώδης μετατόπιση όπως έχουμε ήδη πει αναλύεται σε

$$d\boldsymbol{r} = d\varpi\,\hat{\varpi} + \varpi d\phi\,\hat{\phi}\,. \tag{2.7}$$

Η έκφραση της στοιχειώδους μετατόπισης δίνει συναρτήσει των μεταβολών των συντεταγμένων το στοιχειώδες μήκος σε μία καμπύλη $ds = |d\boldsymbol{r}| = \sqrt{(d\varpi)^2 + \varpi^2(d\phi)^2}$, δίνει επίσης τη στοιχειώδη επιφάνεια σαν το γινόμενο των μετατοπίσεων $\varpi\, d\varpi\, d\phi$.
Μέσω της στοιχειώδους μετατόπισης η ταχύτητα άμεσα γράφεται σαν $\boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dfrac{\hat{\varpi}d\varpi + \hat{\phi}\varpi d\phi}{dt}$, δηλ.

$$\boldsymbol{v} = \hat{\varpi}\dot{\varpi} + \hat{\phi}\varpi\dot{\phi}\,. \tag{2.8}$$

Η σχέση αυτή δίνει τις συνιστώσες της ταχύτητας στη βάση των μοναδιαίων του συστήματος, δηλ. ότι ισχύει $v_\varpi = \dot{\varpi}$ και $v_\phi = \varpi\dot{\phi}$. Θα μπορούσε να βρεθεί και παραγωγίζοντας το διάνυσμα θέσης, δηλ. σαν $\boldsymbol{v} = \dfrac{d}{dt}(\varpi\hat{\varpi}) = \dot{\varpi}\hat{\varpi} + \varpi\dot{\hat{\varpi}}$. Η παράγωγος του μοναδιαίου βρίσκεται συνδέοντάς το με τα καρτεσιανά μοναδιαία $\dot{\hat{\varpi}} = \dfrac{d}{dt}(\hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi) = \dot{\phi}(-\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi)$ (είναι συνάρτηση του χρόνου μέσω της συνάρτησης $\phi(t)$) και επιστρέφοντας στη βάση των καμπυλόγραμμων συντεγμένων παρατηρώντας ότι ο συνδυασμός στην παρένθεση είναι ακριβώς το $\hat{\phi}$.
Η επιτάχυνση βρίσκεται παραγωγίζοντας την ταχύτητα $\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \dfrac{d}{dt}(\hat{\varpi}\dot{\varpi} + \hat{\phi}\varpi\dot{\phi}) = \dot{\hat{\varpi}}\dot{\varpi} + \hat{\varpi}\ddot{\varpi} + \dot{\hat{\phi}}\varpi\dot{\phi} + \hat{\phi}\dot{\varpi}\dot{\phi} + \hat{\phi}\varpi\ddot{\phi}$. Η παράγωγος $\dot{\hat{\varpi}}$ βρέθηκε πριν ίση με $\hat{\phi}\dot{\phi}$. Όμοια $\dot{\hat{\phi}} = \dfrac{d}{dt}(-\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi) = \dot{\phi}(-\hat{x}\cos\phi - \hat{y}\sin\phi) = -\hat{\varpi}\dot{\phi}$. Η τελική έκφραση της επιτάχυνσης είναι

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi} + (2\dot{\varpi}\dot{\phi} + \varpi\ddot{\phi})\hat{\phi}\,. \tag{2.9}$$

Μία χρήσιμη γραφή της $\hat{\phi}$ συνιστώσας της επιτάχυνσης είναι $a_\phi = \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{d(\varpi^2\dot{\phi})}{dt}$. Η στροφορμή ανά μάζα ως προς το Ο είναι $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v} = \varpi\hat{\varpi}\times(v_\varpi\hat{\varpi} + v_\phi\hat{\phi}) = \varpi v_\phi\hat{z} = \varpi^2\dot{\phi}\hat{z}$ γιατί το εξωτερικό γινόμενο $\hat{\varpi}\times\hat{\phi}$ είναι κάθετο στο επίπεδο xy και ίσο με $(\hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi)\times(-\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}) = \hat{z}$. Επομένως η παραπάνω γραφή της a_ϕ την συσχετίζει με την χρονική παράγωγο της $\hat{z}$ στροφορμής ανά μάζα.

Παράδειγμα 2.3:
Σε ένα τσίρκο με κυκλική πίστα ακτίνας R ένας θηριοδαμαστής και μια τίγρης παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι: Ο θηριοδαμαστής (Θ) κινείται στην περίμετρο της πίστας με ταχύτητα σταθερού μέτρου v.
Η τίγρης (Τ) ξεκινά το χρόνο $t = 0$ από το κέντρο της πίστας Ο και κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου U και τρόπο ώστε πάντα να βρίσκεται πάνω στην (κινούμενη) ακτίνα από το Ο στο Θ.
(α) Βρείτε τη διαφορική εξίσωση που δίνει το $\varpi(t)$, δηλ. την $\dfrac{d\varpi}{dt} = f(\varpi)$.
(β) Λύστε την εξίσωση αυτή και δείξτε ότι για $U \geq v$ η τίγρης θα φτάσει τον θηριοδαμαστή σε χρόνο $t = \dfrac{R}{v}\arcsin\dfrac{v}{U}$.
(γ) Τι σχήμα έχει η τροχιά της τίγρης;
Λύση: (α) Η κίνηση του θηριοδαμαστή σε πολικές συντεταγμένες σε σύστημα με αρχή το κέντρο της πίστας Ο περιγράφεται από $\varpi_\Theta = R$ και $R\dot{\phi}_\Theta = v \Leftrightarrow \phi_\Theta = (v/R)t$ (επιλέγοντας χωρίς βλάβη της γενικότητας άξονα x προς την αρχική θέση του θηριοδαμαστή).
Αν ϖ και ϕ είναι οι πολικές συντεταγμένες της τίγρης, το ότι βρίσκεται πάντα πάνω στην ευθεία ΟΘ σημαίνει

$\phi = \phi_\Theta = (v/R)t$. Επομένως η ταχύτητα της τίγρης είναι $\boldsymbol{u} = \dot{\varpi} + \varpi\frac{v}{R}\hat{\phi}$ και η απαίτηση το μέτρο της να είναι U δίνει την ζητούμενη διαφορική εξίσωση $\dot{\varpi}^2 + \varpi^2 v^2/R^2 = U^2 \Leftrightarrow \dot{\varpi} = \pm\sqrt{U^2 - \varpi^2 v^2/R^2}$. Προφανώς επιλέγουμε το θετικό πρόσημο αφού η τίγρης ξεκινά από το κέντρο και κινείται προς τα έξω, άρα η εξίσωση κίνησης είναι $\frac{d\varpi}{dt} = \sqrt{U^2 - \varpi^2\frac{v^2}{R^2}}$.

(β) Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών, γράφεται $\frac{d\varpi}{f(\varpi)} = dt$ και άρα ανάγεται σε ολοκλήρωμα. Επιλέγοντας τα κάτω όρια να αντιστοιχούν στην αρχική στιγμή $t = 0$ όπου $\varpi = 0$ και τα πάνω στην τυχαία θέση, βρίσκουμε $\int_0^\varpi \frac{d\varpi}{\sqrt{U^2 - \varpi^2 v^2/R^2}} = \int_0^t dt$. Το ολοκλήρωμα μοιάζει με $\int \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$, το οποίο βρίσκεται με την αντικατάσταση $\xi = \sin w$. Πράγματι θέτοντας $\varpi\frac{v}{R} = U\xi$ και $\xi = \sin w$ (η κατευθείαν $\varpi = \frac{RU}{v}\sin w$) το ολοκλήρωμα γράφεται $\int \frac{d\varpi}{\sqrt{U^2 - \varpi^2 v^2/R^2}} = \frac{R}{v}\int \frac{\cos w}{|\cos w|}dw = w +$ σταθερά (γιατί τουλάχιστον μέχρι το υπόριζο να μηδενιστεί είναι $0 \le w \le \pi/2$). Άρα η διαφορική εξίσωση ολοκληρώνεται σε $\frac{R}{v}\left[\arcsin\frac{\varpi v}{RU}\right]_0^\varpi = t \Leftrightarrow \arcsin\frac{\varpi v}{RU} = \frac{vt}{R} \Leftrightarrow \varpi = \frac{RU}{v}\sin\frac{vt}{R}$.

Αν $U \ge v$ η τίγρης θα φτάσει τον θηριοδαμαστή όταν $\varpi = R$, δηλ. σε χρόνο $t = \frac{R}{v}\arcsin\frac{v}{U}$.

(γ) Η τροχιά δίνεται σε παραμετρική μορφή από τις σχέσεις $\varpi = \frac{RU}{v}\sin\frac{vt}{R}$ και $\phi = \frac{vt}{R}$ (με παράμετρο το χρόνο). Απαλείφοντας το χρόνο μπορεί να δοθεί στην μορφή $\varpi = \frac{RU}{v}\sin\phi$, κάτι που είναι αρκετό για να την σχεδιάσουμε, σκεπτόμενοι ότι καθώς η ϕ αυξάνεται και η απόσταση αυξάνεται μέχρι να φτάσει την τιμή R σε κάποια γωνία $\phi < \pi/2$.

Η τροχιά είναι μάλιστα τμήμα κύκλου. Οι σχέσεις $x = \varpi\cos\phi = \frac{RU}{v}\sin\phi\cos\phi = \frac{RU}{v}\frac{\sin(2\phi)}{2}$ και $y = \varpi\sin\phi = \frac{RU}{v}\sin^2\phi = \frac{RU}{v}\frac{1-\cos(2\phi)}{2}$ συνεπάγονται, απαλείφοντας τη γωνία, $x^2 + \left(y - \frac{RU}{2v}\right)^2 = \left(\frac{RU}{2v}\right)^2$, δηλ. κύκλο ακτίνας $\frac{RU}{2v}$ με κέντρο το σημείο $x_c 0, y_c = \frac{RU}{2v}$.

Στην περίπτωση που $U < v$ η λύση που βρήκαμε $\arcsin\frac{\varpi v}{RU} = \frac{vt}{R} = \phi \Leftrightarrow \varpi = \frac{RU}{v}\sin\phi$ ισχύει μέχρι τη στιγμή που $\varpi = \frac{RU}{v} < R$. Από τη στιγμή αυτή και πέρα η εξίσωση $\dot{\varpi} = \pm\sqrt{U^2 - \varpi^2\frac{v^2}{R^2}}$ (της οποίας το δεξιό μέλος είναι στιγμιαία μηδενικό στην αρχή αυτής της δεύτερης φάσης κίνησης) δεν έχει μοναδική λύση. Η τίγρης θα μπορούσε να αρχίσει να κινείται προς μικρότερες ακτίνες, πάνω στο ημικύκλιο $\varpi = \frac{RU}{v}\sin\phi$ με $\phi \in (\pi/2, \pi)$, αλλά θα μπορούσε επίσης να κινείται συνεχώς πάνω στον κύκλο $\varpi = \frac{RU}{v}$ κάτι που θα επέλεγε αν ήθελε να είναι όσο κοντύτερα γίνεται στον θηριοδαμαστή.

Παράδειγμα 2.4:

Σώμα κινείται στο επίπεδο και οι πολικές του συντεταγμένες είναι σε κάθε χρόνο $\varpi = \varpi_0 + ct$, $\phi = \frac{\omega_0\varpi_0 t}{\varpi_0 + ct}$, όπου ϖ_0, c και ω_0 θετικές σταθερές.

(α) Βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση.

(β) Διατηρείται η στροφορμή;

(γ) Περιγράψτε την κίνηση για $\varpi_0\omega_0/c = 4\pi$.

Λύση:

(α) Αντικαθιστώντας $\dot{\varpi} = c$, $\ddot{\varpi} = 0$, $\dot{\phi} = \frac{\omega_0\varpi_0^2}{(\varpi_0 + ct)^2}$ και $\ddot{\phi} = -\frac{2\omega_0\varpi_0^2 c}{(\varpi_0 + ct)^3}$ στις εκφράσεις της ταχύτητας $\boldsymbol{v} = \hat{\varpi}\dot{\varpi} + \hat{\phi}\varpi\dot{\phi}$ και επιτάχυνσης $\boldsymbol{a} = (\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi} + (2\dot{\varpi}\dot{\phi} + \varpi\ddot{\phi})\hat{\phi}$ βρίσκουμε $\boldsymbol{v} = c\hat{\varpi} + \frac{\omega_0\varpi_0^2}{\varpi_0 + ct}\hat{\phi}$ και

$\boldsymbol{a} = -\dfrac{\omega_0^2\varpi_0^4}{(\varpi_0 + ct)^3}\hat{\varpi}.$

(β) Για να ελέγξουμε αν η στροφορμή διατηρείτε αρκεί να ελέγξουμε αν η χρονική της παράγωγος είναι μηδενική. Είναι γενικά $\dot{L} = \dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}) = \dot{\boldsymbol{r}} \times m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{a}$ (ο πρώτος όρος μηδενίζεται γιατί είναι εξωτερικό γινόμενο συγγραμμικών διανυσμάτων). Στην περίπτωσή μας όπου η $\boldsymbol{a}$ έχει μόνο $\hat{\varpi}$ συνιστώσα προκύπτει $\dot{L} = 0$ και άρα η στροφορμή διατηρείται.

Αυτό βέβαια συνδέεται και με την σχέση της a_ϕ με την παράγωγο της $\hat{z}$ στροφορμής (που για επίπεδη κίνηση όπως εδώ είναι η μόνη συνιστώσα). Στο συγκεκριμένο πρόβλημα είναι $a_\phi = 0$ και συνεπώς η παράγωγος της $\hat{z}$ στροφορμής είναι μηδενική.

(Εναλλακτικά είναι δυνατόν να υπολογίσουμε άμεσα την στροφορμή και να ελέγξουμε αν προκύπτει σταθερή. Είναι $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = m\varpi^2\dot{\phi}\hat{z}$ και η αντικατάσταση δίνει $\boldsymbol{L} = m\varpi_0^2\omega_0\hat{z}$, δηλ. σταθερό διάνυσμα.)

(γ) Οι καρτεσιανές συντεταγμένες είναι γνωστές συναρτήσεις του χρόνου μέσω των $x = \varpi\cos\phi = (\varpi_0 + ct)\cos\left(\dfrac{\omega_0\varpi_0 t}{\varpi_0 + ct}\right)$, $y = \varpi\sin\phi = (\varpi_0 + ct)\sin\left(\dfrac{\omega_0\varpi_0 t}{\varpi_0 + ct}\right)$. Αμεσότερα, μπορούμε να σκεφτούμε κατευθείαν σε πολικές συντεταγμένες. Η απόσταση $\varpi = \varpi_0 + ct$ έχει αρχική τιμή ϖ_0 και αυξάνεται μονότονα μέχρι απειρισμού σε άπειρο χρόνο. Η γωνία $\phi = \dfrac{\omega_0\varpi_0 t}{\varpi_0 + ct}$ είναι αρχικά μηδενική και αυξάνεται μονότονα προσεγγίζοντας την τιμή $\phi_\infty = \dfrac{\varpi_0\omega_0}{c}$ σε άπειρο χρόνο. Επομένως το σώμα αρχικά βρίσκεται στο σημείο $x = \varpi_0$ του x άξονα και έχει ταχύτητα $\boldsymbol{v}_0 = c\hat{x} + \omega_0\varpi_0\hat{y}$ (στην αρχική θέση $\hat{\varpi} = \hat{x}$ και $\hat{\phi} = \hat{y}$). Όσο περνά ο χρόνος αυξάνεται τόσο η απόσταση ϖ όσο και η γωνία ϕ, η οποία δείχνει πόσο στρέφεται το διάνυσμα θέσης. Στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι $\phi_\infty = 4\pi$, επομένως το διάνυσμα θέσης εκτελεί δύο πλήρεις περιστροφές μέχρι το σώμα να καταλήξει να κινείται παράλληλα στον άξονα x (το ότι $\lim_{t\to\infty}\phi = \phi_\infty$ σημαίνει ότι η ημιευθεία $\phi = \phi_\infty$ είναι ασύμπτωτη της τροχιάς). Σε άπειρο χρόνο η συντεταγμένη $x = \varpi\cos\phi$ τείνει στο $+\infty$ γιατί η απόσταση ϖ απειρίζεται ενώ η γωνία ϕ τείνει στην τιμή 4π που έχει συνημίτονο ίσο με μονάδα. Η συντεταγμένη $y = \varpi\sin\phi$ όμως είναι απροσδιόριστη γιατί το $\sin\phi$ τείνει στο μηδέν. Το όριο μπορεί να βρεθεί μέσω κανόνα L'Hôpital, ή ευκολότερα αν γράψουμε τη γωνία σαν $\phi = \dfrac{4\pi ct}{\varpi_0 + ct} = 4\pi - \dfrac{\varpi_0}{\varpi_0 + ct}$ οπότε $y = -(\varpi_0 + ct)\sin\left(\dfrac{\varpi_0}{\varpi_0 + ct}\right)$. Σε μεγάλους χρόνους το ημίτονο είναι περίπου ίσο με το (μικρό) όρισμά του, άρα $y \approx -(\varpi_0 + ct)\dfrac{\varpi_0}{\varpi_0 + ct}$ με πεπερασμένο όριο $-\varpi_0$. Επομένως πράγματι σε μεγάλους χρόνους το σώμα καταλήγει να κινείται σε ευθεία $y = -\varpi_0$ παράλληλα στον άξονα x.

2.5 Κινηματική σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Οι κυλινδρικές συντεταγμένες είναι η τριάδα (ϖ, ϕ, z), δηλ. οι πολικές της προβολής του διανύσματος θέσης στο επίπεδο xy μαζί με την καρτεσιανή z. Τα αντίστοιχα μοναδιαία $(\hat{\varpi}, \hat{\phi}, \hat{z})$ είναι ορθοκανονική βάση, δεξιόστροφη με τη σειρά αυτή (αφού $\hat{\varpi} \times \hat{\phi} = \hat{z}$), κάτι που μας επιτρέπει να υπολογίζουμε εξωτερικά γινόμενα μέσω ορίζουσας, όπως στις καρτεσιανές.

Σύμφωνα με το σχήμα 2.5 και τις γνωστές εκφράσεις για τις πολικές συντεταγμένες προκύπτουν άμεσα οι εκφράσεις για τη θέση, τη στοιχειώδη μετατόπιση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση

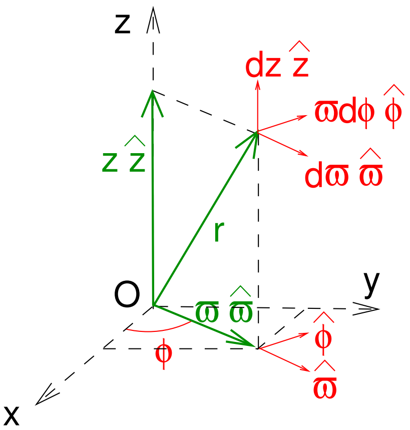
$$\boldsymbol{r} = \varpi\hat{\varpi} + z\hat{z}\,, \tag{2.10}$$

$$d\boldsymbol{r} = d\varpi\,\hat{\varpi} + \varpi d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z}\,, \tag{2.11}$$

$$\boldsymbol{v} = \hat{\varpi}\dot{\varpi} + \hat{\phi}\varpi\dot{\phi} + \dot{z}\,\hat{z}\,, \tag{2.12}$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi} + (2\dot{\varpi}\dot{\phi} + \varpi\ddot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z}\,. \tag{2.13}$$

Η έκφραση της στοιχειώδους μετατόπισης δίνει συναρτήσει των μεταβολών των συντεταγμένων το στοιχειώδες μήκος σε μία καμπύλη $ds = |d\boldsymbol{r}| = \sqrt{(d\varpi)^2 + \varpi^2(d\phi)^2 + (dz)^2}$, τη στοιχειώδη επιφάνεια σε επίπεδο $z =$



Σχήμα 2.5: Οι κυλινδρικές συντεταγμένες σημείου με διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{r}$ το οποίο αναλύεται σαν $\boldsymbol{r} = \varpi\hat{\varpi} + z\hat{z}$ και τα τρία ανεξάρτητα μέρη της στοιχειώδους μετατόπισης $d\boldsymbol{r} = d\varpi\,\hat{\varpi} + \varpi d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z}$.

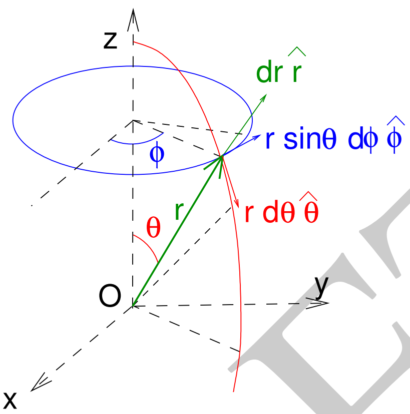
σταθερό που είναι το γινόμενο των υπόλοιπων μετατοπίσεων $\varpi\, d\varpi\, d\phi$ (εκτός της dz που είναι μηδενική), τη στοιχειώδη επιφάνεια πάνω σε ημιεπίπεδο ϕ = σταθερό που είναι το γινόμενο των υπόλοιπων μετατοπίσεων $d\varpi\, dz$ (εκτός της $\varpi\, d\phi$ που είναι μηδενική), τη στοιχειώδη επιφάνεια πάνω σε κύλινδρο ϖ = σταθερό που είναι το γινόμενο των υπόλοιπων μετατοπίσεων $\varpi\, d\phi\, dz$ (εκτός της $d\varpi$ που είναι μηδενική), δίνει επίσης το στοιχειώδη όγκο $\varpi\, d\varpi\, d\phi\, dz$.

Η στροφορμή υλικού σημείου μάζας m ως προς το O είναι $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \hat{\varpi} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ \varpi & 0 & z \\ mv_\varpi & mv_\phi & mv_z \end{vmatrix}$ και η $\hat{z}$ συνιστώσα της είναι $L_z = m\varpi v_\phi = m\varpi^2\dot{\phi}\hat{z}$. Όπως και στις πολικές συντεταγμένες, ισχύει $a_\phi = \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{d(\varpi^2\dot{\phi})}{dt} = \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{L_z}{m}\right)$.

Παράδειγμα 2.5:
Σώμα κινείται πάνω σε κύλινδρο ακτίνας R με άξονα z. Αν η κίνηση γίνεται με σταθερό μέτρο ταχύτητας και σταθερή $\hat{z}$ στροφορμή ως προς σημείο O του άξονα του κυλίνδρου, ποια η θέση σε κάθε χρόνο;
Λύση: Λόγω της γεωμετρίας τις επιφάνειας κίνησης είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες. Αυτές είναι $\varpi(t) = R$, $\phi(t)$, $z(t)$, με τις τελευταίες δύο να αποτελούν τους αγνώστους του προβλήματος.
Η θέση είναι $\boldsymbol{r} = R\hat{\varpi} + z\hat{z}$, η ταχύτητα $\boldsymbol{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}$ (γιατί $\varpi = R$ σε κάθε χρόνο άρα $\dot{\varpi} = 0$), το μέτρο της $|v| = \sqrt{R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2}$ και η $\hat{z}$ συνιστώσα της στροφορμής $L_z = \hat{z} \cdot (\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}) = mR^2\dot{\phi}$. Επομένως η σταθερότητα της L_z σημαίνει $\dot{\phi} = \omega$ = σταθερά και η σταθερότητας της $|v|$ σημαίνει $\dot{z} = v_z$ = σταθερά.
Ολοκληρώνοντας την πρώτη έχουμε $\int d\phi = \int \omega dt \Leftrightarrow \phi = \omega t + \phi_0$ όπου ϕ_0 σταθερά ολοκλήρωσης (θα μπορούσε να καθοριστεί αν γνωρίζαμε συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες).
Ολοκληρώνοντας όμοια τη δεύτερη προκύπτει $z = v_z t + C$ με σταθερά C.
Η λύση είναι $\varpi = R$, $\phi = \omega t + \phi_0$, $z = v_z t + C$ και περιγράφει ελικοειδή κίνηση. Η ακτίνα της έλικας είναι R και το βήμα της (το Δz που διανύει το σώμα μετά από μία περιστροφή $\Delta\phi = 2\pi$) είναι σταθερό και ίσο με $\beta = v_z\dfrac{2\pi}{\omega}$, διότι ο χρόνος περιστροφής $\Delta\phi = 2\pi \Leftrightarrow \Delta(\omega t + \phi_0) = 2\pi$ είναι $\Delta t = 2\pi/\omega$.
Η σταθερότητα του μέτρου της ταχύτητας σημαίνει $|\dot{z}|$ = σταθερά, οπότε γενικά επιτρέπονται και αλλαγές φοράς κίνησης στον άξονα z που αντιστοιχούν σε ακαριαίες αλλαγές του προσήμου της v_z, αρκεί η απόλυτη τιμή $|v_z|$ να μην αλλάζει. Επομένως η παραπάνω λύση ισχύει μεμονωμένα σε κάθε χρονικό διάστημα στο οποίο το πρόσημο της v_z παραμένει σταθερό. Αν π.χ. στο χρόνο t_1 έχουμε αλλαγή φοράς της v_z από θετική σε αρνητική τότε για $t < t_1$ η λύση είναι $\phi = \omega t + \phi_0$, $z = |v_z|t + C$, ενώ για $t > t_1$ η λύση είναι $\phi = \omega t + \phi_0$,

$z = -|v_z|t + C'$ με $C' = C + 2|v_z|t_1$ ώστε η θέση να είναι συνεχής.
Αν επιλέγαμε να λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες τα δεδομένα μεταφράζονται σε $x^2 + y^2 = R^2$, $x\dot{y} - y\dot{x} = L_z/m$ και $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v^2$. Είναι βέβαια δυνατόν να λυθεί το σύστημα αυτό και θα καταλήγαμε σε γενική λύση $x = R\cos(tL_z/mR^2 + \phi_0)$, $y = R\sin(tL_z/mR^2 + \phi_0)$, $z = v_z t + C$ αλλά η πορεία θα ήταν δυσκολότερη.

2.6 Κινηματική σε σφαιρικές συντεταγμένες



Σχήμα 2.6: Οι σφαιρικές συντεταγμένες σημείου με διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{r}$ το οποίο αναλύεται σαν $\boldsymbol{r} = r\hat{r}$ και τα τρία ανεξάρτητα μέρη της στοιχειώδους μετατόπισης $d\boldsymbol{r} = dr\,\hat{r} + rd\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}$.

Οι σφαιρικές συντεταγμένες είναι η τριάδα (r, θ, ϕ), όπου $r \in [0, \infty)$ η απόσταση από το O (το μέτρο του διανύσματος θέσης), $\theta \in [0, \pi]$ η γωνία μεταξύ $\hat{z}$ και $\boldsymbol{r}$, ενώ ϕ είναι η ίδια γωνία με την αντίστοιχη των κυλινδρικών, δηλ. η γωνία μεταξύ $\hat{x}$ και της προβολής του $\boldsymbol{r}$ κάθετα στον άξονα $\hat{z}$.

Οι σχέσεις μεταξύ σφαιρικών και καρτεσιανών συντεταγμένων προκύπτουν γεωμετρικά με βάση το σχήμα 2.6. Η προβολή του $\boldsymbol{r}$ στον άξονα z είναι $z = r\cos\theta$. Η προβολή στο επίπεδο xy είναι $\varpi = r\sin\theta$ και αν την προβάλλουμε στους άξονες x και y παίρνουμε τελικά

$$\left.\begin{array}{l} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \phi = \text{κοινή λύση των } \sin\phi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ και } \cos\phi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array}\right. \tag{2.14}$$

(για τον καθορισμό της ϕ δεν αρκεί ένας τριγωνομετρικός αριθμός, ενώ για τον καθορισμό της θ αρκεί το συνημίτονο το οποίο είναι μονότονη συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της $\theta \in [0, \pi]$).

Σταθερό r έχουν τα σημεία πάνω σε μία σφαίρα με κέντρο το O, σταθερό θ έχουν τα σημεία πάνω σε μία κωνική επιφάνεια με ημιάνοιγμα θ γύρω από τον άξονα z, ενώ σταθερό ϕ έχουν τα σημεία πάνω σε ένα «μεσημβρινό» ημιεπίπεδο, όπως και στις κυλινδρικές.

Αν μεταβάλλουμε μόνο το r, κρατώντας σταθερά τα θ και ϕ, το σημείο κινείται στην τομή του κώνου με το ημιεπίπεδο, δηλ. στην διεύθυνση του $\boldsymbol{r}$, κάθετα στην σφαίρα $r =$ σταθερό. Το $\hat{r}$ μοναδιαίο έχει τη φορά της μετατόπισης που αντιστοιχεί σε αύξηση του r, δηλ. τη φορά του $\boldsymbol{r}$. Η μετατόπιση που αντιστοιχεί σε αλγεβρική μεταβολή dr είναι $dr\,\hat{r}$ όπως φαίνεται στο σχήμα 2.6.
Όμοια, αν μεταβάλλουμε μόνο το θ, κρατώντας σταθερά τα r και ϕ, το σημείο κινείται στην τομή της σφαίρας με το ημιεπίπεδο, δηλ. πάνω σε «μεσημβρινό» ημικύκλιο που φαίνεται με κόκκινο χρώμα στο σχήμα 2.6. Το $\hat{\theta}$ μοναδιαίο έχει αυτή τη φορά (είναι κάθετο στην κωνική επιφάνεια $\theta =$ σταθερό) και η αντίστοιχη μετατόπιση είναι $rd\theta\,\hat{\theta}$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

Το $\hat{\phi}$ και η αντίστοιχη μετατόπιση είναι ίδια όπως στις κυλινδρικές (γίνεται πάνω στον κύκλο ακτίνας ϖ που φαίνεται με μπλε χρώμα στο σχήμα 2.6), απλά πρέπει να αντικαταστήσουμε $\varpi = r\sin\theta$.

Οι σχέσεις που συνδέουν τα μοναδιαία με τα καρτεσιανά μοναδιαία προκύπτουν είτε γεωμετρικά από το σχήμα, είτε βάσει των σχέσεων $\hat{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}/\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}\right|$, $\hat{\theta} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}/\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\right|$, $\hat{\phi} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}/\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}\right|$, θέτοντας $\boldsymbol{r} = r\sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + r\sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + r\cos\theta\,\hat{z}$. Προκύπτουν οι σχέσεις

$$\hat{r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}\,,\ \hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z}\,,\ \hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y} \tag{2.15}$$

Τα μοναδιαία $(\hat{r}\,,\hat{\theta}\,,\hat{\phi})$ είναι ορθοκανονική βάση, δεξιόστροφη με τη σειρά αυτή (αφού $\hat{r}\times\hat{\theta} = \hat{\phi}$), κάτι που μας επιτρέπει να υπολογίζουμε εξωτερικά γινόμενα μέσω ορίζουσας, όπως στις καρτεσιανές.
Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να αντιστραφούν. Π.χ. η έκφραση του $\hat{z}$ στη βάση $(\hat{r}\,,\hat{\theta}\,,\hat{\phi})$ είναι $\hat{z} = (\hat{z}\cdot\hat{r})\hat{r} + (\hat{z}\cdot\hat{\theta})\hat{\theta} + (\hat{z}\cdot\hat{\phi})\hat{\phi} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}$ (κάτι που θα μπορούσε βέβαια να βρεθεί και γεωμετρικά από το σχήμα προβάλλοντας το $\hat{z}$ πάνω στα $\hat{r}$ και $\hat{\theta}$).

Σύμφωνα με το σχήμα 2.6 προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις για τη θέση και τη στοιχειώδη μετατόπιση

$$\boldsymbol{r} = r\hat{r}\,, \tag{2.16}$$

$$d\boldsymbol{r} = dr\,\hat{r} + rd\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}\,. \tag{2.17}$$

(Η στοιχειώδης μετατόπιση προκύπτει και από $d\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}dr + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}d\phi = \hat{r}\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}\right|dr + \hat{\theta}\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\right|d\theta + \hat{\phi}\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}\right|d\phi$.)

Η έκφραση της στοιχειώδους μετατόπισης δίνει συναρτήσει των μεταβολών των συντεταγμένων το στοιχειώδες μήκος σε μία καμπύλη $ds = |d\boldsymbol{r}| = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta(d\phi)^2}$, τη στοιχειώδη επιφάνεια στη σφαιρική επιφάνεια $r =$ σταθερό που είναι το γινόμενο των υπόλοιπων μετατοπίσεων $r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi$ (εκτός της dr που είναι μηδενική), τη στοιχειώδη επιφάνεια πάνω σε ημιεπίπεδο $\phi =$ σταθερό που είναι το γινόμενο των υπόλοιπων μετατοπίσεων $r\,dr\,d\theta$ (εκτός της $\varpi\,d\phi$ που είναι μηδενική), τη στοιχειώδη επιφάνεια πάνω σε κώνο $\theta =$ σταθερό που είναι το γινόμενο των υπόλοιπων μετατοπίσεων $r\sin\theta\,dr\,d\phi$ (εκτός της $r\,d\theta$ που είναι μηδενική), δίνει επίσης το στοιχειώδη όγκο $r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$. Δίνει επίσης την ταχύτητα (που προκύπτει διαιρώντας την στοιχειώδη μετατόπιση με dt)

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\,\hat{\phi}\,. \tag{2.18}$$

Η επιτάχυνση προκύπτει παραγωγίζοντας την ταχύτητα. Η τελική έκφραση (που απαιτεί τον υπολογισμό των παραγώγων των μοναδιαίων) είναι

$$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 - r\,\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta} - r\,\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi})\,. \tag{2.19}$$

2.7 Κυκλική κίνηση

Αν ένα σώμα κινείται κυκλικά και έχουμε δικαίωμα να επιλέξουμε σύστημα αναφοράς και συντετατγμένες, η απλούστερη επιλογή είναι να θεωρήσουμε την κυκλική τροχιά πάνω στο επίπεδο xy (δηλ. το $z = 0$) με κέντρο την αρχή του συστήματος Ο και πολικές συντεταγμένες. Έτσι έχουμε σε κάθε χρόνο $\varpi = R$, την ακτίνα της τροχιάς, και η κίνηση καθορίζεται πλήρως από την $\phi(t)$.
Η ταχύτητα έχει μόνο αζιμουθακή συνιστώσα και είναι $\boldsymbol{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi}$. Αν χρησιμοποιήσουμε την γωνιακή ταχύτητα $\omega = \dot{\phi}$ η γραμμική ταχύτητα έχει αλγεβρική τιμή ωR όπως αναμένουμε (θετική όταν έχει τη φορά του $\hat{\phi}$).
Ορίζοντας το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{z}$ του οποίου το μέτρο είναι ίσο με $|\dot{\phi}|$, η διεύθυνση

είναι κάθετη στην τροχιά και η φορά συνδέεται με τη φορά περιστροφής του σώματος μέσω του κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία (αντίχειρας δεξιού χεριού στο $\boldsymbol{\omega}$ και δάκτυλα στη φορά περιστροφής πάνω στον κύκλο) μπορούμε να γράψουμε τη σχέση διανυσματικά

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \,. \tag{2.20}$$

Η έκφραση της επιτάχυνσης μπορεί να βρεθεί από την γενική έκφραση σε πολικές, αντικαθιστώντας $\varpi = R$ (οπότε μηδενίζονται οι παράγωγοι $\dot{\varpi}, \ddot{\varpi}$) και είναι $\boldsymbol{a} = -R\dot{\phi}^2\hat{\varpi} + R\ddot{\phi}\hat{\phi}$. Το πρώτο μέρος είναι η κεντρομόλος συνιστώσα της επιτάχυνσης η οποία έχει φορά προς το κέντρο της τροχιάς και το δεύτερο μέρος είναι η επιτρόχια συνιστώσα της επιτάχυνσης η οποία έχει διεύθυνση πάνω στην εφαπτομένη της τροχιάς (δηλ. πάνω στην ταχύτητα).

Η κεντρομόλος γράφεται και $-\dfrac{v^2}{R}\hat{\varpi}$, ή και $-\omega^2 R\hat{\varpi}$ το οποίο εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι ισούται με $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$.
Η επιτρόχια μπορεί να γραφεί και σαν $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}$.
Έτσι καταλήγουμε στην έκφραση της επιτάχυνσης

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} \,, \tag{2.21}$$

η οποία θα μπορούσε να προκύψει και παραγωγίζοντας την έκφραση της ταχύτητας $\boldsymbol{a} = \dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}$.
Σημειώστε ότι οι εκφράσεις 2.20 και 2.21 ισχύουν γενικά αν η περιστροφή γίνεται γύρω από τον άξονα z, δηλ. ακόμα και αν το κέντρο έχει θέση $\boldsymbol{r}_K = z_K\hat{z}$ και το επίπεδο τροχιάς είναι το $z = z_K$ (οπότε η θέση είναι $\boldsymbol{r} = R\hat{\varpi} + z_K\hat{z}$).
Ακόμα γενικότερα, για κάθε επίπεδη κυκλική κίνηση μπορούμε να ορίσουμε άξονα περιστροφής που περνά από το κέντρο της τροχιάς και είναι κάθετος σε αυτή, δηλ. έχει τη διεύθυνση $\hat{\omega}$. Τότε οι εκφράσεις 2.20 και 2.21 ισχύουν αρκεί η αρχή ως προς την οποία μετράμε το διάνυσμα θέσης να είναι σημείο του άξονα περιστροφής.

2.8 Επιτρόχια και κεντρομόλος επιτάχυνση

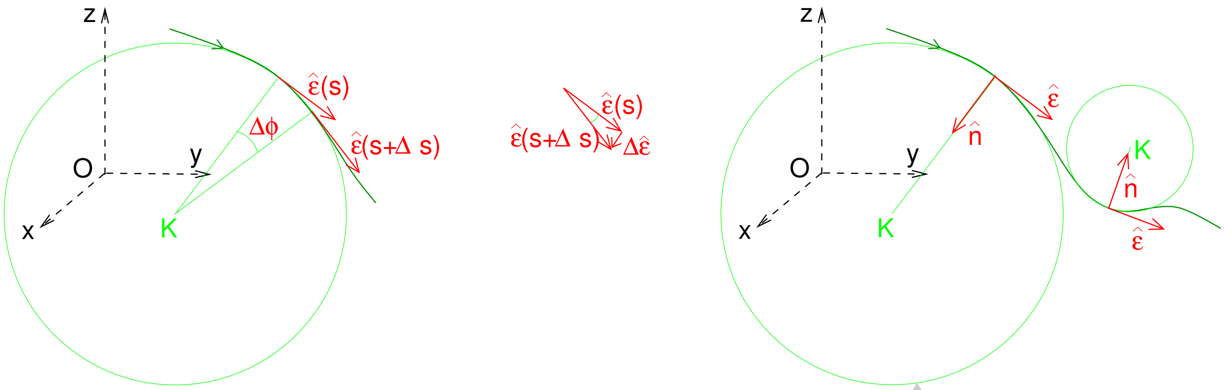
Μέχρι τώρα έχουμε δει πως περιγράφεται η κίνηση ως προς σημείο Ο, αναλύοντας τα διανύσματα που την περιγράφουν σε κάποια συγκεκριμένη βάση που σχετίζεται με την επιλογή των συντεταγμένων του συστήματος αναφοράς (είτε καρτεσιανές, είτε κυλινδρικές, είτε σφαιρικές, είτε πολικές που μπορούν να θεωρηθούν υποπερίπτωση των κυλινδρικών ή των σφαιρικών). Υπάρχει όμως τρόπος να ορίσουμε βάση διανυσμάτων η οποία καθορίζεται από την ίδια την τροχιά του σώματος.

Για κάθε τροχιά υλικού σημείου, όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 2.1, το διάνυσμα θέσης από το σημείο Ο μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση του χρόνου $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. Όμως η τροχιά είναι γεωμετρικό αντικείμενο, δεν εξαρτάται από το πόσο γρήγορα τρέχει το σώμα πάνω της. Μπορεί συνεπώς να παραμετροποιηθεί εντελώς γεωμετρικά, σαν $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, όπου s είναι το μήκος πάνω στην τροχιά ξεκινώντας τη μέτρηση από ένα συγκεκριμένο σημείο της. Η φορά κατά την οποία το s αυξάνεται μπορεί να επιλεγεί να είναι η φορά κίνησης του σώματος.

Η χρονική εξέλιξη της κίνησης του σώματος προκύπτει από την σχέση $s(t)$ που καθορίζει την κίνηση του σώματος πάνω στην τροχιά και τελικά μετατρέπει το διάνυσμα θέσης σε συνάρτηση του χρόνου $\boldsymbol{r}[s(t)]$. Η ταχύτητα του σώματος μπορεί να γραφεί σαν παράγωγος σύνθετης συνάρτησης $\boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dfrac{ds}{dt}\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$. Ο προτελευταίος όρος είναι ίσος με το μέτρο της ταχύτητας, ενώ ο τελευταίος, λόγω της σχέσης $ds = |d\boldsymbol{r}|$, είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\varepsilon} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ στην επαφτόμενη της τροχιάς (γιατί για στοιχειώδεις μεταβολές το $\Delta\boldsymbol{r}$ βρίσκεται πάνω στην εφαπτομένη όπως δείχνει και το σχήμα 2.1 αριστερά) και καθορίζεται πλήρως από την γεωμετρία της. Έτσι μπορούμε να γράψουμε την ταχύτητα

$$\boldsymbol{v} = v\,\hat{\varepsilon} \,, \tag{2.22}$$

ουσιαστικά αναλύοντάς την σε μέτρο $v = \dot{s}$ επί διανυσματική μονάδα $\hat{\varepsilon} = \dfrac{\boldsymbol{v}}{v}$.



Σχήμα 2.7: Αριστερά: Η τροχιά ενός σώματος (πράσινη καμπύλη), το εφαπτόμενο μοναδιαίο σε δύο κοντινές θέσεις και οι κάθετες σε αυτό που συναντώνται στο κέντρο καμπυλότητας K και σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\Delta\phi$. Μέσο: Τα εφαπτόμενα μοναδιαία με κοινή αρχή. Η γωνία μεταξύ τους είναι $\Delta\phi$ (αφού είναι κάθετα στις δύο ακτίνες του εφαπτόμενου κύκλου). Η διαφορά τους $\Delta\hat{\varepsilon}$ έχει μέτρο $\Delta\phi$ (μπορεί να θεωρηθεί τόξο σε μοναδαιαίο κύκλο) και φορά κάθετη στο $\hat{\varepsilon}$ για $\Delta s \to 0$. Δεξιά: Το εφαπτόμενο μοναδιαίο $\hat{\varepsilon}$ και το κάθετο μοναδιαίο $\hat{n}$ προς το κέντρο καμπυλότητας K.

Η επιτάχυνση προκύπτει παραγωγίζοντας την έκφραση της ταχύτητας. Για να τη βρούμε θα χρειαστούμε την παράγωγο του εφαπτόμενου μοναδιαίου.

Το σχήμα 2.7 δείχνει το εφαπτόμενο μοναδιαίο σε δύο κοντινές θέσεις $\hat{\varepsilon}(s)$ και $\hat{\varepsilon}(s + \Delta s)$. Οι κάθετες σε αυτά έχουν ελαφρώς διαφορετικές διευθύνσεις λόγω της καμπυλότητας της τροχιάς. Προσεγγίζοντας την τροχιά τοπικά σαν κύκλο, το κέντρο του κύκλου αυτού λέγεται κέντρο καμπυλότητας και προκύπτει από την τομή των κάθετων στα διαδοχικά εφαπτομενικά μοναδιαία. Η ακτίνα αυτού του εφαπτόμενου κύκλου λέγεται ακτίνα καμπυλότητας R και το αντίστροφό της καμπυλότητα $\kappa = 1/R$. Αν οι κάθετες στα κοντινά μοναδιαία σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\Delta\phi$ τότε το μήκος Δs είναι μήκος τόξου στον κύκλο ακτίνας R που βαίνει σε γωνία $\Delta\phi$, άρα ισχύει $\Delta s = R\Delta\phi$, ή, $\dfrac{d\phi}{ds} = \kappa = \dfrac{1}{R}$.

Την ίδια γωνία $\Delta\phi$ σχηματίζουν μεταξύ τους και τα $\hat{\varepsilon}(s)$ και $\hat{\varepsilon}(s + \Delta s)$ (γωνίες με κάθετες πλευρές είναι ίσες). Όπως φαίνεται στο σχήμα 2.7 μέσο, όταν μεταφέρουμε τα δύο εφαπτομενικά μοναδιαία ώστε να έχουν κοινή αρχή μπορούν να θεωρηθούν δύο ακτίνες σε ένα κύκλο μοναδιαίας ακτίνας. Η διαφορά τους $\Delta\hat{\varepsilon}$ στο όριο $\Delta s \to 0$ μπορεί να θεωρηθεί τόξο που βαίνει σε γωνία $\Delta\phi$ και άρα έχει μέτρο $\Delta\phi$. Η φορά του $\Delta\hat{\varepsilon}$ στο όριο $\Delta s \to 0$ είναι κάθετη στο εφαπτόμενο διάνυσμα, δηλ. έχει φορά προς το κέντρο καμπυλότητας.

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα βρίσκουμε την παράγωγο του εφαπτομενικού μοναδιαίου $\dfrac{d\hat{\varepsilon}}{ds} = \dfrac{d\phi}{ds}\hat{n} = \dfrac{\hat{n}}{R}$, όπου $\hat{n}$ το μοναδιαίο προς το κέντρο καμπυλότητας. Τα δύο αυτά μοναδιαία ορίζονται σε κάθε σημείο της τροχιάς (και είναι γενικά διαφορετικά, όπως και το κέντρο και η ακτίνα καμπυλότητας). Το σχήμα 2.7 δεξιά δείχνει τα μοναδιαία αυτά σε δύο σημεία της τροχιάς.

Η χρονική παράγωγος του εφαπτομενικού μοναδιαίου είναι $\dot{\hat{\varepsilon}} = \dfrac{d\hat{\varepsilon}}{ds}\dot{s} = \dfrac{v}{R}\hat{n}$ και η επιτάχυνση $\boldsymbol{a} = \dfrac{d(v\hat{\varepsilon})}{dt} = \dot{v}\hat{\varepsilon} + v\dot{\hat{\varepsilon}}$ προκύπτει

$$\boldsymbol{a} = \dot{v}\hat{\varepsilon} + \frac{v^2}{R}\hat{n}\,. \tag{2.23}$$

Ο πρώτος όρος εκφράζει την επιτρόχια συνιστώσα $\boldsymbol{a}_\varepsilon = \dot{v}\hat{\varepsilon}$ η οποία συνδέεται με την αλλαγή του μέτρου της ταχύτητας και ο δεύτερος την κεντρομόλο $\boldsymbol{a}_\kappa = \dfrac{v^2}{R}\hat{n}$ η οποία συνδέεται με την αλλαγή κατεύθυνσης της ταχύτητας, δηλ. την καμπυλότητα της τροχιάς. (Η σχέση αυτή είναι προφανής γενίκευση της κυκλικής κίνησης, αφού βασίζεται στο ότι τοπικά η τροχιά μπορεί να θεωρηθεί κυκλική. Το κέντρο και η ακτίνα καμπυλότητας όμως γενικά δεν είναι σταθερά.)

Η κινηματική προσφέρει ένα τρόπο υπολογισμού της καμπυλότητας μιας τροχιάς. Αν ξέρουμε την ταχύτητα και την επιτάχυνση ενός σώματος που κινείται πάνω στην τροχιά εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύει

$$R = \frac{v^3}{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}|} \tag{2.24}$$

(υπολογίζοντας το μέτρο του εξωτερικού γινομένου $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}$ χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 2.22, 2.23 και θέτοντας $|\hat{n} \times \hat{\varepsilon}| = 1$).
Είναι αξιοσημείωτο ότι παρότι τα μεγέθη που έχει η προηγούμενη σχέση εξαρτώνται από τα χαρακτηριστικά της κίνησης του σώματος (πόσο γρήγορα τρέχει πάνω στην τροχιά), το αποτέλεσμα είναι γεωμετρικό χαρακτηριστικό της τροχιάς και θα προκύψει ίδιο ανεξάρτητα με το ποια είναι η ταχύτητα του σώματος.

Παρότι για να περιγράψουμε την ταχύτητα και την επιτάχυνση αρκούν τα δύο μοναδιαία $\hat{\varepsilon}$, $\hat{n}$, η βάση διανυσμάτων στον τριδιάστατο χώρο έχει και το τρίτο $\hat{b} = \hat{\varepsilon} \times \hat{n}$ που είναι τοπικά κάθετο στο επίπεδο της τροχιάς. Η τριάδα $(\hat{\varepsilon}, \hat{n}, \hat{b})$, με αυτή τη σειρά, αποτελεί δεξιόστροφη ορθοκανονική βάση που ορίζεται σε κάθε σημείο της τροχιάς και ονομάζεται συνοδεύον τρίεδρο ή τρίεδρο Frenet–Serret.

Γενικά για τριδιάστατες τροχιές το επίπεδο της τροχιάς στρέφεται. Η σχέση $\dfrac{d\hat{b}}{ds} = -\tau\hat{n}$ ορίζει το μέγεθος τ που συνδέεται με αυτή την αλλαγή και λέγεται στρέψη (η παράγωγος $\dfrac{d\hat{b}}{ds}$ δεν έχει συνιστώσα πάνω στο $\hat{b}$ κάτι που προκύπτει από $\dfrac{d(\hat{b}\cdot\hat{b})}{ds} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d\hat{b}}{ds}\cdot\hat{b} = 0$, ούτε πάνω στο $\hat{\varepsilon}$ κάτι που προκύπτει από $\dfrac{d(\hat{b}\cdot\hat{\varepsilon})}{ds} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d\hat{b}}{ds}\cdot\hat{\varepsilon} + \hat{b}\cdot\dfrac{\hat{n}}{R} = 0$).
Παραγωγίζοντας τη σχέση $\hat{n} = \hat{b} \times \hat{\varepsilon}$ προκύπτει $\dfrac{d\hat{n}}{ds} = \tau\hat{b} - \kappa\hat{\varepsilon}$. Αυτή η σχέση, μαζί με τις $\dfrac{d\hat{\varepsilon}}{ds} = \kappa\hat{n}$ και $\dfrac{d\hat{b}}{ds} = -\tau\hat{n}$ καθορίζουν την αλλαγή της βάσης με το μήκος πάνω στην καμπύλη s και λέγονται στη διαφορική γεωμετρία εξισώσεις Frenet–Serret.

Παράδειγμα 2.6:
Βρείτε την καμπυλότητα μίας καμπύλης $y = y(x)$.
Λύση:
Θεωρώντας ένα σώμα να κινείται πάνω στην καμπύλη αυτή η ταχύτητα είναι $\boldsymbol{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}$ και η επιτάχυνση $\boldsymbol{a} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y}$, οπότε η καμπυλότητα είναι $\kappa = \dfrac{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{v}|}{v^3} = \dfrac{|\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}$. Για απλούστευση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σώμα κινείται με τρόπο ώστε $x = t$, οπότε η καμπυλότητα είναι $\kappa = \dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$ όπου ο τόνος σημαίνει παράγωγος ως προς x.
(Μπορούμε να διώξουμε το απόλυτο και να θεωρούμε θετική καμπυλότητα όταν η καμπύλη έχει κοίλα προς τα πάνω και αρνητική όταν έχει κοίλα προς τα κάτω.)
Αλλιώς: Η γωνία μεταξύ της εφαπτόμενης στην καμπύλη και του άξονα x είναι $\phi = \arctan y'$ και το στοιχειώδες μήκος της καμπύλης είναι $ds = dx\sqrt{1+y'^2}$. Η καμπυλότητα είναι $\kappa = \dfrac{d\phi}{ds} = \dfrac{(\arctan y')'}{\sqrt{1+y'^2}} = \dfrac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$.

Παράδειγμα 2.7:
Σε επίπεδη τροχιά γνωρίζουμε ότι τα μέτρα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης είναι σταθερά. Δείξτε ότι η τροχιά είναι κυκλική.
Λύση:
Η επιτάχυνση είναι μόνο κεντρομόλος (η επιτρόχια είναι μηδενική αφού δεν αλλάζει το μέτρο της ταχύτητας), οπότε $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{v}|$ και $R = \dfrac{v^3}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{v}|} = \dfrac{v^2}{|\boldsymbol{a}|} =$ σταθερά, που σημαίνει ότι η τροχιά είναι κυκλική.
(Αν επιλέγαμε καρτεσιανές τα δεδομένα μεταφράζονται σε $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2 =$ σταθερά και $\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = a^2 =$

σταθερά. Οι σχέσεις αυτές οδηγούν σε εξίσωση κύκλου $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$, αλλά η πορεία δεν είναι καθόλου εύκολη.)

Παράδειγμα 2.8:
Έστω επίπεδη κίνηση σε έλλειψη με ταχύτητα σταθερού μέτρου. Σε ποια σημεία της τροχιάς η επιτάχυνση έχει μέγιστο μέτρο;
Λύση:
Αφού το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό η επιτάχυνση είναι μόνο κεντρομόλος και το μέτρο της είναι $a=\dfrac{v^2}{R}$. Γίνεται μέγιστο στα σημεία με ελάχιστη ακτίνα καμπυλότητας, δηλ. στα άκρα του μεγάλου άξονα.

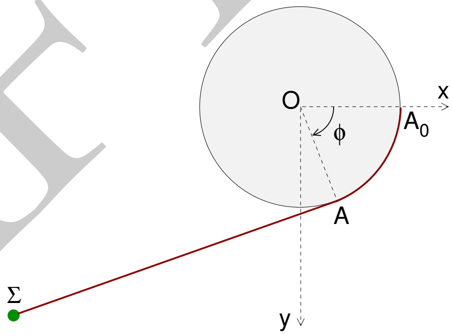
Παράδειγμα 2.9:
Δαχτυλίδι κινείται σε σύρμα σχήματος $y = \cosh x$ με ταχύτητα σταθερού μέτρου $v = 1$. Αρχικά (για $t = 0$) είναι $x = 0$ και $\dot{x} > 0$. Να βρεθούν σε κάθε χρόνο η θέση, η ταχύτητα, η επιτάχυνση, τα μοναδιαία πάνω και κάθετα στην τροχιά, οι επιτρόχια και κεντρομόλος συνιστώσες της επιτάχυνσης και η ακτίνα καμπυλότητας. Δίνονται $\cosh x = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\cosh^2 x = 1+\sinh^2 x$, $\mathrm{arcsinh}\xi = \ln\left(\xi+\sqrt{1+\xi^2}\right)$.
Λύση:
Εκμεταλλευόμενοι τη σχέση $y = y(x)$ μπορούμε να θεωρήσουμε τη θέση συνάρτηση του x, δηλ. $\boldsymbol{r} = x\hat{x}+y\hat{y} = x\hat{x}+\cosh x\,\hat{y}$.
Η ταχύτητα είναι $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\left(\hat{x}+\sinh x\hat{y}\right)$.
(Το ίδιο προκύπτει από την σχέση $\boldsymbol{v} = \dot{x}\hat{x}+\dot{y}\hat{y}$ με $\dot{y} = \dfrac{dy}{dx}\dot{x}$.)
Το μέτρο της είναι $|\boldsymbol{v}| = 1 \Leftrightarrow |\dot{x}|\sqrt{1+\sinh^2 x} = 1$, ή $|\dot{x}|\cosh x = 1$, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Αρχικά είναι $\dot{x} > 0$ οπότε τουλάχιστον σε μια περίοδο κοντά στην αρχική στιγμή είναι $\dot{x} = \dfrac{1}{\cosh x}$. Το ότι η $\dot{x}$ δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο σημαίνει ότι θα είναι διαρκώς θετική, δηλ. η προηγούμενη σχέση ισχύει σε κάθε χρόνο.
Η σχέση αυτή είναι διαφορική χωριζομένων μεταβλητών και ολοκληρώνεται σε $\int_0^x \cosh x\,dx = \int_0^t dt \Leftrightarrow [\sinh x]_0^x = t \Leftrightarrow \sinh x = t \Leftrightarrow x = \mathrm{arcsinh}t$. Η συνάρτηση αυτή γράφεται και $x = \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$.
Η άλλη συντεταγμένη είναι $y = \cosh x = \sqrt{1+\sinh^2 x} = \sqrt{1+t^2}$.
Η ταχύτητα έχει τη φορά του $\hat{x}+\sinh x\hat{y} = \hat{x}+t\hat{y}$ και αφού είναι μοναδιαία είναι $\boldsymbol{v} = \dfrac{\hat{x}+t\hat{y}}{\sqrt{1+t^2}}$.
Το εφαπτόμενο μοναδιαίο είναι $\hat{\varepsilon} = \dfrac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \dfrac{\hat{x}+t\hat{y}}{\sqrt{1+t^2}}$.
Η επιτάχυνση μπορεί να βρεθεί παραγωγίζοντας την ταχύτητα $\boldsymbol{a} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\hat{x}+t\hat{y}}{\sqrt{1+t^2}}\right) = \dfrac{-t\hat{x}+\hat{y}}{(1+t^2)^{3/2}}$.
Η επιτρόχια συνιστώσα είναι μηδενική αφού το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό, $\boldsymbol{a}_\varepsilon = \dot{v}\hat{\varepsilon} = 0$ (αυτό προκύπτει και από $\boldsymbol{a}_\varepsilon = (\boldsymbol{a}\cdot\hat{\varepsilon})\hat{\varepsilon}$).
Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι λοιπόν $\boldsymbol{a}_\kappa = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}_\varepsilon = \dfrac{-t\hat{x}+\hat{y}}{(1+t^2)^{3/2}}$.
Το μοναδιαίο προς το κέντρο καμπυλότητας έχει τη φορά της $\boldsymbol{a}_\kappa$, επομένως είναι $\hat{n} = \dfrac{\boldsymbol{a}_\kappa}{|\boldsymbol{a}_\kappa|} = \dfrac{-t\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{1+t^2}}$.
Η ακτίνα καμπυλότητας βρίσκεται από $|\boldsymbol{a}_\kappa| = \dfrac{v^2}{R}$ να είναι $R = \dfrac{v^2}{|\boldsymbol{a}_\kappa|} = 1+t^2$.
Τόσο το $\hat{n}$ όσο και η ακτίνα καμπυλότητας θα μπορούσαν να βρεθούν από τη σχέση $\dfrac{d\hat{\varepsilon}}{ds} = \dfrac{\hat{n}}{R}$ θέτοντας $\hat{\varepsilon} = \dfrac{\hat{x}+t\hat{y}}{\sqrt{1+t^2}}$ και $ds = vdt$, δηλ. $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{v}\left|\dfrac{d\hat{\varepsilon}}{dt}\right|$ και $\hat{n} = \dfrac{d\hat{\varepsilon}}{dt}/\left|\dfrac{d\hat{\varepsilon}}{dt}\right|$. Θα μπορούσαμε μάλιστα να βρούμε πρώτα το μοναδιαίο αυτό και μετά τις συνιστώσες της επιτάχυνσης $\boldsymbol{a}_\kappa = (\boldsymbol{a}\cdot\hat{n})\hat{n}$ και $\boldsymbol{a}_\varepsilon = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}_\kappa$.

2.9 Ασκήσεις

Ασκήσεις με λύση

2.9.1 Σώμα μάζας m ακολουθεί τροχιά λογαριθμικής σπείρας $\varpi = \varpi_0 e^{-k\phi}$, όπου ϖ_0 και k θετικές σταθερές. Η κίνηση ξεκινά με αρχικές συνθήκες για $t = 0$, $\phi\big|_{t=0} = 0$, $\dot{\phi}\big|_{t=0} = L_0/m\varpi_0^2 > 0$ και γίνεται με τρόπο ώστε η στροφορμή $\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = L\hat{z}$ να ελαττώνεται με ρυθμό $\dot{L} = -\lambda$, όπου λ θετική σταθερά.
(α) Βρείτε θέση και ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου.
(β) Οι δυο χρονικές κλίμακες του προβλήματος σχετίζονται με την αλλαγή της θέσης (ταχύτητα) και την αλλαγή της στροφορμής. Αυτοί οι χρόνοι είναι $\tau_v = \left|\frac{\varpi}{\dot{\varpi}}\right|_{t=0} = \frac{m\varpi_0^2}{kL_0}$ και $\tau_L = \left|\frac{L}{\dot{L}}\right|_{t=0} = \frac{L_0}{\lambda}$. Μελετήστε τη χρονική εξέλιξη της κίνησης του σώματος και δείξτε ότι είναι διαφορετική ανάλογα με το αν η τιμή του λόγου τ_L/τ_v είναι > 1, $= 1$, ή < 1. (Διερευνήστε αν το σώμα φτάνει στο κέντρο, αν αλλάζει φορά κίνησης, αν απειρίζεται η κινητική ενέργεια.)

2.9.2 Σώμα Σ μάζας m κινείται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, δεμένο μέσω ενός αβαρούς και μη-εκτατού νήματος μήκους ℓ_0 με ένα σταθερό κατακόρυφο πάσσαλο ακτίνας R. Η κάτοψη φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.
Το σταθερό άκρο του νήματος είναι το A_0, το μέρος του A_0A είναι τυλιγμένο στον πάσσαλο, ενώ το υπόλοιπο ΑΣ είναι τεντωμένο. Οι πολικές συντεταγμένες του Α είναι R, ϕ και τα αντίστοιχα μοναδιαία $\hat{\varpi}_A = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}$, $\hat{\phi}_A = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}$.
(α) Αιτιολογήστε γιατί η θέση του Σ γράφεται συναρτήσει της γωνίας ϕ σαν $\boldsymbol{r} = R\hat{\varpi}_A + (\ell_0 - R\phi)\hat{\phi}_A$.
(β) Δείξτε ότι η ταχύτητα του Σ είναι κάθετη στο νήμα.
(γ) Βρείτε την επιτάχυνση του σώματος σαν συνάρτηση της $\phi(t)$ και των παραγώγων της.
(δ) Βρείτε την στροφορμή ως προς το Ο.



2.9.3 Σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας R, με γωνιακή ταχύτητα $\dot{\phi} = \omega(t)$, τέτοια ώστε η κεντρομόλος επιτάχυνση να είναι ανάλογη του τετραγώνου της επιτρόχιας επιτάχυνσης, $a_\kappa = \frac{t_0^2}{R}a_\varepsilon^2$, όπου $t_0 =$ σταθερά. Ποιά είναι η συνάρτηση $\omega(t)$;

2.9.4 Σώμα κινείται στο επίπεδο xy και σε κάθε χρόνο $t > 0$ έχει θέση $x = \cos t + t\sin t$, $y = \sin t - t\cos t$.
(α) Βρείτε την ταχύτητά του $\boldsymbol{v}$ και την επιτάχυνσή του $\boldsymbol{a}$.
(β) Δείξτε ότι σε μικρούς χρόνους ($t \ll 1$) το σώμα αρχίζει να κινείται στον άξονα x.
(γ) Σχεδιάστε την τροχιά του σώματος βασισμένοι στο πως αλλάζει με το χρόνο η κατεύθυνση και το μέτρο της ταχύτητας.
(δ) Βρείτε το εφαπτόμενο διάνυσμα στην τροχιά, τις επιτρόχια και κεντρομόλο συνιστώσες της επιτάχυνσης, την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς και το μοναδιαίο προς το κέντρο καμπυλότητας.
(ε) Βρείτε το μήκος της τροχιάς που διανύει το σώμα σε χρόνο t.
(στ) Βρείτε τις γωνίες μεταξύ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{v}$, μεταξύ $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$ και μεταξύ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{r}$. Δείξτε ότι είναι αντίστοιχα, $\arctan t$, $\arctan t$, $2\arctan t$.

Άλυτες ασκήσεις

2.9.1 Σώμα διαγράφει την καρδιοειδή καμπύλη η οποία σε πολικές συντεταγμένες έχει εξίσωση $\varpi = 1-\cos\phi$, έχοντας ταχύτητα σταθερού μέτρου $|v| = 2$ (σε κατάλληλες μονάδες). Αν για $t = 0$ ξεκινά από την αρχή των αξόνων βρείτε τη σχέση μεταξύ ϕ και t. Σε πόσο χρόνο το σώμα θα ξαναγυρίσει στο σημείο εκκίνησης;

Δίνεται $1 - \cos\xi = 2\sin^2\frac{\xi}{2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Περίληψη
Στο κεφάλαιο αυτό περνάμε στην δυναμική υλικού σημείου, δηλ. θα περιγράψουμε το πως οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σημειακό σώμα καθορίζουν την κίνησή του. Στα πλαίσια της Νευτώνειας Μηχανικής αυτή η συσχέτιση δυνάμεων και κίνησης γίνεται μέσω των τριών νόμων του Νεύτωνα. Αφού αναφερθούν και σχολιαστούν οι νόμοι αυτοί, θα γίνει μια πρώτη εφαρμογή τους κυρίως σε προβλήματα κίνησης υπό την επίδραση αντίστασης εξαρτώμενης από την ταχύτητα.
Προαπαιτούμενη γνώση: Κινηματική υλικού σημείου.

3.1 Νόμοι του Νεύτωνα

1ος νόμος: Ένα σώμα παραμένει σε ηρεμία ή σε κίνηση με σταθερή ορμή $\boldsymbol{p}$ εκτός αν ασκείται πάνω του δύναμη.
2ος νόμος: Σώμα στο οποίο ασκείται δύναμη $\boldsymbol{F}$ κινείται με τρόπο ώστε ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του να ισούται με τη δύναμη, δηλ.

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}\,. \tag{3.1}$$

3ος νόμος: Αν δύο σημειακά σώματα ασκούν δύναμη το ένα στο άλλο, με διεύθυνση την ευθεία που τα ενώνει, οι δυνάμεις είναι αντίθετες, δηλ.

$$\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} = 0\,, \tag{3.2}$$

όπου $\boldsymbol{F}_{12}$ η δύναμη που ασκεί το 1 στο 2 και $\boldsymbol{F}_{21}$ η δύναμη που ασκεί το 2 στο 1.

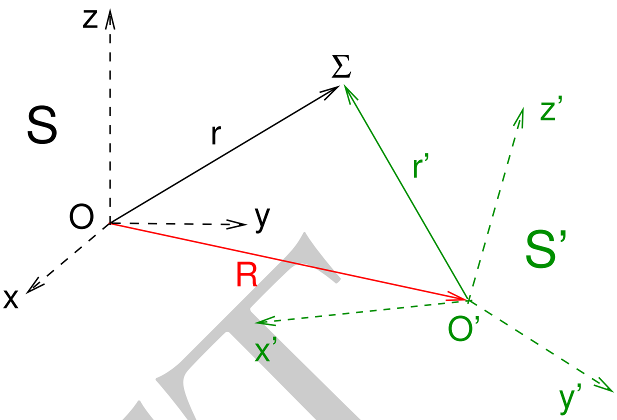
3.1.1 Σχόλια για τον 1ο νόμο Νεύτωνα

Θα μπορούσε κάποιος να σκεφτεί ότι ο 1ος νόμος προέρχεται από τον 2ο για την περίπτωση μηδενικής δύναμης, αλλά αυτό δεν είναι σωστό γιατί ο 1ος νόμος εισάγει σημαντικές έννοιες της δυναμικής.

Καταρχήν εισάγει την έννοια της δύναμης αφού περιγράφει τι συμβαίνει απουσία αυτής.

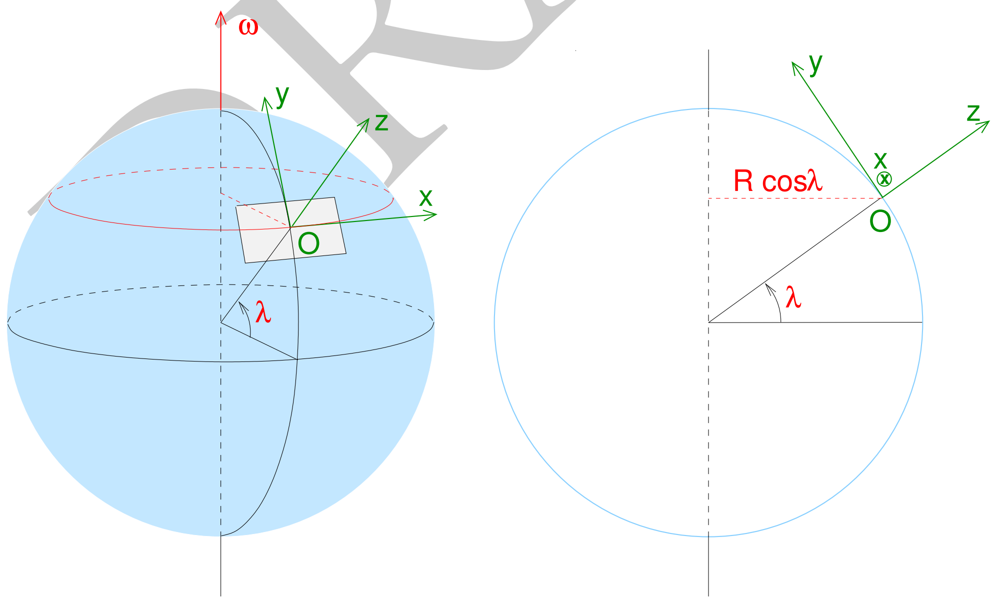
Ακόμα σημαντικότερο είναι ότι εισάγει την έννοια του ελεύθερου σώματος, δηλ. του σώματος στο οποίο δεν ασκείται δύναμη και το οποίο κινείται με σταθερή ορμή. Αυτή η έννοια μπορεί να μας φαίνεται προφανής με την εμπειρία που ήδη έχουμε σε προβλήματα Μηχανικής, αλλά δεν ήταν καθόλου εύκολο να συλληφθεί. Απόδειξη το ότι είχε διαφύγει από τον Αριστοτέλη, ο οποίος είχε διατυπώσει λανθασμένα ότι για να κινείται ένα σώμα με σταθερή ταχύτητα πρέπει να του ασκείται δύναμη.

Επίσης, μιας και η κίνηση είναι σχετική αφού την μετράει ένας εν γένει κινούμενος παρατηρητής, εισάγει την έννοια των συστημάτων αναφοράς και συγκεκριμένα των αδρανειακών συστημάτων αναφοράς τα οποία είναι αυτά στα οποία ισχύει αυτός ο νόμος. Αν σε ένα σύστημα αναφοράς S ισχύει ο 1ος νόμος, δηλ. ισοδύναμα αυτό είναι αδρανειακό, τότε κάθε άλλο σύστημα S' που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς το S είναι επίσης αδρανειακό. Αυτό γιατί αν $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{V}t$ είναι η θέση της αρχής του S' ως προς την αρχή του S το χρόνο t, με $\boldsymbol{R}_0$ και $\boldsymbol{V}$ σταθερά διανύσματα, για κάθε σώμα Σ με θέση $\boldsymbol{r}$ και ταχύτητα $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ ως προς το S η θέση και ταχύτητα ως προς το S' είναι αντίστοιχα $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}$ (σχήμα 3.1) και $\boldsymbol{v}' = \dot{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}$ (αυτός είναι ο γνωστός Γαλιλαϊκός μετασχηματισμός ταχυτήτων που δίνει ουσιαστικά τη σχετική ταχύτητα). Προφανώς αν $\boldsymbol{v} =$ σταθερά, τότε και $\boldsymbol{v}' =$ σταθερά, δηλ. αν ο 1ος νόμος Νεύτωνα ισχύει στο S θα ισχύει και στο S'.



Σχήμα 3.1: Θέσεις σώματος Σ ως προς τα συστήματα αναφοράς S και S'.

Μια επιπλέον προϋπόθεση για να είναι αδρανειακό ένα σύστημα αναφοράς είναι οι άξονές του να μένουν σταθεροί, δηλ. να μην περιστρέφονται (ένας περιστρεφόμενος παρατηρητής δεν θα βλέπει ένα ελεύθερο σώμα να κινείται με σταθερή ορμή).



Σχήμα 3.2: Σύστημα αναφοράς με αρχή τόπο Ο πάνω στη Γη, άξονες xy στον ορίζοντα του τόπου (εφαπτόμενο επίπεδο) και z κατακόρυφο προς τα πάνω.

Το να κρίνουμε αν ένα συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς είναι αδρανειακό ή όχι δεν είναι καθόλου τετριμμένο. Θεωρητικά μπορούμε να ελέγξουμε το αν αλλάζει η ορμή ενός ελεύθερου σώματος (αν δεν αλλάζει σημαίνει ότι το σύστημα ως προς το οποίο μετράμε αυτή την ορμή είναι αδρανειακό), αλλά δεν είναι εφικτό να ξέρουμε με άπειρη ακρίβεια αν σε ένα σώμα ασκείται μηδενική δύναμη. Από την άλλη, σε μια πειραματική επιστήμη όπως είναι η Φυσική, δεν έχει ουσιαστικό νόημα να αναζητούμε άπειρη ακρίβεια. Αρκεί να ελέγχουμε τους ισχυρισμούς μας με ακρίβεια που σχετίζεται με αυτή των μετρητικών συσκευών μέσω των οποίων συγκρίνουμε θεωρία και πείραμα. Για παράδειγμα, για τη μελέτη μιας πλάγιας βολής από τόπο O της επιφάνειας της Γης θα έχετε χρησιμοποιήσει το νόμο Νεύτωνα σε σύστημα με αρχή το O (το σχήμα 3.2 δείχνει μια επιλογή τέτοιου συστήματος), θεωρώντας ότι είναι αδρανειακό. Αυτό είναι βέβαια μόνο προσεγγιστικά σωστό, γιατί η Γη περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της και άρα αφενός οι άξονες του συστήματος περιστρέφονται, αφετέρου η αρχή O κινείται κυκλικά σε τροχιά ακτίνας $R_\oplus \cos\lambda$ όπου λ το γεωγραφικό πλάτος του τόπου, με γωνιακή ταχύτητα ω, άρα έχει επιτάχυνση $a_0 = \omega^2 R_\oplus \cos\lambda$. Αν αυτή είναι πολύ μικρότερη της επιτάχυνσης του σώματος (που για το συγκεκριμένο παράδειγμα είναι η επιτάχυνση βαρύτητας g) το σφάλμα είναι μικρό. Αντικαθιστώντας $\omega \approx \dfrac{2\pi}{1\text{ημέρα}} = 7.3\times10^{-5}$ rad/s, $R_\oplus = 6.4\times10^{6}$ m και $\lambda \approx 38^\circ$ για την Αθήνα προκύπτει $a_0 = 0.027$ m/s^2, δηλ. περίπου 3‰ του g.

Αν κάποιος λάμβανε υπόψη την περιστροφή της Γης π.χ. παίρνοντας αρχή του συστήματος το κέντρο της Γης K και μη-περιστρεφόμενους άξονες, θα βελτίωνε την ακρίβεια του αποτελέσματος, αλλά πάλι αυτό θα παρέμενε προσεγγιστικό γιατί θα αγνοούσε την περιφορά της Γης γύρω από τον Ήλιο. Λόγω αυτής το K έχει επιτάχυνση περίπου $\Omega^2\alpha = 6\times10^{-3}$ m/s^2, όπου $\Omega = \dfrac{2\pi}{1\text{ έτος}}$ η γωνιακή ταχύτητα περιφοράς της Γης γύρω από τον Ήλιο και α =1 AU (= μία αστρονομική μονάδα) $= 1.5\times10^{11}$ m η απόσταση Γης – Ηλίου. Ακόμα και αν διορθώσουμε το αποτέλεσμα ως προς αυτή την κίνηση θα έχουμε αγνοήσει την κίνηση του Ήλιου μέσα στο Γαλαξία, κ.ο.κ. Άπειρη ακρίβεια δεν θα μπορέσουμε να έχουμε, αλλά μπορούμε να ελαττώσουμε το σφάλμα ανάλογα με την ακρίβεια που θέλουμε το αποτέλεσμα, την ακρίβεια δηλ. που απαιτεί το πείραμα.

3.1.2 Σχόλια για τον 2ο νόμο Νεύτωνα

Ο νόμος αυτός καθορίζει το πως αλλάζει η ορμή κάποιου σημειακού σώματος με δεδομένη τη δύναμη που ασκείται σε αυτό (και δεν είναι ορισμός της δύναμης όπως λανθασμένα κάποιος μπορεί να υποθέσει γράφοντας την σχέση σαν $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$). Την δύναμη την γνωρίζουμε με βάση τις στοιχειώδεις αλληλεπιδράσεις της Φυσικής και την μοντελοποίηση που προκύπτει από αυτές σε μακροσκοπικά συστήματα (αυτό δεν είναι αντικείμενο της Μηχανικής, αλλά της Φυσικής γενικότερα). Παραδείγματα ακολουθούν: Οι ελαστικές δυνάμεις στα υλικά οφείλονται σε ηλεκτρικές αλληλεπιδράσεις σε μοριακή κλίμακα, αλλά η μακροσκοπική μοντελοποίηση της δύναμης που ασκεί ένα ιδανικό ελατήριο σε ένα σώμα είναι ο νόμος του Hooke (η δύναμη επαναφοράς είναι ανάλογη της μεταβολής του μήκους), τον οποίο στη Μηχανική θεωρούμε δεδομένο για ιδανικά ελατήρια και σκοπός μας είναι να μελετήσουμε την κίνηση του σώματος. Η τριβή ολίσθησης σώματος με επιφάνεια επίσης οφείλεται σε ηλεκτρικές αλληλεπιδράσεις σε μοριακή κλίμακα, αλλά η μοντελοποίησή της (ανάλογη της δύναμης που ασκείται μεταξύ σώματος και επιφάνειας) θεωρείται δεδομένη σε ένα πρόβλημα Μηχανικής. Αν σε σώμα ασκείται βάρος αυτό είναι γνωστό από το νόμο της παγκόσμιας έλξης. Γενικά αν το σώμα βρίσκεται σε πεδίο (π.χ. είναι φορτισμένο και βρίσκεται σε ηλεκτρικό ή και μαγνητικό πεδίο) η μορφή της δύναμης και τα χαρακτηριστικά του πεδίου θεωρούνται γνωστά.

Για σημειακά σώματα για τα οποία η ορμή είναι $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ όπου m η μάζα του σώματος, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι $d\boldsymbol{p}/dt = m d\boldsymbol{v}/dt = m\boldsymbol{a}$ διότι η μάζα m είναι σταθερά. Έτσι ο 2ος νόμος του Νεύτωνα γράφεται

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \tag{3.3}$$

και δίνει την επιτάχυνση που θα αποκτήσει ένα σώμα μάζας m αν του ασκηθεί δεδομένη δύναμη $\boldsymbol{F}$.

Παραγωγίζοντας την σχέση $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}$ που συνδέει τις ταχύτητες ενός σώματος στα δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς S και S', προκύπτει ότι $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}$ (αφού $\boldsymbol{V}$ είναι η σταθερή ταχύτητα του S' ως προς το S), δηλ. η μορφή του 2ου νόμου Νεύτωνα $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ μένει ίδια στα δύο συστήματα όπως αναμέναμε (γενικά οι φυσικοί νόμοι δεν πρέπει να αλλάζουν μορφή όταν τους εφαρμόζουμε σε διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς).

Ο 2ος νόμος Νεύτωνα στην μορφή της εξίσωσης 3.3 εισάγει τη μάζα αδράνειας m σαν συντελεστή αναλογίας μεταξύ δύναμης και επιτάχυνσης. Η m είναι μέτρο της αδράνειας του σώματος και συνδέει το αίτιο (δύναμη) με το αιτιατό (αλλαγή κίνησης που μετράται από το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας). Όσο μεγαλύτερη η μάζα τόσο λιγότερο θα αλλάξει η κίνηση του σώματος για δεδομένη δύναμη.

Η μάζα αδράνειας είναι ίση με τη μάζα βαρύτητας, δηλ. το συντελεστή αναλογίας μεταξύ δύναμης από πεδίο βαρύτητας (βάρους) και έντασης του πεδίου $\boldsymbol{g}$. Για κινήσεις σωμάτων υπό την επίδραση βάρους και αντιδράσεων ο νόμος Νεύτωνα γράφεται $m\boldsymbol{a} = m_\beta \boldsymbol{g} + \boldsymbol{N}$, όπου m η μάζα αδράνειας, m_β η μάζα βαρύτητας ($m_\beta \boldsymbol{g}$ είναι το βάρος) και $\boldsymbol{N}$ η αντίδραση. Η πειραματική διαπίστωση του ότι κινήσεις σωμάτων σε διάφορες περιπτώσεις, όπως σε πειράματα που έκαναν ο Γαλιλαίος και ο Νεύτωνας σε εκκρεμή ή σε κεκλιμένα επίπεδα, είναι ανεξάρτητες της μάζας των σωμάτων, οδηγεί στο ότι οι m και m_β είναι ίσες[1]. Στην απλούστερη περίπτωση κίνησης σώματος σε βαρυτικό πεδίο προκύπτει λοιπόν $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$, δηλ. η κίνηση δεν εξαρτάται από τη μάζα, αλλά και στα προαναφερθέντα παραδείγματα με αντιδράσεις η συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα στη διεύθυνση της αντίδρασης δίνει ότι η $\boldsymbol{N}$ είναι ανάλογη της μάζας, οπότε η κίνηση και σε αυτά διέπεται από την $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{N}/m$ και δεν εξαρτάται από τη μάζα.
Η ισότητα $m = m_\beta$ προκύπτει και από την θεμελίωση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας από τον Αϊνστάιν και συνδέεται με την αρχή της ισοδυναμίας που θα αναφερθεί στο κεφάλαιο 7.
Στα επόμενα δεν θα γίνεται διάκριση μεταξύ μάζας αδράνειας και μάζας βαρύτητας, θα αναφερόμαστε απλά στη μάζα m.

Στα πλαίσια της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας η ορμή ενός σώματος με μάζα m (η οποία είναι μια σταθερά που χαρακτηρίζει την ποσότητα ύλης στο σώμα όπως και στις μη-σχετικιστικές περιπτώσεις – λέγεται και μάζα ηρεμίας) είναι $\boldsymbol{p} = m\gamma \boldsymbol{v}$ όπου $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ ο παράγοντας Lorentz με c την ταχύτητα του φωτός. Στην περίπτωση αυτή ο 2ος νόμος του Νεύτωνα γράφεται

$$\frac{d(m\gamma \boldsymbol{v})}{dt} = \boldsymbol{F} . \tag{3.4}$$

Η σχετικιστική εξίσωση 3.4 αρκετές φορές στη βιβλιογραφία αναφέρεται – μάλλον αδόκιμα – σαν περίπτωση μεταβλητής μάζας, αντιστοιχώντας – λανθασμένα – στη μάζα το γινόμενο γm. Η μάζα κάθε σημειακού σώματος είναι σταθερή, ίση με m (και όπως προαναφέρθηκε χαρακτηρίζει την ποσότητα ύλης στο σώμα), απλά χρειάζεται προσοχή να μην χρησιμοποιούμε την μορφή 3.3 αλλά την γενικότερη έκφραση 3.1. Ίδια προσοχή χρειάζεται και σε συστήματα μεταβλητής μάζας για τα οποία θα μιλήσουμε ξεχωριστά στο κεφάλαιο 3.5.

Πρακτικά ο 2ος νόμος του Νεύτωνα είναι η βασικότερη σχέση της Μηχανικής την οποία πρέπει να επιλύσουμε για να βρούμε την κίνηση και την θέση σώματος σε κάθε χρόνο, σαν αποτέλεσμα της άσκησης δύναμης πάνω του. Είναι η σχέση που θα μας απασχολήσει κατά κόρον στα υπόλοιπα.

3.1.3 Σχόλια για τον 3ο νόμο Νεύτωνα

Πρόκειται για το νόμο δράσης–αντίδρασης και εκφράζει το γεγονός ότι για κάθε δύναμη (δράση) υπάρχει και η αντίθετη δύναμη (αντίδραση). Οι δυνάμεις που εμπλέκονται στο 3ο νόμο του Νεύτωνα ασκούνται βέβαια σε διαφορετικά σώματα, η κάθε μία υπάρχει στον 2ο νόμο Νεύτωνα για το κάθε σώμα ξεχωριστά, $m_1\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_1^{\varepsilon\xi}$, $m_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_2^{\varepsilon\xi}$ (οι τελευταίοι όροι των δεξιών μελών αντιστοιχούν στις εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα). Αν όμως αθροίσουμε τους νόμους αυτούς οι δύο εσωτερικές δυνάμεις αλληλοεξουδετερώνονται και στο δεξιό μέλος θα μείνουν μόνο οι εξωτερικές. Το ίδιο συμβαίνει και σε συστήματα περισσότερων σωμάτων, αφού οι εσωτερικές δυνάμεις ανά ζεύγη εξουδετερώνονται. Ο 3ος νόμος λοιπόν είναι σημαντικός για μελέτη συστημάτων σωμάτων και μας επιτρέπει να μελετούμε την κίνηση του κέντρου μάζας εκτεταμένων σωμάτων σαν κίνηση σημειακών μαζών. Για παράδειγμα, μελετώντας την πλάγια βολή ενός βλήματος (ή οποιουδήποτε στερεού σώματος) δεν χρειάζεται να σκεφτούμε καν ότι αποτελείται από ένα

[1] Γενικά ανάλογες, αλλά η απλούστερη επιλογή συντελεστή αναλογίας είναι η μονάδα – τυχόν άλλη επιλογή θα επηρέαζε μόνο την τιμή της σταθεράς της παγκόσμιας έλξης.

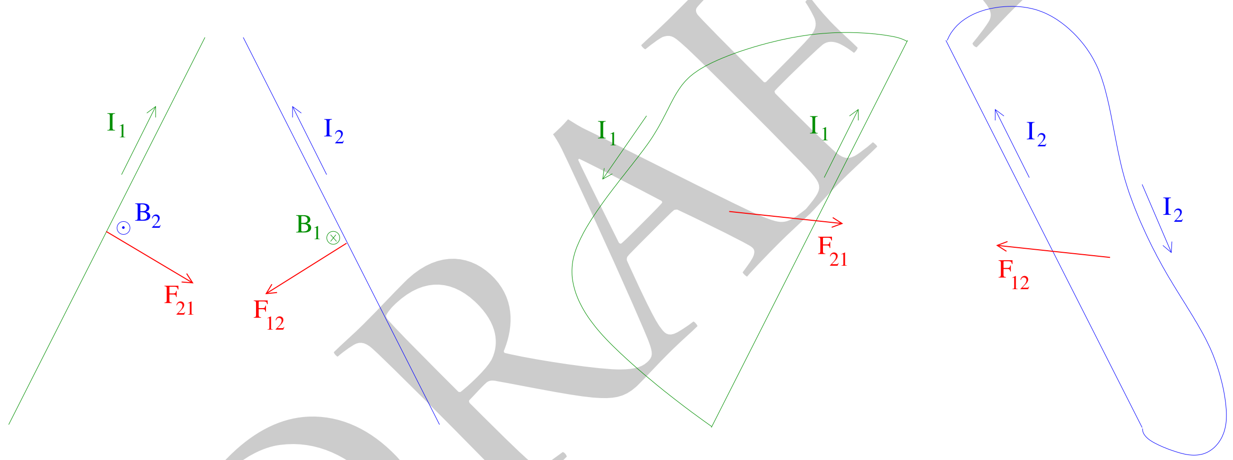
τεράστιο αριθμό αλληλεπιδρόντων μορίων. Για να μελετήσουμε την κίνηση του κέντρου μάζας του μπορούμε να το θεωρούμε σημειακό σώμα (με μάζα την συνολική του συστήματος).

Η συνολική εσωτερική δύναμη σε ένα σύστημα είναι μηδενική, κάτι που εκφράζει το γεγονός ότι το σύστημα δεν ασκεί δύναμη στον εαυτό του.

Σε περίπτωση που δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις σε ένα σύστημα, δηλ. το σύστημα είναι απομονωμένο, ο 3ος νόμος συνεπάγεται την διατήρηση της ολικής ορμής του συστήματος, αφού $\boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{12} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)}{dt} = 0$ (και παρόμοια για σύστημα περισσότερων σωμάτων).

Πρέπει να τονιστεί ότι ο 3ος νόμος του Νεύτωνα ισχύει μόνο για κεντρικές δυνάμεις, όταν δηλ. η δύναμη μεταξύ δύο σημειακών μαζών έχει διεύθυνση την ευθεία που τα ενώνει. Οι βαρυτικές και οι ηλεκτρικές είναι κεντρικές (αν αγνοήσουμε φαινόμενα σχετικότητας), άρα γι' αυτές ισχύει ο νόμος. Για μη-κεντρικές, όπως γενικά είναι οι μαγνητικές, ο νόμος δεν ισχύει. Η διατήρηση ορμής για την περίπτωση απομονωμένων συστημάτων όμως (η οποία προέκυψε από τον 3ο νόμο στις περιπτώσεις που αυτός ισχύει) είναι γενικότερη αρχή της Φυσικής και ισχύει πάντα, ακόμα και αν οι δυνάμεις δεν είναι κεντρικές.

Στο αριστερό μέρος του σχήματος 3.3 φαίνεται ένα παράδειγμα δύο ρευματοφόρων ευθύγραμμων αγωγών απείρου μήκους. Φαίνεται στο σχήμα το μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}_1$ που δημιουργεί ο πρώτος σε ένα σημείου του δεύτερου. Η σχέση $\boldsymbol{F}_{12} = I_2 \Delta \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{B}_1$ δίνει την φορά δύναμης που φαίνεται στο σχήμα. Οι $\boldsymbol{F}_{12}$ και $\boldsymbol{F}_{21}$ δεν είναι προφανώς συγγραμμικές, άρα το άθροισμά τους δεν είναι μηδενικό. Είναι λάθος όμως να συμπεράνουμε με



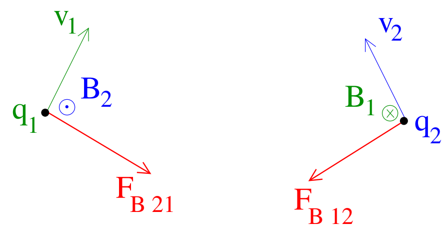
Σχήμα 3.3: Αριστερά οι δυνάμεις μεταξύ ευθύγραμμου αγωγών απείρου μήκους. Δεξιά οι δυνάμεις μεταξύ ολόκληρων των αγωγών.

βάση αυτό ότι δεν ισχύει ο 3ος νόμος για τις συνολικές δυνάμεις που ασκεί ο ένας αγωγός στον άλλο. Στον κάθε αγωγό το ρεύμα πρέπει κάπως να επιστρέφει, να ρέει δηλ. σε ένα κλειστό βρόχο. Αν λάβουμε υπόψη ότι έχουμε δύο κλειστούς βρόχους, όπως στο δεξιό μέρος του σχήματος 3.3, βρούμε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ο ένας βρόχος σε κάθε σημείο του δεύτερου (μέσω του νόμου Biot-Savart) και κατόπιν ολοκληρώνοντας βρούμε τη συνολική δύναμη $\boldsymbol{F}_{12}$ που ασκείται στο δεύτερο βρόχο, το αποτέλεσμα είναι αντίθετο από τη δύναμη $\boldsymbol{F}_{21}$ που βρίσκουμε ακολουθώντας την αντίθετη πορεία.[2] Για το σύστημα λοιπόν δύο βρόχων που διαρρέονται από

[2]Η απόδειξη ξεφεύγει από τα πλαίσια της Μηχανικής, αλλά παρατίθεται για τον αναγνώστη που ενδιαφέρεται: Ο πρώτος αγωγός δημιουργεί σε κάθε σημείο $\boldsymbol{r}_2$ του δεύτερου μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}_1 = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \oint \dfrac{I_1 d\boldsymbol{r}_1 \times (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^3}$. Άρα ασκεί δύναμη $d\boldsymbol{F}_{12} = I_2 d\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{B}_1$ στο μήκος $d\boldsymbol{r}_2$. Αντικαθιστώντας το πεδίο και ολοκληρώνοντας σε όλο το μήκος βρίσκουμε $\boldsymbol{F}_{12} = \dfrac{\mu_0 \mathrm{I}_1 \mathrm{I}_2}{4\pi} \oint \oint \dfrac{d\boldsymbol{r}_2 \times [d\boldsymbol{r}_1 \times (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)]}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^3}$. Η ολοκληρωτέα γράφεται $\left[\dfrac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^3} \cdot d\boldsymbol{r}_2\right] d\boldsymbol{r}_1 - \dfrac{(d\boldsymbol{r}_1 \cdot d\boldsymbol{r}_2)(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^3}$. Η αγκύλη του πρώτου όρου γράφεται $-\boldsymbol{\nabla}_2 \left(\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|}\right) \cdot d\boldsymbol{r}_2 = -d\left(\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|}\right)$ και το ολοκλήρωμά της στον κλειστό δεύτερο βρόχο είναι μηδενικό. Έτσι καταλήγουμε στη σχέση $\boldsymbol{F}_{12} = -\dfrac{\mu_0 \mathrm{I}_1 \mathrm{I}_2}{4\pi} \oint \oint \dfrac{(d\boldsymbol{r}_1 \cdot d\boldsymbol{r}_2)(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^3}$. Η ανταλλαγή δεικτών αλλάζει το πρόσημο, επομένως ισχύει $\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$.

στάσιμα ρεύματα ο 3ος νόμος ισχύει.

Στην περίπτωση δύο κινούμενων φορτίων, όπως στο σχήμα 3.4, πράγματι δεν ισχύει ο 3ος νόμος του Νεύτωνα. Οι ηλεκτρικές δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των φορτίων είναι κεντρικές και ικανοποιούν τον 3ο νόμο Νεύτωνα, αλλά οι μαγνητικές όχι. Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από το ένα φορτίο στη θέση του άλλου είναι όμοιο με την περίπτωση των αγωγών, επομένως και οι μαγνητικές δυνάμεις είναι όμοιες (φαίνονται στο σχήμα) και άρα μη-αντίθετες. Αυτό σημαίνει ότι η συνολική ορμή των δύο φορτίων δεν διατηρείται σταθερή αφού $\dfrac{d(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)}{dt} = \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{12} \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή όμως είναι λάθος να θεωρούμε απομονωμένο το σύστημα των δύο φορτίων. Ο λόγος είναι ότι τα φορτία δημιουργούν και ηλεκτρικό ($\boldsymbol{E}$) και μαγνητικό ($\boldsymbol{B}$) πεδίο. Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο έχει ορμή η πυκνότητα της οποίας δίνεται από $\varepsilon_0 \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$. Αν προσθέσουμε λοιπόν στο σύστημα των δύο φορτίων και το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, αποδεικνύεται ότι η συνολική ορμή του συστήματος διατηρείται.[3]



Σχήμα 3.4: Οι μαγνητικές δυνάμεις μεταξύ δύο κινούμενων φορτίων.

Να σημειωθεί ότι και στην περίπτωση των δύο ρευματοφόρων αγωγών υπάρχει πεδίο, αλλά μόνο μαγνητικό. Η απουσία του ηλεκτρικού πεδίου σημαίνει ότι δεν υπάρχει ορμή ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, το οποίο με τη σειρά του συμφωνεί με το να ισχύει ο 3ος νόμος Νεύτωνα για τους συνολικούς ρευματοφόρους βρόχους.

Οι δυνάμεις με τις οποίες συχνά ασχολούμαστε στη Μηχανική, όπως ελαστικές, τριβή, αντίσταση αέρα, κ.ο.κ., οφείλονται σε ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις σε μικροσκοπική κλίμακα. Το μαγνητικό πεδίο όμως έχει δευτερεύοντα ρόλο, κατά συνέπεια αυτές οι δυνάμεις είναι σε καλή προσέγγιση κεντρικές και θα θεωρούμε ότι ικανοποιούν το νόμο δράσης–αντίδρασης.

3.2 Κίνηση υπό επίδραση αντίστασης

Σαν πρώτα παραδείγματα εφαρμογής της δυναμικής, του πως δηλ. ο 2ος νόμος του Νεύτωνα καθορίζει την κίνηση αν γνωρίζουμε τη δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα, θα μελετήσουμε περιπτώσεις στις οποίες υπάρχει και αντίσταση. Όπως συζητήθηκε στο κεφάλαιο 1.3 η αντίσταση είναι πάντα αντίθετη της σχετικής ταχύτητας $v_{\sigma\chi}$ του σώματος ως προς το μέσο στο οποίο κινείται, ενώ το μέτρο της είναι συνήθως ανάλογο της $v_{\sigma\chi}$ (σε ρευστά όπου το ιξώδες έχει σημαντικό ρόλο) ή του τετραγώνου της (αυτό μοντελοποιεί ικανοποιητικά την αντίσταση αέρα). Τι ισχύει κάθε φορά είναι δεδομένο βέβαια σε ένα πρόβλημα Μηχανικής, το ζητούμενο είναι να βρεθεί η κίνηση.

Παράδειγμα 3.1:
Σώμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα v_a. Το σώμα κινείται υπό την επίδραση του (σταθερού) βάρους του mg και αντίστασης από τον αέρα, η οποία έχει μέτρο ανάλογο του τετραγώνου της ταχύτητας, $F_a = \lambda v^2$ (με σταθερό λ).

[3] Η απόδειξη ξεφεύγει από τα πλαίσια της Μηχανικής, αλλά παρατίθεται για τον αναγνώστη που ενδιαφέρεται: Από τις εξισώσεις του Maxwell μπορεί να αποδειχθεί η σχέση $\dfrac{d}{dt}\iiint(\varepsilon_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})d\tau + \oiint\left[\dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2}d\boldsymbol{a} + \dfrac{B^2}{2\mu_0}d\boldsymbol{a} - \varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{a}) - \dfrac{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{a})}{\mu_0}\right] = -\iiint(\rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})d\tau$, όπου ρ η πυκνότητα φορτίου και $\boldsymbol{J} = \rho\boldsymbol{v}$ η πυκνότητα ρεύματος. Εφαρμόζοντας τη σχέση αυτή σε όλο το χώρο, το αριστερό μέλος είναι ο ρυθμός μεταβολής της ολικής ορμής του πεδίου $\dfrac{d\boldsymbol{p}_{\pi\varepsilon\delta\acute{\iota}o}}{dt}$, το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα μηδενίζεται (γιατί η ολοκληρωτέα φθίνει γρήγορα καθώς πλησιάζουμε το άπειρο), ενώ στην περίπτωσή μας όπου $\rho = q_1\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1) + q_2\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)$ το δεξιό μέλος είναι το αντίθετο της δύναμης που ασκείται από το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στα φορτία $-(\boldsymbol{F}_{21}+\boldsymbol{F}_{12}) = -\dfrac{d(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)}{dt}$. Επομένως η σχέση δίνει την διατήρηση της ολικής ορμής $\dfrac{d(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_{\pi\varepsilon\delta\acute{\iota}o})}{dt} = 0$.

(α) Μελετήστε την άνοδο του σώματος και συγκεκριμένα:
(α_1) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση σε κάθε χρόνο.
(α_2) Βρείτε τη σχέση ταχύτητας–θέσης κατευθείαν από το νόμο του Νεύτωνα.
(β) Μελετήστε την κάθοδο του σώματος και συγκεκριμένα:
(β_1) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση σε κάθε χρόνο.
(β_2) Βρείτε τη σχέση ταχύτητας–θέσης κατευθείαν από το νόμο του Νεύτωνα και δείξτε ότι η ταχύτητα v_τ του σώματος όταν ξαναπεράσει από το σημείο εκκίνησης ικανοποιεί την $\dfrac{1}{v_\tau^2} = \dfrac{1}{U^2} + \dfrac{1}{v_a^2}$, όπου $U = \sqrt{\dfrac{mg}{\lambda}}$.
(β_3) Αν το σώμα συνεχίσει να κινείται σε μικρότερα z, ποια είναι η οριακή ταχύτητα που αποκτά; Σε πόσο χρόνο και σε ποια θέση την αποκτά;
(γ) Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των $v = v(t)$, $z = z(t)$, $v = v(z)$ για όλη την κίνηση.
Λύση:
Σε κατακόρυφο άξονα z με φορά προς τα πάνω και αρχή στο σημείο εκκίνησης το σώμα έχει θέση $\boldsymbol{r} = z\hat{z}$, ταχύτητα $\boldsymbol{v} = v\hat{z}$ με $v = \dot{z}$ (αυτή είναι η αλγεβρική τιμή και όχι το μέτρο) και επιτάχυνση $\boldsymbol{a} = \dot{v}\hat{z}$. Το βάρος είναι $-mg\hat{z}$ ενώ η αντίσταση είναι αντίρροπη της ταχύτητας και άρα γράφεται διανυσματικά $\boldsymbol{F}_a = -\lambda v^2 \dfrac{\boldsymbol{v}}{|v|} = -\lambda|v|v\hat{z}$. Ο νόμος Νεύτωνα $m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} - mkv^2\dfrac{\boldsymbol{v}}{|v|}$ δίνει την εξίσωση κίνησης $m\dot{v} = -mg - \lambda|v|v$. Λόγω του απόλυτου η άνοδος και η κάθοδος πρέπει να μελετηθούν ξεχωριστά.
(α_1) Κατά την άνοδο $v = \dot{z} > 0$ και άρα η εξίσωση κίνησης είναι $m\dot{v} = -mg - \lambda v^2$, διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών που δίνει $\displaystyle\int_{v_a}^{v} \frac{m\,dv}{mg + \lambda v^2} = -\int_0^t dt \Leftrightarrow \int_{v_a}^{v} \frac{dv/U}{1 + (v/U)^2} = -\int_0^t \frac{g}{U}dt$ όπου $U = \sqrt{\dfrac{mg}{\lambda}}$. Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \arctan\xi +$ σταθερά βρίσκουμε $\arctan\dfrac{v}{U} - \arctan\dfrac{v_a}{U} = -\dfrac{gt}{U} \Leftrightarrow v = U\tan(C - gt/U)$, όπου $C = \arctan\dfrac{v_a}{U}$ σταθερά με $0 < C < \pi/2$.
Η ταχύτητα μηδενίζεται όταν $t = t_\mu = CU/g$, χρόνος που αντιστοιχεί στην ανώτερη θέση.
Η σχέση θέσης–χρόνου θα βρεθεί ολοκληρώνοντας την $\dot{z} = v \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^z dz = \int_0^t U\tan(C - gt/U)dt \Leftrightarrow z = \int_0^t U\frac{\sin(C - gt/U)}{\cos(C - gt/U)}dt$. Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται γράφοντας τον αριθμητή της ολοκληρωτέας σαν παράγωγο του παρονομαστή και τελικά $z = \dfrac{U^2}{g}\ln\left[\dfrac{\cos(C - gt/U)}{\cos C}\right]$. (Η ποσότητα μέσα στο λογάριθμο είναι θετική γιατί κατά την άνοδο ισχύει $0 < t < CU/g \Leftrightarrow 0 < C - gt/U < C$ και η σταθερά είναι $0 < C < \pi/2$.)
Η ανώτερη θέση βρίσκεται για $t = t_\mu = CU/g$ να είναι $z_\mu = \dfrac{U^2}{g}\ln\left(\dfrac{1}{\cos C}\right)$.
Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες τα αποτελέσματα γράφονται σαν $v = U\tan(C - gt/U) = U\dfrac{\tan C - \tan(gt/U)}{1 + \tan C\,\tan(gt/U)} = \dfrac{v_a - U\tan(gt/U)}{1 + (v_a/U)\tan(gt/U)}$, $z = \dfrac{U^2}{g}\ln\left[\cos(gt/U) + (v_a/U)\sin(gt/U)\right]$ και το μέγιστο ύψος σαν $z_\mu = \dfrac{U^2}{g}\ln\sqrt{1 + \tan^2 C} = \dfrac{U^2}{2g}\ln(1 + v_a^2/U^2)$.
(α_2) Η σχέση ταχύτητας–θέσης μπορεί βέβαια να βρεθεί απαλείφοντας το χρόνο μεταξύ των σχέσεων $v = v(t)$ και $z = z(t)$. Είναι όμως αμεσότερο (και ευκολότερο σε περιπτώσεις που δεν ζητούνται οι σχέσεις $v = v(t)$ και $z = z(t)$) να βρεθεί κατευθείαν από το νόμο του Νεύτωνα, «απαλείφοντας το χρόνο» μέσω της $\dot{v} = \dfrac{dv}{dz}\dfrac{dz}{dt} = v\dfrac{dv}{dz}$. Έτσι βρίσκουμε $mv\dfrac{dv}{dz} = -mg - \lambda v^2$, διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών που δίνει $\displaystyle\int_{v_a}^{v} \frac{mv\,dv}{mg + \lambda v^2} = -\int_0^z dz$. Το ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους υπολογίζεται γράφοντας τον αριθμητή της ολοκληρωτέας σαν παράγωγο του παρονομαστή και βρίσκουμε $\ln\dfrac{1 + v^2/U^2}{1 + v_a^2/U^2} = -2\lambda z/m \Leftrightarrow v = \sqrt{(U^2 + v_a^2)e^{-2\lambda z/m} - U^2}$.

Συνοψίζοντας, κατά την άνοδο ισχύουν:
$v = U\tan\left(C - \dfrac{gt}{U}\right)$ για $0 \le t \le t_\mu$, όπου $U = \sqrt{\dfrac{mg}{\lambda}}$, $C = \arctan\dfrac{v_a}{U}$, $t_\mu = \dfrac{CU}{g}$,
$z = \dfrac{U^2}{g}\ln\left[\dfrac{\cos(C - gt/U)}{\cos C}\right]$, $v = \sqrt{(U^2 + v_a^2)e^{-2\lambda z/m} - U^2}$.
(β_1) Κατά την κάθοδο ισχύει $v = \dot z < 0$ και άρα η εξίσωση κίνησης είναι $\dot v = -g + kv^2$ (η αντίσταση έχει φορά προς τα πάνω), διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών που δίνει $\displaystyle\int_0^v \frac{m\,dv}{-mg + \lambda v^2} = \int_{t_\mu}^t dt$. Είναι βολικότερο να ορίσουμε $t' = t - t_\mu$ (ο χρόνος t' αρχίζει να μετρά από την στιγμή που το σώμα βρίσκεται στην ανώτερη θέση), οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται $\displaystyle -\int_0^v \frac{dv/U}{1 - v^2/U^2} = gt'/U$. Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται μέσω της $\displaystyle -\int \frac{d\xi}{1-\xi^2} = -\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\xi} + \frac{1}{1-\xi}\right)d\xi = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\xi}{1+\xi}\right| +$ σταθερά, οπότε η λύση είναι $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1 - v/U}{1 + v/U}\right| = \dfrac{gt'}{U}$. Η ποσότητα μέσα στο απόλυτο είναι αρχικά θετική και παραμένει θετική όσο η ταχύτητα v είναι κατά μέτρο μικρότερη της U (είναι $v < 0$). Όταν η v πλησιάζει την οριακή ταχύτητα $-U$, η οποία αντιστοιχεί σε μηδενική συνισταμένη δυνάμεων, ο λογάριθμος απειρίζεται, άρα και το δεξιό μέλος της ισότητας, δηλ. ο χρόνος. Επομένως ισχύει πάντα $|v| < U$ και η λύση είναι $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1 - v/U}{1 + v/U} = \dfrac{gt'}{U} \Leftrightarrow \dfrac{1 - v/U}{1 + v/U} = e^{2gt'/U} \Leftrightarrow v = -U\tanh\left(\dfrac{gt'}{U}\right) = -U\dfrac{1 - e^{-2gt'/U}}{1 + e^{-2gt'/U}}$.

Η σχέση θέσης–χρόνου θα βρεθεί ολοκληρώνοντας την $\dot z = v \Leftrightarrow \displaystyle\int_{z_\mu}^z dz = -U\int_0^{t'}\tanh\left(\frac{gt'}{U}\right)dt' \Leftrightarrow z = z_\mu - U\int_0^{t'}\frac{\sinh(gt'/U)}{\cosh(gt'/U)}dt'$. Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται γράφοντας τον αριθμητή της ολοκληρωτέας σαν παράγωγο του παρονομαστή και τελικά $z = z_\mu - \dfrac{U^2}{g}\ln\left[\cosh(gt'/U)\right]$.
(β_2) Όπως πριν η σχέση ταχύτητας–θέσης μπορεί να βρεθεί κατευθείαν από το νόμο του Νεύτωνα, «απαλείφοντας το χρόνο» μέσω της $\dot v = \dfrac{dv}{dz}\dfrac{dz}{dt} = v\dfrac{dv}{dz}$. Έτσι βρίσκουμε $mv\dfrac{dv}{dz} = -mg + \lambda v^2 \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^v \frac{mv\,dv}{-mg + \lambda v^2} = \int_{z_\mu}^z dz$. Το ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους υπολογίζεται γράφοντας τον αριθμητή της ολοκληρωτέας σαν παράγωγο του παρονομαστή και βρίσκουμε $\ln|1 - v^2/U^2| = 2\lambda(z - z_\mu)/m$. Το απόλυτο φεύγει διότι η ταχύτητα κατά μέτρο είναι συνεχώς μικρότερη της οριακής, $|v| < U$. Λύνοντας ως προς v και επιλέγοντας την αρνητική λύση (αφού κατά την κάθοδο $v < 0$) βρίσκουμε $v = -U\sqrt{1 - e^{2\lambda(z - z_\mu)/m}}$.
Το ίδιο προκύπτει από τις σχέσεις $v = v(t)$, $z = z(t)$, απαλείφοντας το χρόνο και με χρήση της ταυτότητας $\cosh\xi = \sqrt{\dfrac{\cosh^2\xi}{\cosh^2\xi - \sinh^2\xi}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2\xi}}$.

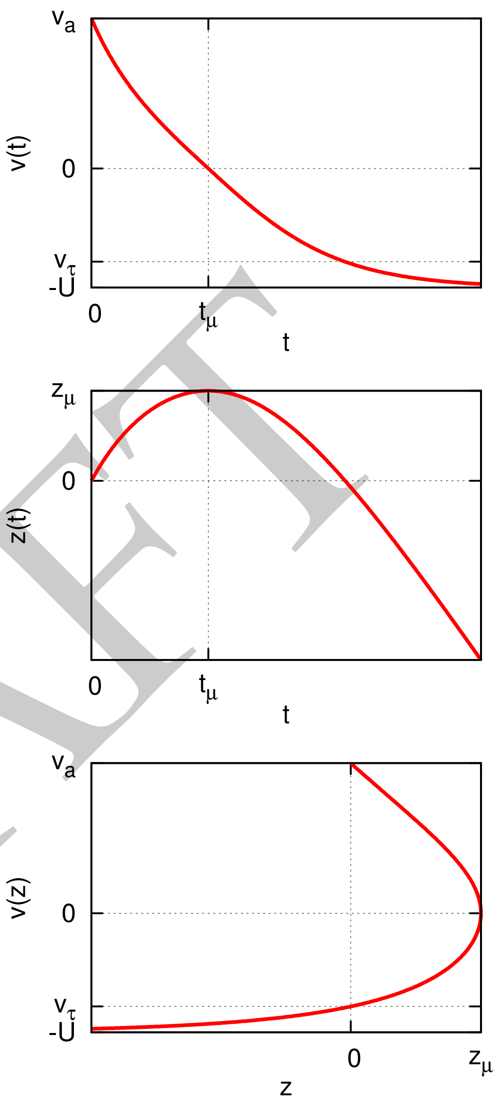
Αντικαθιστώντας $z_\mu = \dfrac{m}{2\lambda}\ln(1 + v_a^2/U^2)$ η σχέση μεταξύ ταχύτητας και θέσης γράφεται $v = -U\sqrt{1 - \dfrac{e^{2\lambda z/m}}{1 + v_a^2/U^2}}$.
Όταν το σώμα κατεβαίνοντας επιστρέψει στη θέση $z = 0$ έχει ταχύτητα $v_\tau = -U\sqrt{1 - \dfrac{1}{1 + v_a^2/U^2}}$. Η σχέση αυτή είναι ισοδύναμη με την ζητούμενη $\dfrac{1}{v_\tau^2} = \dfrac{1}{U^2} + \dfrac{1}{v_a^2}$.
Συνοψίζοντας, κατά την κάθοδο ισχύουν:
$v = -U\dfrac{1 - e^{-2gt'/U}}{1 + e^{-2gt'/U}}$ για $t' \ge 0$, όπου $t' = t - t_\mu$,
$z = z_\mu - \dfrac{U^2}{g}\ln\left[\cosh(gt'/U)\right]$, όπου $z_\mu = \dfrac{U^2}{g}\ln\left(\dfrac{1}{\cos C}\right)$, $v = -U\sqrt{1 - e^{2\lambda(z - z_\mu)/m}}$.

(β_3) Αν το σώμα συνεχίζει να κινείται σε αρνητικά z η ταχύτητα πλησιάζει εκθετικά την οριακή τιμή $-U$, η οποία όπως ήδη έχουμε πει αντιστοιχεί σε μηδενική συνισταμένη δυνάμεων. Η σχέση $v = v(t)$ δείχνει ότι θεωρητικά αυτό γίνεται μετά από άπειρο χρόνο, αλλά πρακτικά συμβαίνει σε $t' \sim 2.5U/g$. Όμοια, η σχέση $v = v(z)$ δείχνει ότι θεωρητικά αυτό γίνεται για $z \to -\infty$, αλλά πρακτικά συμβαίνει σε $z \sim z_\mu - 2.5m/\lambda$.

(γ) Οι γραφικές παραστάσεις μπορούν να σχεδιαστούν μέσω των εκφράσεων που βρήκαμε, αλλά και ποιοτικά σύμφωνα με τις ακόλουθες σκέψεις: Για την $v = v(t)$ το γράφημα ξεκινά από $v = v_a$ για $t = 0$, με αρνητική κλίση $-(mg + \lambda v_a^2)/m$. Καθώς ο χρόνος αυξάνει η ταχύτητα μειώνεται και η κλίση γίνεται όλο και μικρότερη κατ' απόλυτη τιμή ($\dot{v} = -(mg + \lambda v^2)/m$). Το χρόνο t_μ η ταχύτητα μηδενίζεται (ανώτερο ύψος) και η κλίση είναι $-g$. Στη συνέχεια η ταχύτητα γίνεται αρνητική (κάθοδος) και η κλίση συνεχίζει να είναι αρνητική, ίση με $-(mg - \lambda v^2)/m$. Η ταχύτητα πλησιάζει την οριακή τιμή $-U$ (δηλ. $\lim_{t\to\infty} v(t) = -U$) και η κλίση μηδενίζεται.

Το γράφημα $z = z(t)$ είναι τέτοιο ώστε σε κάθε χρόνο η κλίση του να είναι ίση με την ταχύτητα. Ξεκινά από $z = 0$ για $t = 0$ (με θετική κλίση v_a), αυξάνεται μέχρι την τιμή z_μ στο χρόνο t_μ και μετά αρχίζει να μειώνεται. Φτάνει στο $z = 0$ μετά από χρόνο μεγαλύτερο του $2t_\mu$ (κατά την κάθοδο όταν το σώμα περνά από κάποιο συγκεκριμένο z έχει μικρότερο μέτρο ταχύτητας απ' ότι είχε όταν περνούσε από το ίδιο z κατά την άνοδο, γιατί το έργο της αντίστασης είναι αρνητικό, άρα ο χρόνος καθόδου από το $z = z_\mu$ μέχρι το $z = 0$ είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο χρόνο ανόδου t_μ) και συνεχίζει σε αρνητικά z. Ασυμπτωτικά η κλίση παίρνει σταθερή τιμή, ίση με την οριακή ταχύτητα.

Το γράφημα $v = v(z)$ είναι δίτιμη συνάρτηση για $z > 0$, με την αρνητική τιμή που αντιστοιχεί στην κάθοδο να είναι μικρότερη κατ' απόλυτη τιμή από την αντίστοιχη θετική τιμή στο ίδιο z (που αντιστοιχεί στην άνοδο). Η οριακή τιμή αντιστοιχεί σε $\lim_{z\to-\infty} v(z) = -U$.



Παράδειγμα 3.2:

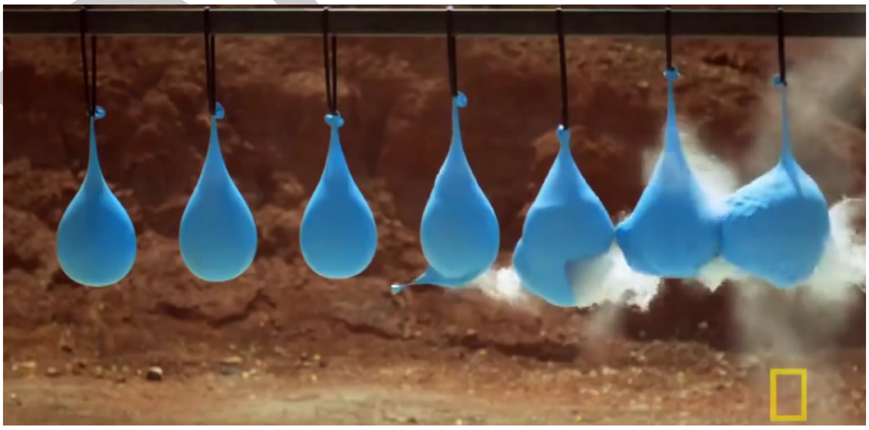
Η αντίσταση από ένα ρευστό σε μια κινούμενη σφαίρα είναι $\frac{1}{2}C_D \rho S v^2$, όπου ρ η πυκνότητα του ρευστού, v η ταχύτητα της σφαίρας, $S = \pi\left(\frac{L}{2}\right)^2$ η επιφάνειά της με L τη διάμετρό της. Ο συντελεστής $C_D = 0.4 + \frac{24}{Re}$ είναι συνάρτηση του αριθμού Reynolds $Re = \frac{\rho L v}{\eta}$, όπου η το ιξώδες του ρευστού. Έτσι η αντίσταση προκύπτει ανάλογη της ταχύτητας $F = 3\pi\eta L v$ για μικρούς αριθμούς Reynolds και ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας $F = 0.05\pi\rho L^2 v^2$ για μεγάλους αριθμούς Reynolds.

Θέλουμε να βρούμε σε πόση απόσταση σταματά μια σφαίρα από πιστόλι μέσα στο νερό, για το οποίο $\rho = 10^3$ kg/m^3 και $\eta = 10^{-3}$ N s/m^2. Η σφαίρα έχει μάζα $m = 15.6$ g, διάμετρο $L = 10.9$ mm και αρχική ταχύτητα $v_0 = 436$ m/s.

(α) Βρείτε τον αριθμό Reynolds και επιλέξτε την κατάλληλη μορφή δύναμης αντίστασης μεταξύ των $F = 3\pi\eta L v$ και $F = 0.05\pi\rho L^2 v^2$.

(β) Βρείτε την ταχύτητα συναρτήσει της απόστασης από την αρχική θέση θεωρώντας αμελητέο το βάρος.
(γ) Σε πόση απόσταση η ταχύτητα υποδιπλασιάζεται;
(δ) Πόσος χρόνος έχει περάσει μέχρι να υποδιπλασιαστεί η ταχύτητα;
(ε) Θα περάσει η σφαίρα τα γεμάτα με νερό μπαλόνια;
(`https://www.youtube.com/watch?v=sqF7abOYCNY`)

Λύση:
(α) Αρχικά $Re = \dfrac{\rho L v_0}{\eta} = 4\times 10^6 \gg 1$ και παραμένει $\gg 1$ πρακτικά σε όλη την κίνηση. Άρα $C_D = 0.4$ και $F = 0.05\pi\rho L^2 v^2$.
(β) $m\dot{v} = -0.05\pi\rho L^2 v^2$. Με $\dot{v} = v\dfrac{dv}{dx}$ έχουμε $\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{0.05\pi\rho L^2}{m}v$, ή αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές στο σύστημα SI, $\dfrac{dv}{dx} = -1.196v \Leftrightarrow \displaystyle\int_{436}^{v}\frac{dv}{v} = -1.196\int_0^x dx \Leftrightarrow v = 436\,e^{-1.196x}$ (SI).
(γ) $v = \dfrac{v_0}{2} \Leftrightarrow e^{1.196x} = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 2}{1.196} = 0.58\,\text{m}$.
(δ) $t = \displaystyle\int_0^x \frac{dx}{v} = \int_0^{0.58}\frac{1}{436}e^{1.196x}dx = \frac{1}{436\times 1.196}\left(e^{1.196\times 0.58}-1\right) = 1.9\times 10^{-3}$ SI, δηλ. 1.9 χιλιοστά του δευτερολέπτου.
Θα μπορούσαμε να βρούμε την $v(t)$ κατευθείαν από το νόμο Νεύτωνα $m\dot{v} = -0.05\pi\rho L^2 v^2 \Leftrightarrow \dfrac{dv}{v^2} = -1.196\,dt$ και ολοκληρώνοντας $-\dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{436} = -1.196t$. Θέτοντας $v = 436/2$ βρίσκουμε το χρόνο υποδιπλασιασμού $t = \dfrac{1}{436\times 1.196} = 1.9\times 10^{-3}$ s.
(ε)



Παράδειγμα 3.3:
Έστω πλάγια βολή σώματος μάζας m μέσα σε υγρό υπό την επίδραση γραμμικής αντίστασης μέτρου $mkv_{\sigma\chi}$. Θεωρήστε την συνισταμένη βάρους και άνωσης ίση με $\boldsymbol{mg} = -mg\hat{z}$ και ότι το υγρό κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{u} = u\hat{x}$.
(α) Βρείτε τη γενική λύση για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες. Πως καταλήγει να κινείται το σώμα;
(β) Αν το υγρό είναι ακίνητο ($u = 0$) βρείτε την εξίσωση τροχιάς και την εξίσωση που δίνει το βεληνεκές (δηλ. την οριζόντια απόσταση που διανύει το σώμα μέχρι να περάσει από το οριζόντιο επίπεδο από το οποίο

ξεκίνησε).
(γ) Βρείτε το βεληνεκές στην περίπτωση ακίνητου υγρού ($u = 0$) που προβάλει «μικρή» αντίσταση.
Λύση:
(α) Το σύστημα αναφοράς δίνεται ουσιαστικά από την εκφώνηση (ο κατακόρυφος άξονας z έχει φορά αντίθετη της συνισταμένης βάρους–άνωσης και ο ένας οριζόντιος άξονας x έχει τη διεύθυνση της ταχύτητας του υγρού). Επιλέγουμε για απλούστευση αρχή αξόνων στην αρχική θέση. Η αντίσταση σαν διάνυσμα είναι αντίθετη της σχετικής ταχύτητας του σώματος ως προς το υγρό $\boldsymbol{v}_{\sigma\chi} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$, άρα γράφεται $\boldsymbol{F}_a = -mk|\boldsymbol{v}_{\sigma\chi}|\dfrac{\boldsymbol{v}_{\sigma\chi}}{|\boldsymbol{v}_{\sigma\chi}|} = -mk(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})$. Ο νόμος Νεύτωνα $m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} - mk(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})$ έχει συνιστώσες $\ddot{x} + k\dot{x} = ku$, $\ddot{y} + k\dot{y} = 0$, $\ddot{z} + k\dot{z} = -g$ στους τρεις άξονες.

Ας ξεκινήσουμε με την εξίσωση στον z άξονα $\ddot{z} + k\dot{z} = -g$. Παρατηρούμε ότι λόγω της γραμμικότητας της αντίστασης εδώ δεν υπάρχει κάποιο απόλυτο, όπως υπήρχε στο παράδειγμα 3.1, άρα η μελέτη γίνεται ενιαία, χωρίς να πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις φοράς κίνησης. Επίσης η εξισώση κίνησης είναι απλούστερη – γραμμική, μη-ομογενής – και δίνει άμεσα τη θέση συναρτήσει του χρόνου (θα μπορούσαμε βέβαια να βρούμε πρώτα την ταχύτητα όπως κάναμε στο παράδειγμα 3.1, είτε θεωρώντας την διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, ή σαν γραμμική μη-ομογενή ως προς την ταχύτητα).

Η λύση μιας γραμμικής, μη-ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι το άθροισμα της λύσης της ομογενούς $z_{\text{ομ}}$ με μία μερική λύση $z_{\text{μερ}}$. Η λύση της ομογενούς έχει εκθετική μορφή $e^{\lambda t}$ με την αντικατάσταση να δίνει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\lambda^2 + k\lambda = 0$ με λύσεις $\lambda = 0$ και $\lambda = -k$, οπότε η γενική λύση της ομογενούς είναι $z_{\text{ομ}} = C_1 + C_2 e^{-kt}$. Μια μερική λύση είναι ανάλογη του χρόνου $z_{\text{μερ}} = At$ με την αντικατάσταση να δίνει $A = -g/k$. Άρα η γενική λύση για τη θέση στον z άξονα είναι $z = C_1 + C_2 e^{-kt} - \dfrac{g}{k}t$ και η αντίστοιχη ταχύτητα $v_z = \dot{z} = -kC_2 e^{-kt} - \dfrac{g}{k}$. Οι αρχικές συνθήκες $z|_{t=0} = 0$, $v_z|_{t=0} = v_{0z}$ δίνουν $C_1 = \dfrac{v_{0z}k + g}{k^2}$, $C_2 = -C_1$, οπότε $z(t) = \dfrac{v_{0z}k + g}{k^2}\left(1 - e^{-kt}\right) - \dfrac{g}{k}t$.

Στους άλλους άξονες οι εξισώσεις είναι μαθηματικά ίδιες με αυτήν που επιλύσαμε. Για να πάρουμε τη λύση στον x δεν έχουμε παρά να αντικαταστήσουμε $z \to x$, $g \to -ku$, $v_{0z} \to v_{0x}$ και για τη λύση στον y όμοια $z \to y$, $g \to 0$, $v_{0z} \to v_{0y}$.

Έτσι βρίσκουμε $\left\{\begin{aligned} x &= \frac{v_{0x} - u}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) + ut\,, \\ y &= \frac{v_{0y}}{k}\left(1 - e^{-kt}\right), \\ z &= \frac{v_{0z}k + g}{k^2}\left(1 - e^{-kt}\right) - \frac{g}{k}t\,. \end{aligned}\right\}$

Το σώμα σε μεγάλους χρόνους (πρακτικά σε $t \gtrsim 5/k$), ανεξαρτήτως των αρχικών συνθηκών καταλήγει να κινείται με την οριακή ταχύτητα $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{g}/k = u\hat{x} - (g/k)\hat{z}$ που αντιστοιχεί σε μηδενική επιτάχυνση σε κάθε κατεύθυνση (στην $\hat{x}$ και στην $\hat{y}$ αποκτά την ταχύτητα του υγρού, ενώ στην $\hat{z}$ κινείται με ταχύτητα για την οποία το βάρος εξουδετερώνεται από την αντίσταση).

Θα μπορούσαμε να βρούμε τη λύση διανυσματικά: Η εξίσωση κίνησης $m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} - mk(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})$ γράφεται $\ddot{\boldsymbol{r}} + k\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{g} + k\boldsymbol{u}$. Η λύση της ομογενούς είναι $\boldsymbol{r}_{\text{ομ}} = \boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_2 e^{-kt}$ ενώ μια μερική λύση είναι $\boldsymbol{r}_{\text{μερ}} = \dfrac{\boldsymbol{g} + k\boldsymbol{u}}{k}t$, άρα η γενική λύση είναι $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_2 e^{-kt} + \dfrac{\boldsymbol{g} + k\boldsymbol{u}}{k}t$. Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε τα σταθερά διανύσματα $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_2$ και τελικά προκύπτει $\boldsymbol{r} = \dfrac{k(\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{g}}{k^2}\left(1 - e^{-kt}\right) + \dfrac{\boldsymbol{g} + k\boldsymbol{u}}{k}t$.

(β) Αν το υγρό είναι ακίνητο, χωρίς βλάβη της γενικότητας η κίνηση γίνεται στο επίπεδο xz (για οποιαδήποτε αρχική ταχύτητα μπορούμε να επιλέξουμε τον άξονα x στη διεύθυνση της οριζόντιας συνιστώσας), άρα ισχύουν $x = \dfrac{v_{0x}}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$ και $z = \dfrac{v_{0z}k + g}{k^2}\left(1 - e^{-kt}\right) - \dfrac{g}{k}t$.

Απαλείφοντας το χρόνο (λύνουμε την πρώτη ως προς $t = -\dfrac{1}{k}\ln\left(1 - \dfrac{kx}{v_{0x}}\right)$ και μετά αντικαθιστούμε στη δεύ-

τερη) βρίσκουμε την εξίσωση τροχιάς $z = \dfrac{v_{0z}k + g}{kv_{0x}}x + \dfrac{g}{k^2}\ln\left(1 - \dfrac{kx}{v_{0x}}\right)$.
Όταν η συντεταγμένη z ξαναγίνει μηδενική το βεληνεκές $s = x|_{z=0}$ δίνεται από τη μη-μηδενική λύση της εξίσωσης $\left(1 + \dfrac{v_{0z}k}{g}\right)\dfrac{ks}{v_{0x}} = -\ln\left(1 - \dfrac{ks}{v_{0x}}\right)$.
(γ) Για «μικρά» k, δηλ. για $\varepsilon = ks/v_{0x} \ll 1$ αναπτύσσουμε τον λογάριθμο χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα $-\ln(1-\varepsilon) = \varepsilon + \dfrac{\varepsilon^2}{2} + \dfrac{\varepsilon^3}{3} + \cdots + \dfrac{\varepsilon^n}{n} + \ldots$[4] Έτσι η σχέση που δίνει το βεληνεκές γράφεται $\left(1 + \dfrac{v_{0z}k}{g}\right)\varepsilon = \varepsilon + \dfrac{\varepsilon^2}{2} + \dfrac{\varepsilon^3}{3} + \cdots \Leftrightarrow \dfrac{\varepsilon^2}{3} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \dfrac{v_{0z}k}{g}$. Αντικαθιστώντας $\varepsilon = \dfrac{ks}{v_{0x}}$ έχουμε $s = \dfrac{2v_{0x}v_{0z}}{g} - \dfrac{2ks^2}{3v_{0x}}$. Χωρίς αντίσταση παίρνουμε το γνωστό αποτέλεσμα $s_0 = \dfrac{2v_{0x}v_{0z}}{g}$. Το αποτέλεσμα με την πρώτη διόρθωση βρίσκεται από $s = \dfrac{2v_{0x}v_{0z}}{g} - \dfrac{2ks^2}{3v_{0x}}$ αν θέσουμε στον τελευταίο όρο όπου s το s_0 (μιας και ο τελευταίος αυτός όρος έχει ήδη πολλαπλασιαστικό παράγοντα k, η διόρθωση στο s θα δώσει δεύτερης τάξης όρο). Άρα $s = s_0 - \dfrac{2ks_0^2}{3v_{0x}} = \dfrac{2v_{0x}v_{0z}}{g}\left(1 - \dfrac{4kv_{0z}}{3g}\right)$.

3.3 Αδιαστατικοποίηση

Κάθε σύστημα μονάδων βασίζεται σε συγκεκριμένες επιλογές για τα βασικά μεγέθη, μήκος, μάζα, χρόνο (και ένταση ρεύματος αν στο πρόβλημα εμπλέκονται ηλεκτρομαγνητικά πεδία), ή ισάριθμους συνδυασμούς τους. Μια χρήσιμη μέθοδος για να απλοποιούμε εκφράσεις χωρίς να χάνουμε την γενικότητα είναι να επιλέγουμε κατάλληλα τα μεγέθη αυτά χρησιμοποιώντας χαρακτηριστικά του ίδιου του προβλήματος. Όπως θα δούμε αυτό είναι ισοδύναμο με το να θέτουμε κατάλληλες σταθερές που αφορούν το πρόβλημα ίσες με την μονάδα.

Η εφαρμογή μιας τέτοιας «αδιαστατικοποίησης» θα γίνει στο παρακάτω παράδειγμα 3.5.

Το να αναγνωρίσουμε τις κλίμακες των βασικών μεγεθών για ένα πρόβλημα είναι από μόνο του σημαντικό, όπως θα δούμε αρχικά στο παράδειγμα 3.4.

Παράδειγμα 3.4:
Σώμα μάζας m αφήνεται να πέσει υπό την επίδραση του βάρους mg και δύναμης αντίστασης μέτρου λv^2.
(α) Ποιες οι μονάδες του λ συναρτήσει των θεμελιωδών;
(β) Ποιος συνδυασμός των λ, m, g έχει μονάδες ταχύτητας; Σε τι μπορεί να αντιστοιχεί;
(γ) Ποια χρονική κλίμακα ορίζεται από τα λ, m, g; Σε τι μπορεί να αντιστοιχεί;
(δ) Σε τι μπορεί να αντιστοιχεί το μήκος που ορίζεται από τα λ, m, g;
Λύση:
(α) Η σταθερά λ έχει μονάδες δύναμη ανά τετράγωνο ταχύτητας. Συγκρίνοντας με την σχέση $F_{\text{κεντρομόλος}} = mv^2/r$ (δεν σχετίζεται με το πρόβλημά μας, απλά για να δούμε εύκολα τις διαστάσεις του λόγου δύναμης ανά τετράγωνο ταχύτητας) συμπεραίνουμε ότι $[\lambda] = [M]/[L]$, δηλ. έχει μονάδες μάζα ανά μήκος.
Αλλιώς: $[\lambda] = \dfrac{[F]}{[v]^2}$ και αντικαθιστούμε $[F] = [M]\dfrac{[L]}{[T]^2}$ και $[v] = \dfrac{[L]}{[T]}$.
(β) Μια σχέση $U = \lambda^\alpha m^\beta g^\gamma$ συνεπάγεται $\dfrac{[\mathrm{L}]}{[\mathrm{T}]} = \left(\dfrac{[M]}{[L]}\right)^\alpha [M]^\beta \left(\dfrac{[\mathrm{L}]}{[\mathrm{T}]^2}\right)^\gamma \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 = -\alpha + \gamma \text{ (από μήκη)}, \\ 0 = \alpha + \beta \text{ (από μάζες)}, \\ -1 = -2\gamma \text{ (από χρόνους)}, \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

[4]Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ανάπτυγμα Taylor κατά τα γνωστά, αλλά πιο απλά μπορούμε να σκεφτούμε το λογάριθμο σαν $-\ln(1-\varepsilon) = \displaystyle\int_0^\varepsilon \frac{d\varepsilon}{1-\varepsilon}$ και το κλάσμα $\dfrac{1}{1-\varepsilon} = \displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{1-\varepsilon^N}{1-\varepsilon} = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \ldots$, οπότε $-\ln(1-\varepsilon) = \displaystyle\int_0^\varepsilon \left(1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \ldots\right) d\varepsilon$.

$$\begin{cases} \alpha = -1/2\,, \\ \beta = 1/2\,, \\ \gamma = 1/2\,, \end{cases} \quad \text{δηλ. ο συνδυασμός } U = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}} \text{ έχει μονάδες ταχύτητας.}$$

Πολύ ευκολότερα προκύπτει το αποτέλεσμα αν παρατηρήσουμε ότι οι mg και λv^2 είναι και οι δύο δυνάμεις, επομένως έχουν ίδιες μονάδες. Άρα $[mg] = [\lambda v^2] \Leftrightarrow [v] = [\sqrt{mg/\lambda}]$.

Η ταχύτητα αυτή πρέπει να σχετίζεται με την οριακή που αποκτά το σώμα κατεβαίνοντας.

Πράγματι είναι ακριβώς η οριακή, η οποία αντιστοιχεί σε μηδενική συνισταμένη δυνάμεων $mg = \lambda v^2_{\text{οριακή}}$.

(γ) Μπορούμε να επαναλάβουμε την προηγούμενη διαδικασία (να βρούμε τα α', β', γ' ώστε να ισχύει $\tau = \lambda^{\alpha'} m^{\beta'} g^{\gamma'}$), αλλά πιο εύκολα να παρατηρήσουμε ότι χρόνο δίνει το πηλίκο ταχύτητα προς επιτάχυνση, να χρησιμοποιήσουμε την ταχύτητα που βρήκαμε στο (β) και την επιτάχυνση βαρύτητας, δηλ. $\tau = \dfrac{U}{g} = \sqrt{\dfrac{m}{\lambda g}}$.

Ο χρόνος τ πρέπει να σχετίζεται με τον χρόνο που χρειάζεται το σώμα να αποκτήσει την οριακή ταχύτητα.

Πράγματι η ολοκλήρωση της εξίσωσης κίνησης $m\dot{v} = mg - \lambda v^2$, εργαζόμενοι όπως στο παράδειγμα 3.1 δίνει $v = U \tanh\left(\dfrac{t}{\tau}\right)$, δηλ. η ταχύτητα πλησιάζει εκθετικά την οριακή τιμή U και σε χρόνο κλίμακας μερικών τ πρακτικά την φτάνει.

(δ) Το μήκος $L = U\tau = \dfrac{m}{\lambda}$ πρέπει να σχετίζεται με την απόσταση που χρειάζεται το σώμα να αποκτήσει την οριακή ταχύτητα.

Πράγματι η εξίσωση κίνησης $m\dot{v} = mg - \lambda v^2$, με $\dot{v} = \dfrac{dv}{ds}\dfrac{ds}{dt} = v\dfrac{dv}{ds}$ προσδιορίζει την σχέση ταχύτητας–μήκους μέσω της διαφορικής εξίσωσης $mv\dfrac{dv}{ds} = mg - \lambda v^2$. Εργαζόμενοι όπως στο παράδειγμα 3.1 προκύπτει $v = U\sqrt{1 - e^{-2s/L}}$, δηλ. η ταχύτητα πλησιάζει εκθετικά την οριακή τιμή U και σε απόσταση κλίμακας μερικών $L = U\tau$ πρακτικά την φτάνει.

Παράδειγμα 3.5:

Η εξίσωση κίνησης του παραδείγματος 3.1 είναι $m\dot{v} = -mg - \lambda|v|v$. Ορίστε κατάλληλες μονάδες για να την απλοποιήσετε.

Λύση:

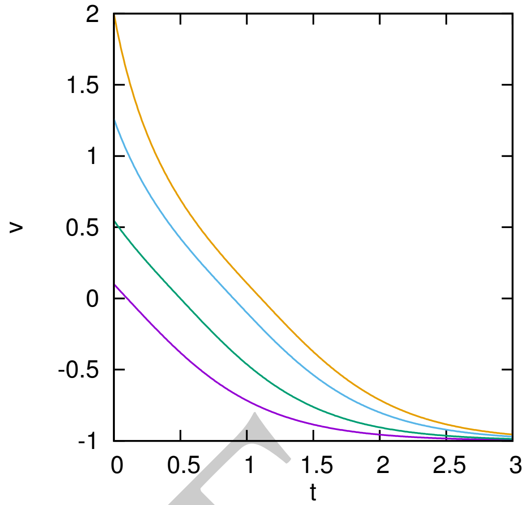
Έχουμε ελευθερία να ορίσουμε τρία βασικά μεγέθη. Προσπαθούμε να εκμεταλλευτούμε την ελευθερία αυτή για να θέσουμε τις τρεις σταθερές που εμφανίζονται στην εξίσωση ίσες με μονάδα.

Έστω μετράμε μάζες σε μονάδες m, επιταχύνσεις σε μονάδες g και ταχύτητες σε μονάδες $U = \sqrt{mg/\lambda}$ (είδαμε στο παράδειγμα 3.4 γιατί αυτός ο συνδυασμός έχει μονάδες ταχύτητας).

Αυτές οι τρεις επιλογές αρκούν για να καθορίσουμε τις μονάδες όλων των μεγεθών. Χρόνους μετράμε σε $\tau = U/g$ (αφού ο λόγος ταχύτητα προς επιτάχυνση έχει μονάδες χρόνου), μήκη σε $U\tau = U^2/g$ (αφού το γινόμενο ταχύτητα επί χρόνο έχει μονάδες μήκους).

Για να απλοποιήσουμε λοιπόν την εξίσωση κίνησης θέτουμε $a = \dot{v} = ga'$ και $v = Uv'$ (τα a' και v' είναι αδιάστατα) οπότε αυτή παίρνει τη μορφή $mga' = -mg - \lambda U^2|v'|v'$, ή $a' = -1 - |v'|v'$, αφού $U = \sqrt{mg/\lambda}$. Διώχνοντας τους τόνους καταλήγουμε στην $a = -1 - |v|v$ η οποία είναι ίδια με την αρχική, αλλά με $m = 1$, $g = 1$, $\lambda = 1$.

Αν προχωρούσαμε όπως στο παράδειγμα 3.1 θα καταλήγαμε για την άνοδο στις λύσεις $v = \tan(C - t)$, $z = \ln\left[\dfrac{\cos(C-t)}{\cos C}\right]$, $v = \sqrt{\dfrac{e^{-2z}}{\cos^2 C} - 1}$ για $0 \leq t \leq C$, όπου $C = \arctan v_a$, και για την κάθοδο στις λύσεις $v = -U\tanh(t - C)$ για $t \geq C$, $z = \ln(1/\cos C) - \ln[\cosh(t-C)]$, $v = -\sqrt{1 - e^{2z}\cos^2 C}$.
Οι εκφράσεις προφανώς είναι απλούστερες και δίνουν πιο καθαρές πληροφορίες. Βλέπουμε για παράδειγμα ότι η λύση εξαρτάται μόνο από την παράμετρο $C \in (0, \pi/2)$, ή ισοδύναμα την αρχική ταχύτητα $v_a = \tan C$ (τώρα v_a είναι η αρχική ταχύτητα σε μονάδες U). Η ταχύτητα κατά την επιστροφή του σώματος στο $z = 0$ είναι $v_\tau = -\sin C$. Το δίπλα σχήμα δείχνει διάφορες λύσεις που μονοσήμαντα αντιστοιχούν στην αρχική τιμή της αδιάστατης ταχύτητας.



Αν θέλουμε να επιστρέψουμε σε σχέσεις με μονάδες δεν έχουμε παρά να κάνουμε τις αντίστροφες αντικαταστάσεις $v \to \dfrac{v}{U}$, $z \to \dfrac{z}{U^2/g}$, $t \to \dfrac{t}{U/g}$, κ.ο.κ. Για παράδειγμα οι άξονες του προηγούμενου σχήματος είναι ουσιαστικά $\dfrac{gt}{U} = \dfrac{t}{\sqrt{m/\lambda g}}$ (οριζόντιος) και $\dfrac{v}{U} = \dfrac{v}{\sqrt{mg/\lambda}}$ (κατακόρυφος).

3.4 Διαταρακτική μέθοδος

Οι άγνωστες συναρτήσεις σε ένα πρόβλημα Μηχανικής εξαρτώνται από το χρόνο, αλλά και παραμέτρους του φαινομένου που μελετούμε. Όπως στα γνωστά μας αναπτύγματα Taylor μπορούμε να αναπτύσσουμε μια συνάρτηση σε δυνάμεις της μεταβλητής, έτσι και εδώ μπορούμε να σκεφτούμε μια οποιαδήποτε συνάρτηση σαν μια σειρά όρων ο καθένας από τους οποίους είναι ανάλογος με μια συγκεκριμένη δύναμη της παραμέτρου. Αν π.χ. ψάχνουμε τη θέση x που εξαρτάται από το χρόνο και μία παράμετρο k μπορούμε να γράψουμε $x(t) = x^{(0)}(t) + x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t) + \ldots$, όπου εννοούμε ότι ο όρος $x^{(\nu)}(t)$ είναι νιοστής τάξης, δηλ. είναι ανάλογος της νιοστής δύναμης της παραμέτρου k. Στη γραφή αυτή δηλ. ο αριθμός μέσα στην παρένθεση του εκθέτη δείχνει την τάξη.[5]

Ο τρόπος που βρίσκουμε τις συναρτήσεις όλων των τάξεων είναι η αντικατάσταση της έκφρασης στη σχέση που καθορίζει την συνάρτηση $x(t)$ (π.χ. το νόμο Νεύτωνα) και κατόπιν η απομόνωση όρων ίδιας τάξης, ξεκινώντας από μηδενικής, μετά πρώτης, κ.ο.κ. Παρότι η μέθοδος δουλεύει γενικά και μπορεί να μας δώσει όλη τη σειρά (έτσι μπορούμε να λύσουμε ένα πρόβλημα του οποίου η λύση δεν μπορεί να βρεθεί σε κλειστή μορφή), έχει μεγαλύτερη πρακτική σημασία όταν σε ένα πρόβλημα αναγνωρίσουμε μία «μικρή» ποσότητα και αρκεί ένας μικρός αριθμός όρων για να περιγράψουμε τη λύση.

Συνήθως η μέθοδος εφαρμόζεται όταν είναι εύκολο να βρούμε τη λύση για $k = 0$ και ζητούμε την διαταραχή (δηλ. την αλλαγή στη λύση) που προκαλεί μία μη-μηδενική, αλλά σχετικά μικρή τιμή της παραμέτρου k.

Ακόμα και στις περιπτώσεις που η παράμετρος k δεν είναι αδιάστατη, η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί, γιατί με κατάλληλη επιλογή άλλων χαρακτηριστικών του προβλήματος πάντα μπορούμε να φτιάξουμε μια αδιάστατη μεταβλητή που είναι ανάλογη του k (αυστηρά μιλώντας το ανάπτυγμα έχει νόημα να γίνει ως προς την αδιάστατη αυτή μεταβλητή, αλλά πρακτικά δεν έχει διαφορά αν σκεφτόμαστε ανάπτυγμα ως προς k).

Τα παραπάνω θα γίνουν περισσότερο κατανοητά με τα επόμενα παραδείγματα.

[5] Θα μπορούσαμε να γράψουμε τη σχέση σαν $x(t) = x^{(0)}(t) + kx^{(1)}(t) + k^2x^{(2)}(t) + \ldots$ ώστε να φαίνονται άμεσα οι δυνάμεις του k. Η τάξη όμως φαίνεται ούτως ή άλλως στους εκθέτες των συναρτήσεων $x^{(\nu)}(t)$.

Παράδειγμα 3.6:
Από ύψος h πάνω από το έδαφος αφήνουμε σώμα αμελητέας επιφάνειας, οπότε και η αντίσταση αέρα είναι αμελητέα. Λόγω της (ομογενούς) βαρύτητας g αυτό φτάνει στο έδαφος σε χρόνο $t^{(0)}$. Αν αφήσουμε άλλο σώμα μάζας m στο οποίο εκτός του βάρους ασκείται και αντίσταση kmv^2 (με k σταθερά) αυτό φτάνει στο έδαφος σε χρόνο $t^{(0)}+t^{(1)}$. Δείξτε ότι στο όριο της μικρής αντίστασης είναι $t^{(1)}/t^{(0)} \approx kh/6$.
Λύση:
Σε κατακόρυφο άξονα x με φορά προς τα κάτω και αρχή στην αρχική θέση του σώματος η εξίσωση κίνησης είναι $\ddot{x} = g - k\dot{x}^2$.
Σε μηδενική τάξη ως προς k έχουμε τη λύση χωρίς αντίσταση $\ddot{x}^{(0)} = g \Leftrightarrow \dot{x}^{(0)} = gt$, $x^{(0)} = gt^2/2$, οπότε $h = g(t^{(0)})^2/2 \Leftrightarrow t^{(0)} = \sqrt{2h/g}$.
Με την αντίσταση η λύση μπορεί να θεωρηθεί ανάπτυγμα ως προς k, δηλ. $x = x^{(0)}(t) + x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t) \ldots$ με τον κάθε όρο να θεωρείται ανάλογος της αντίστοιχης δύναμης του k. Παρότι η σταθερά k δεν είναι αδιάστατη και επομένως δεν έχει νόημα η έκφραση μικρό k, πάντα μπορούμε να φτιάξουμε μια αδιάστατη ποσότητα που είναι ανάλογη του k και το ανάπτυγμα γίνεται στην ουσία ως προς αυτή. Όταν λέμε λοιπόν «μικρό» k εννοούμε ότι συγκρίνοντάς το με κάποια άλλη ποσότητα που έχει ίδιες μονάδες έχουμε φτιάξει μια αδιάσταση σταθερά που είναι μικρή.
Στην περίπτωσή μας εύκολα βλέπουμε ότι το k έχει μονάδες αντίστροφου μήκους. Μιας και h είναι ένα μήκος του προβλήματος η αδιάστατη μικρή σταθερά είναι kh. Θα μπορούσαμε εναλλακτικά να συγκρίνουμε το μήκος $1/k$ με το χρονοεξαρτώμενο μήκος gt^2 και να φτιάξουμε την αδιάσταση ποσότητα kgt^2 που επίσης πρέπει να είναι μικρή (και πράγματι είναι στο χρόνο που χρειάζεται το σώμα να διανύσει την απόσταση h, αν ισχύει $kh \ll 1$).
Στο όριο της μικρής αντίστασης αρκεί να βρούμε την πρώτη διόρθωση (την $x^{(1)}(t)$ που είναι ανάλογη του k). Θέτοντας στην εξίσωση κίνησης $x = x^{(0)}(t) + x^{(1)}(t)$ και κρατώντας μέχρι πρώτης τάξης όρους ως προς k, έχουμε $\ddot{x}^{(1)} = -k(\dot{x}^{(0)})^2$ (ο όρος της αντίστασης είναι ήδη ανάλογος του k, οπότε στην ταχύτητα συνεισφέρει μόνο ο μηδενικής τάξης όρος). Αντικαθιστώντας τη λύση $x^{(0)}$ που έχουμε ήδη βρει, είναι $\ddot{x}^{(1)} = -kg^2t^2$, σχέση που ολοκληρώνεται άμεσα $\dot{x}^{(1)} = -kg^2t^3/3 \Leftrightarrow x^{(1)} = -kg^2t^4/12$. Οι σταθερές ολοκλήρωσης επιλέχθηκαν ώστε οι διαταραχές να μηδενίζονται αρχικά, διότι οι αρχικές συνθήκες ήδη ικανοποιούνται από την μηδενικής τάξης λύση.
Άρα η λύση, σωστή σε πρώτη τάξη ως προς k είναι $x(t) = gt^2/2 - kg^2t^4/12$.
Η εξίσωση $x(t) = h$ έχει λύση $t = t^{(0)} + t^{(1)}$. Αντικαθιστώντας και κρατώντας μέχρι πρώτης τάξης όρους έχουμε $h = g[(t^{(0)})^2 + 2t^{(0)}t^{(1)}]/2 - kg^2(t^{(0)})^4/12 \Leftrightarrow t^{(1)} = kg(t^{(0)})^3/12$, οπότε $t^{(1)}/t^{(0)} = kh/6$.
Θα μπορούσαμε γενικά να βρούμε και επόμενες διορθώσεις με τον ίδιο τρόπο. Ας πούμε ψάχνουμε και τον δεύτερης τάξης όρο ως προς k. Θέτοντας στην εξίσωση κίνησης $x = x^{(0)} + x^{(1)} + x^{(2)}$ έχουμε $\ddot{x}^{(0)} + \ddot{x}^{(1)} + \ddot{x}^{(2)} = g - k(\dot{x}^{(0)} + \dot{x}^{(1)} + \dot{x}^{(2)})^2 = g - k(\dot{x}^{(0)})^2 - k(\dot{x}^{(1)})^2 - k(\dot{x}^{(2)})^2 - 2k\dot{x}^{(0)}\dot{x}^{(1)} - 2k\dot{x}^{(0)}\dot{x}^{(2)} - 2k\dot{x}^{(1)}\dot{x}^{(2)}$. Κρατώντας μέχρι δεύτερης τάξης όρους ως προς k έχουμε $\ddot{x}^{(0)} + \ddot{x}^{(1)} + \ddot{x}^{(2)} = g - k(\dot{x}^{(0)})^2 - 2k\dot{x}^{(0)}\dot{x}^{(1)}$ και αντικαθιστώντας τα γνωστά $\ddot{x}^{(0)} = -g$ και $\ddot{x}^{(1)} = -k(\dot{x}^{(0)})^2$ προκύπτει $\ddot{x}^{(2)} = -2k\dot{x}^{(0)}\dot{x}^{(1)}$. Έμειναν μόνο οι 2ης τάξης όροι και αυτό βέβαια δεν είναι τυχαίο (είναι ισοδύναμο με εξίσωση σειρών Taylor που ισοδυναμεί με το να είναι ίσοι οι όροι με ίδιες δυνάμεις). Γενικά όταν στην εξίσωση κρατάμε όρους μέχρι νιοστής τάξης τελικά μένουν μόνο οι ανώτερης (νιοστής) τάξης όροι, διότι οι όροι μικρότερων τάξεων εξουδετερώνονται μεταξύ τους όπως έχουμε απαιτήσει για να βρούμε τα αντίστοιχα μέρη της $x(t)$ στα προηγούμενα βήματα. Αυτό μάλιστα θα μπορούσαμε να το χρησιμοποιούσαμε στην περίπτωσή μας που θέλουμε 2ης τάξης όρους και να αφήναμε εξαρχής στην εξίσωση μόνο τους όρους αυτής της τάξης: στο αριστερό μέλος τον $\ddot{x}^{(2)}$ και στο δεξιό τον $-2k\dot{x}^{(0)}\dot{x}^{(1)}$ (διότι ο όρος της αντίστασης έχει ήδη ένα k, οπότε στο τετράγωνο της ταχύτητας πρέπει να κρατήσουμε μόνο τον όρο τάξης k). Η τελευταία σχέση, αφού αντικαταστήσουμε τα $x^{(0)}$ και $x^{(1)}$ γράφεται $\ddot{x}^{(2)} = 2k^2g^3t^4/3$ και ολοκληρώνεται άμεσα $\dot{x}^{(2)} = 2k^2g^3t^5/15 \Leftrightarrow x^{(2)} = k^2g^3t^6/45$ (οι σταθερές ολοκλήρωσης επιλέχθηκαν ώστε οι διαταραχές να μηδενίζονται αρχικά). Άρα η λύση, σωστή σε δεύτερη τάξη ως προς k είναι $x(t) = gt^2/2 - kg^2t^4/12 + k^2g^3t^6/45$.

Εννοείται ότι σε περιπτώσεις όπου μπορεί να επιλυθεί ακριβώς το πρόβλημα με ανάπτυγμα της λύσης κατά Taylor βρίσκονται οι διορθώσεις κάθε τάξης (συνήθως ο τρόπος αυτός δεν είναι ο πιο σύντομος αν θέλουμε μόνο την πρώτη διόρθωση – ξέχωρα από το ότι εφαρμόζεται μόνο σε προβλήματα των οποίων η λύση μπορεί να βρεθεί σε κλειστή μορφή.)

Εργαζόμενοι όπως στο παράδειγμα 3.1 (την μελέτη της καθόδου) βρίσκουμε $v = \sqrt{\frac{g}{k}} \tanh\left(t\sqrt{kg}\right)$ και $x = \frac{1}{k}\ln\left[\cosh\left(t\sqrt{kg}\right)\right]$.

Για «μικρό» k, το αδιάστατο όρισμα της cosh είναι μικρό και μπορούμε να αναπτύξουμε την συνάρτηση αυτή κατά Taylor. («Μικρό» k σημαίνει λοιπόν $t\sqrt{kg} \ll 1 \Leftrightarrow k \ll \frac{1}{gt^2}$.)

Το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $f(\xi) = \ln(\cosh\xi)$ γύρω από το μηδέν είναι $f(\xi) \approx f(0) + f'(0)\xi + \frac{1}{2}f''(0)\xi^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)\xi^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(0)\xi^4$ και αφού $f'(\xi) = \tanh\xi$, $f''(\xi) = \frac{1}{\cosh^2\xi}$, $f'''(\xi) = -\frac{2\sinh\xi}{\cosh^3\xi}$, $f^{(4)}(\xi) = -\frac{2}{\cosh^2\xi} + \frac{6\sinh^2\xi}{\cosh^4\xi}$ προκύπτει $\ln(\cosh\xi) \approx \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^4}{12}$ (για να βρούμε την πρώτη διόρθωση της θέσης σε σχέση με την τιμή $gt^2/2$ πρέπει να κρατήσουμε δύο μη-μηδενικούς όρους στο ανάπτυγμα, δηλ. να κρατήσουμε μέχρι 4ης τάξης όρους, μιας και για την συγκεκριμένη συνάρτηση ισχύει $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ και $f'''(0) = 0$).

Επομένως για «μικρό» k ισχύει $x = \frac{1}{k}\left[\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^4}{12}\right]_{\xi = t\sqrt{kg}} = \frac{gt^2}{2} - \frac{kg^2t^4}{12}$.

Παράδειγμα 3.7:
Για το πρόβλημα του παραδείγματος 3.3 και την υποπερίπτωση ακίνητου υγρού που προβάλει «μικρή» αντίσταση $-mkv$ βρείτε τη λύση διαταρακτικά (τόσο τη θέση σε κάθε χρόνο όσο και το βεληνεκές).
Λύση:
Η διανυσματική εξίσωση κίνησης είναι $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} - k\boldsymbol{v}$. Για την αδιατάρακτη τροχιά (με μηδενική αντίσταση $k = 0$) $\ddot{\boldsymbol{r}}^{(0)} = \boldsymbol{g} \Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{r}}^{(0)} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{g}t \Leftrightarrow \boldsymbol{r}^{(0)} = \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{g}t^2/2$ (θεωρούμε αρχή του συστήματος στην αρχική θέση). Προσθέτουμε διαταραχή, δηλ. θεωρούμε $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}^{(0)} + \boldsymbol{r}^{(1)}$ όπου ο όρος που προσθέσαμε είναι τάξης k. Αντικαθιστώντας στο νόμο Νεύτωνα και κρατώντας μέχρι όρους ανάλογους του k προκύπτει $\ddot{\boldsymbol{r}}^{(0)} + \ddot{\boldsymbol{r}}^{(1)} = \boldsymbol{g} - k\boldsymbol{v}^{(0)}$. Λόγω της $\ddot{\boldsymbol{r}}^{(0)} = \boldsymbol{g}$ μένουν μόνο όροι πρώτης τάξης $\ddot{\boldsymbol{r}}^{(1)} = -k\dot{\boldsymbol{r}}^{(0)}$. Η σχέση αυτή ολοκληρώνεται και δίνει $\dot{\boldsymbol{r}}^{(1)} = -k\boldsymbol{r}^{(0)}$ (η αρχική τιμή της $\dot{\boldsymbol{r}}^{(1)}$ πρέπει να είναι μηδενική ώστε για $t = 0$ να ισχύει $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}^{(0)} + \dot{\boldsymbol{r}}^{(1)} = \boldsymbol{v}_0$ – γενικά οι διαταραχές πρέπει να μηδενίζονται αρχικά διότι οι αρχικές συνθήκες ήδη ικανοποιούνται από την μηδενικής τάξης λύση). Είναι λοιπόν $\dot{\boldsymbol{r}}^{(1)} = -k\left(\boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{g}t^2/2\right)$. Ολοκληρώνοντας ξανά και απαιτώντας η διαταραχή να μηδενίζεται αρχικά βρίσκουμε $\boldsymbol{r}^{(1)} = -k\boldsymbol{v}_0 t^2/2 - k\boldsymbol{g}t^3/6$, οπότε η θέση σε κάθε χρόνο είναι $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{g}t^2/2 - k\boldsymbol{v}_0 t^2/2 - k\boldsymbol{g}t^3/6$.

Οι συνιστώσες της θέσης σε κάθε χρόνο είναι $x = v_{0x}t - kv_{0x}t^2/2$ και $z = v_{0z}t - gt^2/2 - kv_{0z}t^2/2 + kgt^3/6$ (θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η κίνηση γίνεται στο επίπεδο xz και $\boldsymbol{g} = -g\hat{\boldsymbol{z}}$).

Το σώμα φτάνει στο επίπεδο $z = 0$ το χρόνο τ για τον οποίο $0 = v_{0z}\tau - g\tau^2/2 - kv_{0z}\tau^2/2 + kg\tau^3/6$. Σε μηδενική τάξη (με μηδενική αντίσταση $k = 0$) βρίσκουμε χρόνο $\tau^{(0)} = 2v_{0z}/g$. Προσθέτοντας διόρθωση $\tau = \tau^{(0)} + \tau^{(1)}$ όπου ο τελευταίος όρος είναι τάξης k, αντικαθιστώντας στην εξίσωση που καθορίζει το χρόνο και κρατώντας μέχρι πρώτης τάξης όρους ως προς k έχουμε $0 = v_{0z}(\tau^{(0)} + \tau^{(1)}) - g[(\tau^{(0)})^2 + 2\tau^{(0)}\tau^{(1)}]/2 - kv_{0z}(\tau^{(0)})^2/2 + kg(\tau^{(0)})^3/6$ (στους δύο τελευταίους όρους που είναι ήδη ανάλογοι του k αντικαθιστούμε τον μηδενικής τάξης όρο, ενώ στον προηγούμενο όρο υψώνουμε στο τετράγωνο και διώχνουμε τον 2ης τάξης όρο $(\tau^{(1)})^2$). Έτσι βρίσκουμε $\tau^{(1)} = -\frac{2kv_{0z}^2}{3g^2}$.

Το βεληνεκές είναι $s = x|_{t=\tau} = v_{0x}(\tau^{(0)} + \tau^{(1)}) - kv_{0x}(\tau^{(0)})^2/2 = \frac{2v_{0x}v_{0z}}{g} - \frac{8kv_{0x}v_{0z}^2}{3g^2}$.

3.5 Περιπτώσεις μεταβλητής μάζας

Παρότι η μάζα κάθε σημειακού σώματος είναι σταθερή κάποιες φορές μας ενδιαφέρουν εκτεταμένα σώματα που χάνουν ή κερδίζουν μάζα στην πάροδο του χρόνου, στα οποία αναφερόμαστε με τον όρο σώματα με μεταβλητή μάζα. Σε αυτά ο 2ος νόμος Νεύτωνα εφαρμόζεται στην γενικότερή του μορφή 3.1.

Σχήμα 3.5: Περίπτωση σώματος με ελαττούμενη μάζα.

Έστω ένα σώμα με ελαττούμενη μάζα, όπως ένας πύραυλος που επιταχύνεται λόγω της εκτόξευσης καυσαερίων. Η εφαρμογή της εξίσωσης 3.1 γίνεται υπολογίζοντας το ρυθμό μεταβολής της ορμής του συστήματος σαν το όριο $\lim_{dt\to 0}\dfrac{\boldsymbol{p}|_{t+dt}-\boldsymbol{p}|_t}{dt}$, δηλ. κρατώντας όρους πρώτης τάξης στον αριθμητή. Όπως δείχνει το σχήμα 3.5 θεωρώντας σαν σύστημα το σώμα στο χρόνο t η μάζα του είναι $m(t)$, η ταχύτητά του $\upsilon(t)$ και η ορμή του $\boldsymbol{p}|_t = m\boldsymbol{\upsilon}$. Σε λίγο μεγαλύτερο χρόνο $t + dt$ το σύστημα αποτελείται από το υπόλοιπο του σώματος με μάζα $m - |dm|$ και ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon} + d\boldsymbol{\upsilon}$, αλλά και το μέρος που έχει φύγει, με μάζα $|dm|$ και ταχύτητα έστω $\boldsymbol{u}$, οπότε η ορμή είναι $\boldsymbol{p}|_{t+dt} = (m-|dm|)(\boldsymbol{\upsilon}+d\boldsymbol{\upsilon})+|dm|\boldsymbol{u}$. Η μεταβολή της ορμής είναι $(m-|dm|)(\boldsymbol{\upsilon}+d\boldsymbol{\upsilon})+|dm|\boldsymbol{u}-m\boldsymbol{\upsilon} \approx m d\boldsymbol{\upsilon} + |dm|(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\upsilon})$ (κρατώντας μέχρι πρώτης τάξης όρους) και η εφαρμογή του νόμου Νεύτωνα δίνει

$$m\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} - \frac{dm}{dt}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\upsilon}) = \boldsymbol{F}\,, \tag{3.5}$$

όπου $\boldsymbol{F}$ είναι οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα (μόνο οι εξωτερικές που ασκούνται στο σώμα m το χρόνο t, αφού οι εσωτερικές εξουδετερώνονται λόγω του 3ου νόμου Νεύτωνα) και έχουμε θέσει $|dm| = -dm$. Η εξίσωση 3.5 καλύπτει και περιπτώσεις σωμάτων με αυξανόμενη μάζα, όπως μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε εργαζόμενοι ανάλογα (στην περίπτωση αυτή σαν σύστημα θα θεωρήσουμε την μάζα m του σώματος το χρόνο t μαζί με την μάζα dm που κινούμενη με ταχύτητα $\boldsymbol{u}$ θα ενσωματωθεί στο σύστημα, το οποίο το χρόνο $t + dt$ θα είναι ένα συσσωμάτωμα μάζας $m + dm$ που κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon} + d\boldsymbol{\upsilon}$).
Η εξίσωση 3.5 γράφεται και σαν

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \dot{m}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\upsilon})\,, \tag{3.6}$$

βλέπουμε δηλ. ότι ο όρος $\dot{m}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\upsilon})$ έχει το ρόλο επιπλέον δύναμης που αλλάζει την επιτάχυνση του σώματος. Είναι ανάλογος του ρυθμού μεταβολής της μάζας $\dot{m}$ (αρνητικός αν η μάζα μειώνεται) και της σχετικής ταχύτητας $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\upsilon}$ της μάζας που προσκολλάται ή φεύγει, ως προς το σώμα. Στην περίπτωση του πυραύλου ο όρος αυτός είναι η ωστική δύναμη που τον προωθεί.

Παράδειγμα 3.8:
Μια σφαιρική σταγόνα βροχής πέφτει μέσα στην ατμόσφαιρα της Γης. Αρχικά είναι ακίνητη και έχει ακτίνα R_0, η οποία όμως αυξάνεται ελαφρώς λόγω της υγρασίας από το περιβάλλον της, έτσι ώστε ο ρυθμός αύξησης της μάζας να είναι ανάλογος της επιφάνειας της σταγόνας $\dot{m} = kS$. Ποια η ταχύτητα της σταγόνας σε κάθε χρόνο;
Θεωρήστε γνωστή την πυκνότητα του νερού, την επιτάχυνση βαρύτητας και αγνοήστε την αντίσταση αέρα.
Λύση:
Η σχέση $\dot{m} = kS$, με $m = \rho 4\pi R^3/3$ και $S = 4\pi R^2$ δίνει $\dot{R} = k/\rho \Leftrightarrow R = R_0(1 + kt/\rho R_0)$ και $m(t) = m(0)(1 + kt/\rho R_0)^3$.
Θεωρώντας σαν σύστημα τη μάζα m της σταγόνας το χρόνο t μαζί με την μάζα dm που στο χρονικό διάστημα από t ως $t+dt$ θα ενσωματωθεί στη σταγόνα (έχοντας αρχικά μηδενική ταχύτητα), η ορμή το χρόνο t είναι $m\upsilon$, ενώ το χρόνο $t+dt$ είναι $(m+dm)(\upsilon+d\upsilon)$, άρα ο νόμος Νεύτωνα δίνει $\lim_{dt\to 0}\dfrac{(m+dm)(\boldsymbol{\upsilon}+d\boldsymbol{\upsilon})-(m\boldsymbol{\upsilon}+dm\,\boldsymbol{u})}{dt} = m\boldsymbol{g}$. Αγνοώντας δεύτερης τάξης όρους βρίσκουμε $\dfrac{d(m\boldsymbol{\upsilon})}{dt} = m\boldsymbol{g}$ (δηλ. την εξίσωση 3.5 με $\boldsymbol{u} = 0$). Η κίνηση

είναι κατακόρυφη, οπότε σε άξονα με φορά προς τα κάτω ισχύει $\dfrac{d(mv)}{dt} = mg = m(0)g(1 + kt/\rho R_0)^3 \Leftrightarrow$ $\displaystyle\int_0^{mv} d(mv) = \int_0^t m(0)g(1 + kt/\rho R_0)^3 dt$ και τελικά $v = \dfrac{g\rho R_0}{4k}\left[1 + \dfrac{kt}{\rho R_0} - \left(1 + \dfrac{kt}{\rho R_0}\right)^{-3}\right]$.
Για «μικρά» k, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα $(1 + \varepsilon)^{-3} \approx 1 - 3\varepsilon + 6\varepsilon^2$ με $\varepsilon = kt/\rho R_0$ (οπότε «μικρό» k σημαίνει $\varepsilon = kt/\rho R_0 \ll 1$ δηλ. $k \ll \rho R_0/t$), προκύπτει η προσεγγιστική έκφραση $v \approx gt - \dfrac{3kgt^2}{2\rho R_0}$ που ισχύει όσο η μεταβολή της ακτίνας της σταγόνας είναι μικρή, δηλ. για $kt/\rho R_0 \ll 1$.

3.6 Κίνηση φορτίου σε ομογενές μαγνητικό πεδίο

Η δύναμη σε φορτίο q από μαγνητικό πεδίο είναι $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$. Η συνιστώσα της πάνω στην κίνηση είναι μηδενική, άρα δεν δημιουργεί επιτρόχια επιτάχυνση και το μέτρο της ταχύτητας παραμένει σταθερό.
Η συνιστώσα της δύναμης στη διεύθυνση του μαγνητικό πεδίου είναι επίσης μηδενική κάτι ου σημαίνει ότι η συνιστώσα της ταχύτητας παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{v}_{\parallel}$ μένει σταθερή.
Αναλύοντας την κίνηση σε ευθύγραμμη ομαλή με ταχύτητα $\boldsymbol{v}_{\parallel}$ παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο και επίπεδη κίνηση σε επίπεδο κάθετα στο μαγνητικό πεδίο με ταχύτητα $\boldsymbol{v}_{\perp}$ ο νόμος Νεύτωνα δίνει $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega}_L \times \boldsymbol{v}_{\perp}$ όπου $\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}}_{\perp}$ και $\boldsymbol{\omega}_L = -\dfrac{q\boldsymbol{B}}{m}$.
Από την σχέση αυτή μπορούμε άμεσα να συμπεράνουμε ότι η κίνηση στο επίπεδο κάθετα στο μαγνητικό πεδίο είναι ομαλή κυκλική διότι $\boldsymbol{v}_{\perp} \cdot \dot{\boldsymbol{v}}_{\perp} = 0 \Leftrightarrow |\boldsymbol{v}_{\perp}| = v_L =$ σταθερά με ακτίνα $r_L = \dfrac{|\boldsymbol{v}_{\perp}|^3}{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}_{\perp}} = \dfrac{mv_L}{|qB|} = \dfrac{v_L}{|\omega_L|}$.
Με άλλα λόγια η συνολική κίνηση είναι ελικοειδής, επαλληλία της ευθύγραμμης ομαλής παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο με ταχύτητα $\boldsymbol{v}_{\parallel}$ και ομαλής κυκλικής με γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}_L = -\dfrac{q\boldsymbol{B}}{m}$ κάθετα στο μαγνητικό πεδίο (η ακτίνα της τελευταίας είναι $r_L = \dfrac{v_L}{|\omega_L|}$). Η κίνηση αυτή αναφέρεται συχνά σαν κίνηση Larmor.

Τα παραπάνω μπορούν να βρεθούν και με ακριβή επίλυση των συνιστωσών της εξίσωσης Νεύτωνα. Στα ακόλουθα θα θεωρήσουμε $B = B\hat{z}$ με $B > 0$ και θετικό φορτίο $q > 0$, αλλά τα αποτελέσματα εύκολα γενικεύονται σε κάθε άλλη περίπτωση. Είναι προτιμότερο να εργαστούμε σε καρτεσιανές συντεταγμένες (γιατί για τυχαίες αρχικές συνθήκες δεν γνωρίζουμε ποιος είναι ο άξονας της ελικοειδούς κίνησης).

Ορίζοντας $\omega_L = \dfrac{qB}{m}$ είναι $m\dot{\boldsymbol{v}} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{v}_x = \omega_L v_y & ① \\ \dot{v}_y = -\omega_L v_x & ② \\ \dot{v}_z = 0 & ③ \end{cases}$

Η ③ δίνει $v_z = v_{\parallel}$ σταθερά. Ολοκληρώνοντας ξανά βρίσκουμε $z = z_0 + v_{\parallel}t$ με $z_0 =$ σταθερά, κάτι που εκφράζει ομαλή κίνηση στον άξονα z (παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο).
Οι ① και ② αποτελούν σύστημα. Λύνοντας την ① ως προς $v_y = \dfrac{\dot{v}_x}{\omega_L}$ και αντικαθιστώντας στην ② βρίσκουμε $\ddot{v}_x + \omega_L^2 v_x = 0$. Η γενική λύση της εξίσωσης αυτής είναι $v_x = v_L \sin(\omega_L t + \phi_0)$, όπου v_L και ϕ_0 σταθερές.
Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα αυτό στην ① βρίσκουμε $v_y = v_L \cos(\omega_L t + \phi_0)$.
Ο πιο γρήγορος τρόπος να λυθεί το σύστημα των $\hat{x}$ και $\hat{y}$ συνιστωσών του νόμου Νεύτωνα είναι να χρησιμοποιήσουμε την μιγαδική ταχύτητα $U = v_x + iv_y$. Προσθέτοντας την ① με την ② αφού την πολλαπλασιάσουμε με i, βρίσκουμε $\dot{U} = -i\omega_L U$, η λύση της οποίας είναι $U = U_0 e^{-i\omega_L t}$. Η προηγούμενη λύση αντιστοιχεί σε σταθερά ολοκλήρωσης $U_0 = v_L e^{i(\pi/2 - \phi_0)}$.
Η ολοκλήρωση των εκφράσεων $v_x(t)$, $v_y(t)$ που βρήκαμε δίνει άμεσα τη θέση $x = x_c - \dfrac{v_L}{\omega_L}\cos(\omega_L t + \phi_0)$, $y = y_c + \dfrac{v_L}{\omega_L}\sin(\omega_L t + \phi_0)$.
Απαλείφοντας το χρόνο βρίσκουμε $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = (v_L/\omega_L)^2$, επομένως η λύση αυτή εκφράζει κύλινδρο με άξονα που περνά από το σημείο (x_c, y_c) και έχει ακτίνα $r_L = v_L/\omega_L$.
Η κίνηση κάθετα στο μαγνητικό πεδίο είναι ομαλή κυκλική αφού $\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_L =$ σταθερά και γίνεται με

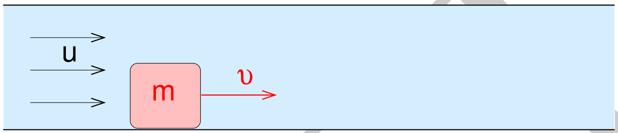
γωνιακή ταχύτητα ω_L.
Η φορά διαγραφής είναι δεξιόστροφη αν κοιτάμε από τα θετικά του άξονα $\hat{z}$, κάτι που συμφωνεί με την $\boldsymbol{\omega}_L = -\frac{q\boldsymbol{B}}{m}$ που βρήκαμε προηγουμένως.

Συνοψίζοντας, η λύση είναι $x = x_c - \frac{v_L}{\omega_L}\cos(\omega_L t + \phi_0)$, $y = y_c + \frac{v_L}{\omega_L}\sin(\omega_L t + \phi_0)$, $z = z_0 + v_\parallel t$, όπου οι σταθερές x_c, y_c, v_L, z_0 και $v_\parallel$ καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες, και περιγράφει ελικοειδή κίνηση.

3.7 Ασκήσεις

Ασκήσεις με λύση

3.7.1 Σώμα μάζας m βρίσκεται μέσα σε οριζόντιο σωλήνα μέσα στον οποίο μπορεί να κυλά υγρό με ελεγχόμενη παροχή. Θεωρώντας αμελητέα την τριβή με τα τοιχώματα του σωλήνα, η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι η δύναμη αντίστασης που του ασκεί το υγρό $-\lambda m v_{\sigma\chi}$, όπου $v_{\sigma\chi}$ η σχετική ταχύτητα του σώματος ως προς το υγρό.



(α) Αρχικά το σώμα είναι ακίνητο και ο σωλήνας γεμάτος με επίσης ακίνητο υγρό. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ανοίγουμε την παροχή, οπότε το υγρό για $t > 0$ κινείται μέσα στο σωλήνα με (σταθερή) ταχύτητα u. Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση του σώματος σαν συνάρτηση του χρόνου.
(β) Τη χρονική στιγμή $t = T$ κλείνουμε την παροχή, οπότε το υγρό ακινητοποιείται (για $t > T$ ο σωλήνας παραμένει γεμάτος με ακίνητο υγρό και το σώμα επιβραδύνεται λόγω της αντίστασης από το υγρό). Βρείτε την ταχύτητα του σώματος συναρτήσει της θέσης και συναρτήσει του χρόνου.
(γ) Δείξτε ότι το συνολικό μήκος που διανύει το σώμα από ακινησία σε ακινησία είναι uT. Ποιο είναι το χρονικό διάστημα κίνησης του σώματος;

Άλυτες ασκήσεις

3.7.1 Ένας σκιέρ μάζας m κατεβαίνει μια χιονισμένη πλαγιά σταθερής γωνίας κλίσης ϕ, υπό την επίδραση του βάρους του, τριβής ολίσθησης με συντελεστή $\mu < \tan\phi$ και αντίστασης αέρα μέτρου $F_a = \lambda v^2$.
(a) Βρείτε την ταχύτητά του σαν συνάρτηση του μήκους x που διανύει (αρχικά $v|_{x=0} = 0$).
(b) Πόσο μήκος πρέπει να διανύσει ο σκιέρ ώστε η ταχύτητά του να αποκτήσει πρακτικά την οριακή τιμή της; Ποια είναι αυτή η οριακή τιμή;
Εφαρμόστε για $m = 70$ kg, $g = 9.8$ m s^{-2}, $\phi = 10^\circ = \arcsin 0.174 = \arccos 0.985$, $\mu = 0.1$, $\lambda = \frac{1}{2}C_D S\rho$ με $C_D = 0.3$, επιφάνεια $S = 1$ m^2 και πυκνότητα αέρα $\rho = 1.1$ kg m^{-3}.
(γ) Ποια θα ήταν η οριακή ταχύτητα αν φυσούσε αέρας με ταχύτητα w παράλληλα στην πλαγιά, με φορά ίδια με την κίνηση του σκιέρ; (Δεν χρειάζεται να λύσετε την εξίσωση κίνησης για να απαντήσετε.)
Εφαρμόστε για $w = 5$ Beaufort (9 m s^{-1}).
(δ) Δυο σκιέρ με ίδιο βάρος και σωματική διάπλαση κατεβαίνοντας μαζί την πλαγιά απέκτησαν οριακή ταχύτητα $\sqrt{2}$ φορές μεγαλύτερη από την οριακή που αποκτά ο καθένας όταν κατεβαίνει μόνος του. Πως το κατάφεραν αυτό;

3.7.2 Ένα αεροπλάνο προσγειώνεται στον διάδρομο έχοντας αρχικά οριζόντια ταχύτητα v_0. Στο αεροπλάνο ασκούνται οι ακόλουθες δυνάμεις: βάρος mg, κάθετη αντίδραση N, δύναμη τριβής λόγω των φρένων μέτρου μN, όπου μ ο συντελεστής τριβής, δύναμη αντίστασης αέρα $\frac{1}{2}C_D\rho S v^2$ όπου ρ η πυκνότητα αέρα, S η επιφάνεια των φτερών και C_D ο συντελεστής αντίστασης, και δύναμη ανύψωσης $\frac{1}{2}C_L\rho S v^2$ με φορά προς τα πάνω, όπου C_L ο συντελεστής ανύψωσης.

(α) Δείξτε ότι η εξίσωση που δίνει την ταχύτητα συναρτήσει της θέσης είναι $\dfrac{dv^2}{dx} - \dfrac{v^2}{x_0} = -2\mu g$, όπου $x_0 = \dfrac{m}{\left(\mu C_L - C_D\right)\rho S}$. Βρείτε την απόσταση που θα διανύσει το αεροπλάνο μέχρι να σταματήσει.

(β) Δείξτε ότι η εξίσωση που δίνει την ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου είναι $\dot{v} = \dfrac{v^2}{2x_0} - \mu g$. Βρείτε σε πόσο χρόνο θα σταματήσει το αεροπλάνο.

(γ) Εφαρμογή: $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$, $\rho = 1.2\ \mathrm{kg/m^3}$, $m = 200000\ \mathrm{kg}$, $S = 500\ \mathrm{m^2}$, $C_D = 0.05$, $C_L = 0.7$, $\mu = 0.6$ και αρχική ταχύτητα v_0 που αντιστοιχεί σε αρχική ισορροπία μεταξύ βάρους και δύναμης ανύψωσης. Σε πόση απόσταση και σε πόσο χρόνο θα σταματήσει το αεροπλάνο;

(δ) Για να σταματήσει διανύοντας μικρότερη απόσταση ενεργοποιούνται αυτόματα (μόλις οι τροχοί ακουμπήσουν στο διάδρομο) οι αποσβεστήρες άντωσης (spoilers) λόγω των οποίων αφενός μειώνεται ο συντελεστής ανύψωσης σε $C_L' < C_L$ και αφετέρου αυξάνεται ο συντελεστής αντίστασης σε $C_D' > C_D$. Σε πόση απόσταση και σε πόσο χρόνο θα σταματήσει τώρα αν $C_D' = 0.1$ και $C_L' = 0.4$;
Ποια η επιβράδυνση που νοιώθουν οι επιβάτες;

3.7.3 Είναι γνωστό ότι η κατακόρυφη κίνηση σωμάτων μέσα σε ομογενές βαρυτικό πεδίο δεν επηρεάζεται από τυχόν οριζόντια αρχική ταχύτητα. Αυτόν τον «μύθο» έλεγξαν οι MythBusters σ' ένα τους επεισόδιο (`https://www.youtube.com/watch?v=tF_zv3TCT1U`). Έριξαν με πιστόλι μια σφαίρα οριζόντια με ταχύτητα $v_0 = 255\ \mathrm{m/s}$ από ύψος $h = 0.91\ \mathrm{m}$ και ταυτόχρονα άφησαν μια ίδια σφαίρα να πέσει από το ίδιο ύψος. Μέτρησαν ότι η πρώτη φτάνει στο έδαφος $\sim$ 40 χιλιοστά του δευτερολέπτου μετά την δεύτερη, χρονική διαφορά την οποία θεώρησαν αμελητέα και συμπέραναν ότι ο μύθος επιβεβαιώθηκε. Θέλουμε να ελέγξουμε κατά πόσον η αντίσταση του αέρα επηρεάζει σημαντικά την κίνηση της πρώτης σφαίρας – λόγω της μεγάλης της ταχύτητας – και αν είναι υπεύθυνη για την παρατηρούμενη χρονική διαφορά.

(α) Καταρχάς βρείτε την θέση $\boldsymbol{r}^{(0)}(t)$ της πρώτης σφαίρας υποθέτοντας ότι σε αυτή ασκείται μόνο το βάρος της, βρείτε σε πόσο χρόνο $\tau^{(0)}$ φτάνει στο έδαφος και διαπιστώστε ότι είναι ίδιος με τον χρόνο ελεύθερης πτώσης.

(β) Έστω στην σφαίρα ασκείται επιπλέον δύναμη αντίστασης $-\lambda m|\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}$, όπου $\boldsymbol{v}$ η στιγμιαία ταχύτητά της και $\lambda = \dfrac{C_D \rho \pi L^2}{8m}$, με $C_D = 0.3$, $\rho = 1.22\ \mathrm{kg/m^3}$ (πυκνότητα αέρα), $L = 11.5 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}$ (διάμετρος σφαίρας) και $m = 15 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg}$ (μάζα σφαίρας).

Μιας και η επίδραση της αντίστασης είναι μικρή η λύση μπορεί να βρεθεί διαταρακτικά, κρατώντας μόνο όρους το πολύ ανάλογους του λ. Επίσης μιας και η κατακόρυφη ταχύτητα είναι πολύ μικρότερη της οριζόντιας μπορούμε να προσεγγίσουμε $\lambda|\boldsymbol{v}| \approx \lambda v_0$.

(β_1) Γράφοντας την θέση σαν $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}^{(0)}(t) + \boldsymbol{r}^{(1)}(t)$, όπου ο όρος $\boldsymbol{r}^{(1)}(t)$ είναι ανάλογος του λ, δείξτε ότι ο νόμος Νεύτωνα δίνει $\ddot{\boldsymbol{r}}^{(1)} = -\lambda v_0 \left(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{g}\, t\right)$ και ολοκληρώστε την εξίσωση αυτή για να βρείτε την $\boldsymbol{r}^{(1)}(t)$.

(β_2) Γράψτε την συνθήκη που καθορίζει τον χρόνο πτώσης τ.

Ο χρόνος αυτός διαφέρει λίγο από τον χρόνο ελεύθερης πτώσης $\tau^{(0)}$, δηλ. είναι $\tau = \tau^{(0)} + \tau^{(1)}$, όπου ο όρος $\tau^{(1)}$ είναι ανάλογος του λ. Αντικαθιστώντας στην συνθήκη και κρατώντας όρους μέχρι ανάλογους του λ βρείτε τον όρο $\tau^{(1)}$ και άρα τον χρόνο τ.

(β_3) Βρείτε αριθμητική τιμή για τη χρονική διαφορά πτώσης των δύο σφαιρών.

(β_4) Έστω το πιστόλι έχει μια πολύ μικρή κλίση και η v_0 σχηματίζει πολύ μικρή γωνία $\theta = 0.1^\circ$ με την οριζόντια. Βρείτε την χρονική διαφορά πτώσης των δύο σφαιρών.

Τελικά παίζει ρόλο η αντίσταση;

Θεωρήστε $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$.

Δίνεται το ανάπτυγμα $(1+\epsilon)^n \approx 1 + n\epsilon$ για $|\epsilon| \ll 1$.

3.7.4 Πύραυλος μάζας M_0 (χωρίς τα καυσαέρια) είναι φορτωμένος με καυσαέρια μάζας m_κ τα οποία εκτοξεύονται με σταθερή σχετική ταχύτητα $v_{\sigma\chi}$ προς τα πίσω και σταθερό ρυθμό $\dot{m} = -\lambda$. Αν ξεκινήσει από ακινησία και κινείται κατακόρυφα μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο g της Γης, ποια η ταχύτητα που αποκτά όταν μένει από καύσιμα;

3.7.5 Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε την κίνηση κάποιου μετεωρίτη στην ατμόσφαιρα της Γης. Θεωρούμε τη Γη και την ατμόσφαιρά της ακίνητη και την κίνηση του μετεωρίτη κατακόρυφη. Αγνοούμε το βάρος, αλλά λαμβάνουμε υπόψη την αντίσταση $F = \frac{1}{2}C_D S v^2 \rho$, με C_D σταθερά, S την επιφάνεια του μετεωρίτη, $v = \dot{z}$ την ταχύτητά του (με $v < 0$) και $\rho = \rho_0 e^{-z/H}$ την πυκνότητα της ατμόσφαιρας που είναι συνάρτηση του ύψους z (ρ_0 είναι η πυκνότητα στην επιφάνεια της Γης και H σταθερό μήκος που εκφράζει την κλίμακα ύψους). Λαμβάνουμε επίσης υπόψη ότι ο μετεωρίτης εξαχνώνεται οπότε η μάζα του και η επιφάνειά του μειώνονται με το χρόνο.
(α) Δείξτε ότι αν η μάζα που εξαχνώνεται έχει μηδενική ταχύτητα ως προς τον μετεωρίτη η εξίσωση κίνησης είναι $m\frac{dv}{dt} = F$ ή ισοδύναμα $\frac{dv}{dt} = \frac{\lambda}{H}v^2 e^{-z/H}$ όπου $\lambda = \frac{C_D S H \rho_0}{2m}$.
Υπόδειξη: Δεν είναι τετριμμένη εφαρμογή του 2$^{\text{ου}}$ νόμου Νεύτωνα στη μορφή $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ αφού έχουμε σώμα μεταβλητής μάζας.
(β) Αν κατά την εξάχνωση η μάζα και η επιφάνεια μειώνονται αλλά ο λόγος τους παραμένει σταθερός, βρείτε τη σχέση ταχύτητας–ύψους.
Θεωρήστε ότι η ταχύτητα του μετεωρίτη όταν εισέρχεται στην ατμόσφαιρα της Γης, δηλ. για $z \to \infty$, είναι v_∞ (< 0).
(γ) Ποια η ταχύτητα και η επιβράδυνση συναρτήσει της πυκνότητας της ατμόσφαιρας;
Ποια είναι η ταχύτητα τη στιγμή που η επιβράδυνση είναι μέγιστη και πόση είναι αυτή η μέγιστη τιμή; Εφαρμόστε για $C_D S/m = 0.005\,\mathrm{m^2/kg}$, $H = 8000\,\mathrm{m}$, $\rho_0 = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}$, $v_\infty = -14000\,\mathrm{m/s}$. Συγκρίνετε την $a_{\max}$ με την επιτάχυνση της βαρύτητας.
(δ) Έστω η ελάττωση της μάζας λόγω εξάχνωσης καθορίζεται από την εξίσωση $H^\star \frac{dm}{dt} = \frac{1}{2}C_H S v^3 \rho$, όπου $\frac{C_H}{C_D H^\star} = 5\times 10^{-8}\,\mathrm{s^2/m^2}$. Ποια η μάζα του μετεωρίτη συναρτήσει της ταχύτητάς του αν αρχικά (όταν $v = v_\infty$) είναι $m = m_\infty = 150\,\mathrm{kg}$;

3.7.6 Επιλύστε διαταρακτικά το πρόβλημα του παραδείγματος 3.8.

3.7.7 Αν πετάξουμε προς τα πάνω σώμα αμελητέας επιφάνειας, οπότε και η αντίσταση αέρα είναι αμελητέα, αυτό φτάνει σε ύψος h_0 πάνω από το σημείο εκκίνησης. Αν πετάξουμε με την ίδια αρχική ταχύτητα v_0 άλλο σώμα μάζας m στο οποίο ασκείται αντίσταση λv^2 (me λ σταθερά), αυτό φτάνει σε ύψος h. Δείξτε ότι στο όριο της μικρής αντίστασης είναι $\frac{1}{h} \approx \frac{1}{h_0} + \frac{\lambda}{m}$.
Δίνεται το ανάπτυγμα $\frac{\epsilon}{\ln(1+\epsilon)} = 1 + \frac{\epsilon}{2} + O(\epsilon^2)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΝΟΜΟΙ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ

Περίληψη
Το κεφάλαιο αυτό αφορά διατηρήσιμες ποσότητες που προκύπτουν από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την κίνηση υλικού σημείου. Συγκεκριμένα η ορμή, η στροφορμή και η ενέργεια είναι ποσότητες που υπό προϋποθέσεις διατηρούνται. Όποτε υπάρχουν διατηρούμενες ποσότητες αποτελούν ολοκληρώματα των εξισώσεων κίνησης και αντικαθιστούν κάποιες από τις εξισώσεις αυτές. Υπό αυτή την έννοια βοηθούν στην επίλυση του πλήρους προβλήματος, αλλά ακόμα και αν αυτό δεν είναι εφικτό, διευκολύνουν στο να κατανοήσουμε και να περιγράψουμε έστω ποιοτικά την κίνηση του υλικού σημείου.
Προαπαιτούμενη γνώση: Οι βασικοί νόμοι της Νευτώνειας Μηχανικής. Επίσης χρησιμοποιούνται έννοιες διανυσματικής ανάλυσης όπως κλίση, στροβιλισμός και επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικού πεδίου.

4.1 Διατήρηση ορμής

Όπως γνωρίζουμε από τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα αν σε σώμα δεν ασκείται δύναμη, δηλ. $\boldsymbol{F} = 0$ (πάντα ως δύναμη $\boldsymbol{F}$ εδώ θα εννοούμε την συνισταμένη των δυνάμεων), η ορμή του παραμένει σταθερή, δηλ. $\boldsymbol{p} =$ σταθερή. Η σχέση αυτή μπορεί να ιδωθεί και σαν ολοκλήρωμα του νόμου του Νεύτωνα (όποτε δεν διευκρινίζεται για ποιο νόμο Νεύτωνα μιλάμε θα εννοούμε τον δεύτερο) και μαθηματικά τον αντικαθιστά όταν ισχύει $\boldsymbol{F} = 0$. Για σημειακά σώματα είναι $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, επομένως η ταχύτητα μένει σταθερή όταν δεν ασκείται δύναμη, κάτι που αντικαθιστά τη σχέση $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$.

Πέρα από αυτή την τετριμμένη περίπτωση όπου δεν ασκείται δύναμη, υπάρχουν περιπτώσεις μερικής διατήρησης ορμής, αν η δύναμη είναι μηδενική σε κάποια συγκεκριμένη κατεύθυνση. Αν π.χ. ισχύει $F_x = 0$ η $\hat{x}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$ ολοκληρώνεται και δίνει ότι η $\hat{x}$ συνιστώσα της ορμής διατηρείται. Η σχέση $p_x =$ σταθερή, ή $v_x =$ σταθερή για σημειακό σώμα, είναι ισοδύναμη και αντικαθιστά την $\hat{x}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα.

Παράδειγμα τέτοιας μερικής διατήρησης αποτελεί η πλάγια βολή σημειακού σώματος χωρίς αντίσταση. Η οριζόντια δύναμη είναι μηδενική, κάτι που συνεπάγεται την διατήρηση της οριζόντιας συνιστώσας της ορμής, άρα και της οριζόντιας ταχύτητας.

4.2 Διατήρηση στροφορμής

Η στροφορμή ορίζεται πάντα ως προς κάποιο σημείο O που θεωρούμε αρχή του διανύσματος θέσης και είναι $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$. Η χρονική της παράγωγος ισούται με τη ροπή της δύναμης, όπως προκύπτει άμεσα από $\dot{\boldsymbol{L}} = \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ (ο πρώτος όρος είναι μηδενικός για σημειακά σώματα όπου $\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{r}}$). Όταν λοιπόν δεν υπάρχει ροπή η στροφορμή είναι σταθερή.
Σε περιπτώσεις όπου η στροφορμή είναι σταθερή μία άμεση συνέπεια είναι ότι η κίνηση είναι επίπεδη. Αυτό φαίνεται αν παρατηρήσουμε ότι η στροφορμή είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που σχηματίζουν η θέση $\boldsymbol{r}$ και η ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ (το οποίο συμπεριλαμβάνει την αρχή O). Αν είναι σταθερή σημαίνει ότι το επίπεδο αυτό είναι σταθερό. Ένας άλλος τρόπος να δείξουμε ότι η κίνηση είναι επίπεδη είναι να παρατηρήσουμε ότι η σχέση $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{r} = 0$ (που πάντα ισχύει λόγω του ορισμού της στροφορμής σαν εξωτερικό γινόμενο) στην περίπτωση που $\boldsymbol{L} =$ σταθερή αποτελεί εξίσωση επιπέδου κάθετου στο σταθερό διάνυσμα $\boldsymbol{L}$ που περνά από την αρχή των αξόνων[1] (π.χ. σε καρτεσιανές γράφεται $L_x x + L_y y + L_z z =$ σταθερά).

Πέρα από διατήρηση της ολικής στροφορμής υπάρχουν και περιπτώσεις μερικής διατήρησης στροφορμής, όταν δηλ. κάποια συνιστώσα της στροφορμής διατηρείται. Ιδιαίτερη σημασία έχει η περίπτωση $L_z =$ σταθερά, η οποία εμφανίζεται συχνά. (Ο άξονας $\hat{z}$ δεν έχει κάποια ξεχωριστή ιδιότητα σε σχέση με κάθε άλλο άξονα. Απλά η διατήρηση της στροφορμής σε κάποια κατεύθυνση σχετίζεται όπως θα δούμε παρακάτω με στροφές και την αζιμουθιακή ταχύτητα γύρω από τον άξονα που ορίζει αυτή η κατεύθυνση και περνά από την αρχή του συστήματος. Αν ο άξονας είναι ο $\hat{z}$ έχουμε ήδη την γωνιακή συντεταγμένη ϕ στις κυλινδρικές, σφαιρικές και πολικές συντεταγμένες που περιγράφει αυτές τις στροφές. Σε κάθε άλλη περίπτωση ή πρέπει να ορίσουμε αντίστοιχη γωνία ή να στέψουμε το σύστημα αξόνων ώστε η συνιστώσα της στροφορμής που διατηρείται να είναι η $\hat{z}$ στο νέο σύστημα.)
Η L_z διατηρείται όταν η $\hat{z}$ συνιστώσα της ροπής είναι μηδενική, δηλ. όταν δεν υπάρχει αζιμουθιακή συνιστώσα της δύναμης (δύναμη που προσπαθεί να στρέψει το σώμα, υπό την έννοια να το σπρώξει έξω από το μεσημβρινό ημιεπίπεδο που βρίσκεται). Η μαθηματική συνεπαγωγή είναι $L_z =$ σταθερή $\Leftrightarrow F_\phi = 0$. (Εννοείται η F_ϕ είναι η συνιστώσα της δύναμης σε ένα σύστημα συντεταγμένων που περιλαμβάνει την γωνία ϕ, δηλ. σε κυλινδρικές ή σφαιρικές ή πολικές.)
Η απόδειξη μπορεί να γίνει με βάση τη σχέση $\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$.
Η $\hat{z}$ συνιστώσα της, υπολογίζοντας το εξωτερικό γινόμενο σε κυλινδρικές μέσω ορίζουσας $\begin{vmatrix} \hat{\varpi} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ \varpi & 0 & z \\ F_\varpi & F_\phi & F_z \end{vmatrix}$, γράφεται $L_z = \varpi F_\phi$. Σταθερή L_z σημαίνει μηδενική F_ϕ.
Αλλιώς: Η $\hat{z}$ συνιστώσα της $\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ δίνει $\dot{L}_z = \hat{z} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}) = (\hat{z} \times \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{F}$. Το εξωτερικό γινόμενο της παρένθεσης υπολογίζεται είτε από τον ορισμό του σαν $r \sin\theta\hat{\phi}$ (γινόμενο μέτρων επί ημίτονο της γωνίας μεταξύ των διανυσμάτων και φορά από κανόνα δεξιού χεριού), είτε αντικαθιστώντας $\boldsymbol{r} = \varpi\hat{\varpi} + z\hat{z}$ και προκύπτει τελικά $\dot{L}_z = \varpi\hat{\phi} \cdot \boldsymbol{F} = \varpi F_\phi$.
Ένας τρίτος τρόπος βασίζεται στην έκφραση της επιτάχυνσης σε κυλινδρικές, για την οποία έχουμε ήδη πει ότι ισχύει $a_\phi = \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{L_z}{m}\right)$, δηλ. $m\varpi a_\phi = \dot{L}_z \Leftrightarrow \varpi F_\phi = \dot{L}_z$.

4.3 Έργο δύναμης

Η επόμενη ποσότητα για την οποία θα μιλήσουμε είναι η ενέργεια. Πριν από αυτό χρειάζεται να θυμηθούμε την έννοια του έργου κάποιας δύναμης $\boldsymbol{F}$ που ασκείται στο σώμα (όχι απαραίτητα της συνισταμένης). Για μία

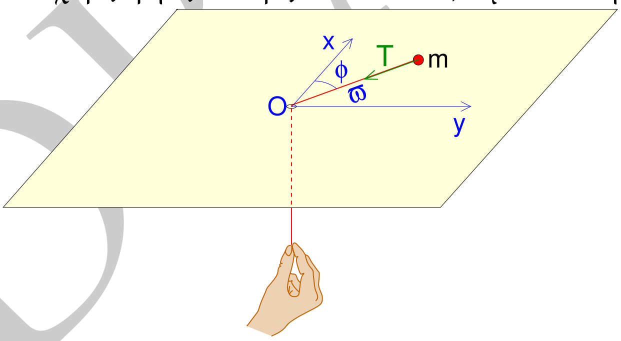
[1] Η γενική εξίσωση που περιγράφει επίπεδο κάθετο σε διάνυσμα $\boldsymbol{A}$ που περνά από σημείο με θέση $\boldsymbol{B}$ είναι $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{B}) = 0$.

μετατόπιση του σώματος από τη θέση 1 στη θέση 2 το έργο της $\boldsymbol{F}$ ορίζεται σαν το ολοκλήρωμα πάνω στην τροχιά $W_{1\to 2} = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ ($d\boldsymbol{r}$ είναι η στοιχειώδης διανυσματική μετατόπιση). Εκφράζει την ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ του σώματος και αυτού που ασκεί την δύναμη $\boldsymbol{F}$. Πιο συγκεκριμένα εκφράζει την ενέργεια που μέσω της δύναμης $\boldsymbol{F}$ προστίθεται στο σώμα, με αλγεβρική έννοια, δηλ. αν το έργο είναι αρνητικό τότε αφαιρείται ενέργεια από το σώμα. Το αν το έργο είναι θετικό ή αρνητικό σχετίζεται με το αν η γωνία μεταξύ δύναμης και μετατόπισης (ή ταχύτητας) είναι οξεία ή αμβλεία.

Η ενέργεια του σώματος που συμμετέχει σε αυτή την ανταλλαγή είναι αυτή που ορίζουμε σαν κινητική, κάτι που γίνεται κατανοητό μέσω του θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας: Το συνολικό έργο των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σημειακό σώμα ισούται με την μεταβολή της κινητικής του ενέργειας. Για να αποδείξουμε αυτή τη σχέση, ορίζοντας ταυτόχρονα την κινητική ενέργεια σημειακού σώματος, εκφράζουμε το έργο της συνισταμένης των δυνάμεων (που είναι βέβαια ίσο με το άθροισμα των έργων των επιμέρους δυνάμεων) σαν $W_{1\to 2} = \int_1^2 \Sigma\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_1^2 m\dot{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v}\, dt$ αφενός χρησιμοποιώντας το νόμο Νεύτωνα και αφετέρου γράφοντας την στοιχειώδη μετατόπιση σαν $\boldsymbol{v}\, dt$. Η ολοκληρωτέα γράφεται τέλεια χρονική παράγωγος του μεγέθους $T = \frac{mv^2}{2}$ που ορίζουμε σαν κινητική ενέργεια, οπότε καταλήγουμε στην $W_{1\to 2} = \int_1^2 dT = [T]_1^2 = T_2 - T_1$. Το θεώρημα γράφεται συνήθως σαν $T_2 = T_1 + W_{1\to 2}$ και σημαίνει ότι η κινητική ενέργεια του σώματος στη νέα θέση είναι όση είχε στην προηγούμενη συν το άθροισμα των έργων των δυνάμεων που του ασκούνται (που μπορεί να είναι θετικά ή αρνητικά).

Μία χρήσιμη έννοια που σχετίζεται με το έργο είναι η ισχύς, η οποία ορίζεται σαν την ενέργεια ανά χρόνο που δίνει στο σώμα κάποια δύναμη $\boldsymbol{F}$. Είναι ίση με το εσωτερικό γινόμενο της δύναμης με την ταχύτητα αφού $\frac{dW}{dt} = \frac{\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$. Το πρόσημό της επίσης εκφράζει αν προστίθεται ενέργεια στο σώμα (αν είναι θετικό) ή αφαιρείται ενέργεια από το σώμα (αν είναι αρνητικό).

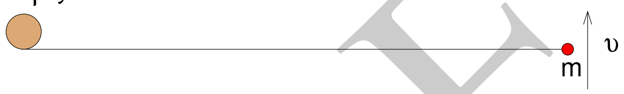
Παράδειγμα 4.1:
Το σώμα του σχήματος κινείται χωρίς τριβές στο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο αβαρές και μη εκτατό νήμα.



Αρχικά το σώμα εκτελεί κυκλική τροχιά ακτίνας ϖ_1 με γωνιακή ταχύτητα ω_1. Έστω τραβάμε το νήμα ώστε η τροχιά να καταλήξει πάλι κυκλική αλλά μικρότερης ακτίνας ϖ_2.
(α) Ποια η νέα ταχύτητα;
(β) Ποια η αύξηση στην ενέργεια του σώματος και που οφείλεται;
Λύση:
(α) Η στροφορμή $L = m\varpi v_\phi = m\varpi^2\dot{\phi}$ διατηρείται γιατί δεν υπάρχει δύναμη στην αζιμουθιακή διεύθυνση. Άρα $m\varpi_1^2\omega_1 = m\varpi_2^2\omega_2$ από την οποία προκύπτει η νέα γωνιακή ταχύτητα $\omega_2 = \omega_1\frac{\varpi_1^2}{\varpi_2^2}$ και η νέα γραμμική ταχύτητα $v_2 = \omega_2\varpi_2 = \omega_1\varpi_1\frac{\varpi_1}{\varpi_2}$.
(β) Το μέτρο της νέας ταχύτητας είναι μεγαλύτερο της αρχικής $\omega_1\varpi_1$ αφού $\varpi_1 > \varpi_2$. Επομένως η κινητική ενέργεια $E_2 = \frac{mv_2^2}{2} = \frac{L^2}{2m\varpi_2^2}$ είναι μεγαλύτερη της αρχικής $E_1 = \frac{L^2}{2m\varpi_1^2}$.
Η αύξηση της ενέργειας οφείλεται στο έργο της τάσης του νήματος T (που είναι ίση κατά μέτρο με τη δύναμη

που ασκεί το χέρι στο άλλο άκρο του νήματος). Παρότι η T είναι κάθετη στην ταχύτητα στην αρχική και στην τελική κατάσταση, κατά την μετάβαση του σώματος στην τροχιά μικρότερης ακτίνας υπάρχει ακτινική συνιστώσα της μετατόπισης που είναι ομόρροπη της T, επομένως το έργο της T είναι θετικό και ίσο με $E_2 - E_1$. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί αυστηρά με βάση το νόμο Νεύτωνα του οποίου οι συνιστώσες στην ακτινική και αζιμουθιακή διεύθυνση είναι αντίστοιχα $ma_\varpi = -T \Leftrightarrow m(\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2) = -T$ και $ma_\phi = 0 \Leftrightarrow m\varpi^2\dot{\phi} = L =$ σταθερά. Απαλείφοντας την $\dot{\phi}$ βρίσκουμε $T = \frac{L^2}{m\varpi^3} - m\ddot{\varpi}$ και άρα το έργο της τάσης είναι $W_T = \int_1^2 \boldsymbol{T} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_1^2 (-T\hat{\varpi}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_1^2 (-T) d\varpi = -\int_1^2 \frac{L^2}{m\varpi^3} d\varpi + \int_1^2 m\ddot{\varpi}\, d\varpi$. Το πρώτο ολοκλήρωμα δίνει την $E_2 - E_1$ ενώ το δεύτερο είναι μηδενικό γιατί $\int_1^2 m\ddot{\varpi}\, d\varpi = \int_1^2 m\ddot{\varpi}\dot{\varpi}\, dt = \int_1^2 d\frac{m\dot{\varpi}^2}{2} = \left[\frac{m\dot{\varpi}^2}{2}\right]_1^2 = 0$ γιατί στις ακραίες θέσεις η ακτινική ταχύτητα είναι μηδενική.

Παράδειγμα 4.2:
Το σώμα του σχήματος είναι δεμένο σε κατακόρυφο πάσσαλο μέσω αβαρούς, μη εκτατού νήματος και μπορεί να κινείται χωρίς τριβές στο οριζόντιο επίπεδο.

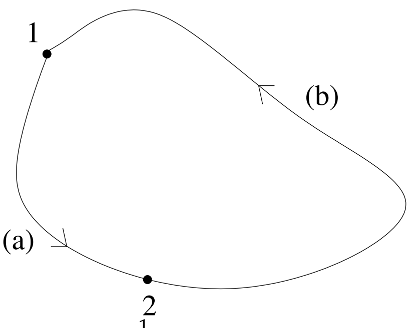


Αρχικά δίνουμε στο σώμα μία ταχύτητα v κάθετα στο νήμα. Κάποιος υποστηρίζει ότι καθώς το νήμα θα τυλίγεται και η απόσταση από το κέντρο θα μειώνεται, λόγω διατήρησης στροφορμής η ταχύτητα θα αυξάνεται κατά μέτρο. Κάποιος άλλος υποστηρίζει ότι αφού δεν υπάρχουν τριβές το μέτρο της ταχύτητας θα μένει σταθερό καθώς το νήμα τυλίγεται. Ποιος έχει δίκιο και γιατί;
Λύση:
Ο πρώτος δεν έχει δίκιο γιατί αν υπολογίσουμε την στροφορμή και τις ροπές των δυνάμεων ως προς τον άξονα του πασσάλου η ροπή της τάσης του νήματος δεν είναι μηδενική (ο φορέας της $\boldsymbol{T}$ δεν περνά από τον άξονα του πασσάλου). Θα είχε δίκιο στην ιδεατή περίπτωση που η ακτίνα του πασσάλου ήταν μηδενική. Τότε όμως η απόσταση του σώματος από τον πάσσαλο δεν θα άλλαζε καθώς το νήμα θα τυλιγόταν, άρα δεν θα άλλαζε και το μέτρο της ταχύτητας.
Ο δεύτερος έχει δίκιο, πράγματι καμία δύναμη που ασκείται στο σώμα δεν παράγει έργο.

4.4 Συντηρητικές δυνάμεις και δυναμική ενέργεια

Έστω δύναμη που είναι συνάρτηση της θέσης $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$. Το έργο της για μετατόπιση από σημείο 1 σε σημείο 2 γενικά εξαρτάται όχι μόνο από τα ακραία σημεία, αλλά και από τη διαδρομή. Υπάρχει όμως μία υποκατηγορία δυνάμεων της μορφής $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ για τις οποίες το έργο εξαρτάται μόνο από τα ακραία σημεία. Αυτές λέγονται συντηρητικές. Ένας ορισμός αυτών των δυνάμεων είναι λοιπόν ότι για οποιαδήποτε σημεία 1 και 2 το έργο $\int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ είναι ανεξάρτητο της διαδρομής.

Ένας ισοδύναμος ορισμός είναι ότι για οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή το έργο είναι μηδέν, δηλ. $\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$. Η απόδειξη γίνεται εύκολα αν επιλέξουμε δύο σημεία 1, 2 πάνω στη διαδρομή και τη χωρίσουμε σε δύο επιμέρους, τις οποίες ονομάζουμε (a) και (b), όπως στο σχήμα.



Θα είναι τότε $\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{1 \text{ μέσω (a)}}^{2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{2 \text{ μέσω (b)}}^{1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$. Αν αλλάξουμε φορά διαγραφής στη δεύτερη διαδρομή αλλάζει το πρόσημο του έργου και έχουμε $\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{1 \text{ μέσω (a)}}^{2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} - \int_{1 \text{ μέσω (b)}}^{2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$ γιατί το έργο μεταξύ των σημείων 1 και 2 δεν εξαρτάται από τη διαδρομή αν η δύναμη είναι συντηρητική.
Ο όρος συντηρητική δύναμη συνδέεται περισσότερο με αυτή την ιδιότητα, η οποία σημαίνει ότι σε μία κλειστή διαδρομή δεν δίνει ούτε παίρνει ενέργεια από το σώμα (παρότι σε επιμέρους μέρη της διαδρομής το έργο μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό, το άθροισμα είναι πάντα μηδενικό).

Μία τρίτη ισοδύναμη ιδιότητα που μπορεί επίσης να θεωρηθεί ορισμός των συντηρητικών δυνάμεων είναι ότι ο στροβιλισμός τους πρέπει να είναι μηδενικός, δηλ. να ισχύει σε κάθε σημείο $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0$.
Η απόδειξη βασίζεται στο θεώρημα Stokes σύμφωνα με το οποίο το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μίας διανυσματικής συνάρτησης σε μία κλειστή καμπύλη είναι ίσο με τη ροή του στροβιλισμού της διανυσματικής συνάρτησης που περνά από την επιφάνεια που έχει σύνορο την καμπύλη, δηλ. $\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{a}$ (το διάνυσμα επιφάνειας έχει μέτρο ίσο με την επιφάνεια και φορά κάθετη στην επιφάνεια που συνδέεται με την φορά διαγραφής στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία: αν τα δάχτυλα του δεξιού χεριού δείχνουν τη φορά διαγραφής στο σύνορο ο αντίχειρας δείχνει τη φορά του διανύσματος της επιφάνειας). Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι μηδενικό για συντηρητικές δυνάμεις, άρα και η ροή του στροβιλισμού είναι μηδενική. Επειδή αυτό ισχύει για όλες τις κλειστές καμπύλες, άρα και για όλες τις επιφάνειες, επιλέγοντας επιφάνειες διαφόρων προσανατολισμών και αρκούντως μικρής έκτασης ώστε ο στροβιλισμός να μπορεί να θεωρηθεί σταθερός, συμπεραίνουμε ότι σε κάθε σημείο ισχύει $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0$.

Μία τέταρτη ισοδύναμη ιδιότητα των συντηρητικών δυνάμεων είναι ότι μπορούν να γραφούν σαν κλίση βαθμωτής συνάρτησης, δηλ. $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$ όπου $V = V(\boldsymbol{r})$ είναι η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας (θα φανεί σύντομα γιατί).
Αν ισχύει $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$ τότε άμεσα βλέπουμε ότι ισχύει και $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0$ (γιατί ο στροβιλισμός μίας κλίσης είναι πάντα μηδέν), άρα η δύναμη είναι συντηρητική. Ισχύει και το αντίστροφο, το οποίο αναφέρουμε χωρίς απόδειξη ότι βασίζεται στο θεώρημα Helmholtz: αν ο στροβιλισμός μιας διανυσματικής συνάρτησης $\boldsymbol{F}$ είναι μηδενικός, υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση τέτοια ώστε η $\boldsymbol{F}$ να γράφεται $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$. Μάλιστα η βαθμωτή αυτή συνάρτηση δεν είναι μοναδική, γιατί αν προσθέσουμε μία οποιαδήποτε σταθερά στην V η δύναμη θα προκύψει ίδια. Συνήθως διαλέγουμε τη σταθερά ώστε η δυναμική ενέργεια να μηδενίζεται στο άπειρο, αλλά αυτό δεν είναι απαραίτητο.
Η κλίση μίας βαθμωτής συνάρτησης V είναι ένα διάνυσμα κάθετο στις επιφάνειες όπου η συνάρτηση είναι σταθερή (ισοϋψείς της V ή ισοδυναμικές) και με φορά από μικρές σε μεγάλες τιμές της συνάρτησης. Και οι δύο αυτές ιδιότητες προκύπτουν από την σχέση $dV = \boldsymbol{\nabla} V \cdot d\boldsymbol{r}$ (που ισοδυναμεί σε καρτεσιανές με τη γνωστή σχέση για το διαφορικό της συνάρτησης $dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$). Αν επιλέξουμε $d\boldsymbol{r}$ πάνω στις ισοδυναμικές βλέπουμε ότι το διάνυσμα $\boldsymbol{\nabla} V$ είναι κάθετο αφού το εσωτερικό γινόμενο είναι μηδενικό, ενώ αν επιλέξουμε $d\boldsymbol{r}$ κάθετα στις ισοδυναμικές με φορά από μικρά σε μεγάλα V βλέπουμε ότι το $\boldsymbol{\nabla} V$ είναι ομόρροπο αφού το εσωτερικό γινόμενο είναι θετικό. Η γραφή της δύναμης σαν $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$ σημαίνει λοιπόν ότι μπορούμε να σκεφτούμε τη διεύθυνσή της κάθετη στις ισοδυναμικές, με φορά από μεγάλες προς μικρές τιμές της συνάρτησης V (λόγω του αρνητικού πρόσημου στη σχέση $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$, το οποίο είναι θέμα σύμβασης). Με άλλα

λόγια κάθε συντηρητική δύναμη σπρώχνει τα σώματα σε σημεία του χώρου με μικρότερη V, δηλ. δρα έχοντας στόχο τη μείωση της δυναμικής ενέργειας.

Έχουμε λοιπόν τέσσερις ισοδύναμους ορισμούς για τις συντηρητικές δυνάμεις. Πιο χρήσιμος για να ελέγχουμε άμεσα αν μία δύναμη είναι συντηρητική είναι ο $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0$. Αν όμως θέλουμε να βρούμε και τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας τότε μπορούμε κατευθείαν να ψάξουμε για συνάρτηση V που ικανοποιεί τη σχέση $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$ (γνωρίζοντας την $\boldsymbol{F}$ σαν συνάρτηση της θέσης να ολοκληρώσουμε τις συνιστώσες της προηγούμενης εξίσωσης και να δείξουμε ότι υπάρχει συνάρτηση V που τις ικανοποιεί όλες). Η εύρεση συνάρτησης V είναι ταυτόχρονα απόδειξη ότι η δύναμη είναι συντηρητική.

Η αντίστροφη της σχέσης $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$ είναι $V = -\int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ (προκύπτει ολοκληρώνοντας την $dV = \boldsymbol{\nabla} V \cdot d\boldsymbol{r}$). Η σχέση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της V (κάνοντας την ολοκλήρωση από κάποιο σημείο με δεδομένη τιμή της V μέχρι το εκάστοτε σημείο $\boldsymbol{r}$, ακολουθώντας όποια διαδρομή θέλουμε) μόνο όμως αν έχουμε δείξει ότι η $\boldsymbol{F}$ είναι συντηρητική. Το ότι δίνει την V σαν αόριστο ολοκλήρωμα δείχνει επίσης ότι υπάρχει μία αυθαίρετη προσθετική σταθερά στη δυναμική ενέργεια.

Συνήθως ασχολούμαστε με δυνάμεις που είναι συντηρητικές σε όλο το χώρο, δηλ. ισχύει $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0$ και ορίζεται δυναμική ενέργεια παντού. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπου η σχέση $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0$ ισχύει μόνο σε ένα υποχώρο. Αν ο υποχώρος αυτός είναι απλά συνεκτικός, δηλ. οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη μέσα σε αυτόν μπορεί να συρρικνωθεί σε σημείο μένοντας συνεχώς εντός του υποχώρου τότε πάλι μπορούμε να ορίσουμε δυναμική ενέργεια και να θεωρούμε τη δύναμη συντηρητική. (Στην περίπτωση αυτή το έργο της $\boldsymbol{F}$ σε κάθε κλειστή καμπύλη είναι μηδενικό γιατί μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Stokes σε επιφάνεια που είναι ολόκληρη εντός του υποχώρου, στην οποία η ροή του στροβιλισμού είναι μηδενική.)

4.5 Διατήρηση ενέργειας

Για κάθε συντηρητική δύναμη το έργο για μετακίνηση από σημείο 1 σε σημείο 2 είναι $W_{1\to 2} = \int_1^2 (-\boldsymbol{\nabla} V) \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_1^2 dV = V_1 - V_2$, δηλ. ίσο με τη διαφορά αρχικής μείον τελικής δυναμικής ενέργειας. Αν σε ένα σώμα ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις τότε και η $\Sigma\boldsymbol{F}$ είναι συντηρητική, έστω με δυναμική ενέργεια V. Το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας γράφεται τότε $T_2 = T_1 + (V_1 - V_2) \Leftrightarrow T_2 + V_2 = T_1 + V_1$. Προέκυψε λοιπόν ότι σε περίπτωση που στο σώμα ασκούνται συντηρητικές δυνάμεις, το άθροισμα της T που έχουμε ονομάσει κινητική ενέργεια με την V που έχουμε ονομάσει δυναμική ενέργειας, παραμένει σταθερό. Το άθροισμα κινητική και δυναμική ορίζεται σαν μηχανική ενέργεια $T + V = E$ και όπως δείξαμε παραμένει σταθερή αν στο σώμα δρουν μόνο συντηρητικές δυνάμεις.

Η αυθαιρεσία προσθετικής σταθεράς που υπάρχει στην δυναμική ενέργεια μεταφέρεται και στη μηχανική ενέργεια. Επειδή όμως μας ενδιαφέρουν μεταβολές που συμβαίνουν σε μετακινήσεις σωμάτων αυτή η αυθαίρετη σταθερά δεν επηρεάζει την φυσική σημασία των αποτελεσμάτων. Σε μία μετακίνηση η δυναμική ενέργεια μειώνεται κατά ένα ποσό και η κινητική αυξάνεται κατά το ίδιο ποσό (πάντα αλγεβρικά, δηλ. μπορεί να αυξάνεται η δυναμική και να μειώνεται η κινητική), ώστε το άθροισμα να μείνει σταθερό.

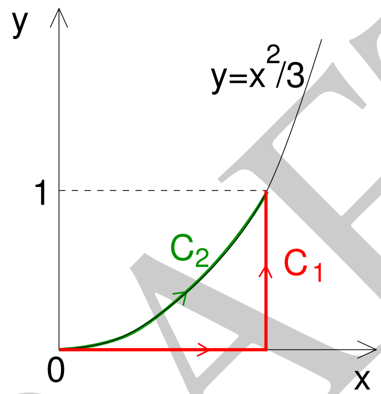
Η τιμή της δυναμικής ενέργειας θα μπορούσαμε να πούμε ότι δείχνει την ικανότητα παραγωγής έργου (και μεταφορά σε άλλη μορφή, π.χ. αύξηση της κινητικής ενέργειας σώματος), αλλά μόνο με σχετική έννοια.

Η διατήρηση ενέργειας μπορεί να αποδειχθεί άμεσα από το νόμο Νεύτωνα, πολλαπλασιάζοντάς τον με την ταχύτητα. Ο νόμος Νεύτωνα για σημειακό σώμα στο οποίο ασκούνται συντηρητικές δυνάμεις είναι $m\dot{\boldsymbol{v}} = -\boldsymbol{\nabla} V$ Πολλαπλασιάζονας με την ταχύτητα έχουμε $m\boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} = -\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} V$. Το αριστερό μέλος γράφεται $\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ και το δεξιό, με $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ και $d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\nabla} V = dV$, γράφεται $-\frac{dV}{dt}$. Έτσι προκύπτει $\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2} + V\right) = 0$ και ολοκληρώνοντας η διατήρηση της ενέργειας $\frac{mv^2}{2} + V = \mathrm{E} =$ σταθερά.

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου μία δύναμη γράφεται $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$, αλλά η δυναμική ενέργεια έχει μορφή $V =$

$V(\boldsymbol{r},t)$, δηλ. έχει άμεση εξάρτηση από το χρόνο (πάντα υπάρχει έμμεση εξάρτηση από το χρόνο λόγω της κίνησης ενός σώματος που συνεπάγεται αλλαγή θέσης, άρα και κάθε συνάρτησης της θέσης, αλλά όταν η συνάρτηση V έχει άμεση χρονοεξάρτηση αυτή είναι ένας επιπλέον λόγος αλλαγής). Στις περιπτώσεις αυτές δεν ισχύει η διατήρηση ενέργειας. Αντί αυτής, ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας είναι $\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}+V\right) = m\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}} + \frac{dV}{dt}$. Αντικαθιστώντας $m\dot{\boldsymbol{v}} = -\boldsymbol{\nabla}F$ από το νόμο Νεύτωνα και $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}V + \frac{\partial V}{\partial t}$ (ο τελευταίος όρος είναι η διαφορά σε σχέση με την περίπτωση χρονοανεξάρτητης δύναμης) προκύπτει η σχέση που αντικαθιστά την διατήρηση ενέργειας $\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}+V\right) = \frac{\partial V}{\partial t}$.

Παράδειγμα 4.3:
Έστω δύναμη $\boldsymbol{F} = -x\hat{x} + y\hat{y}$.
(α) Ποιο το έργο της για τις τροχιές C_1, C_2 του σχήματος;
(β) Είναι συντηρητική;



Λύση:

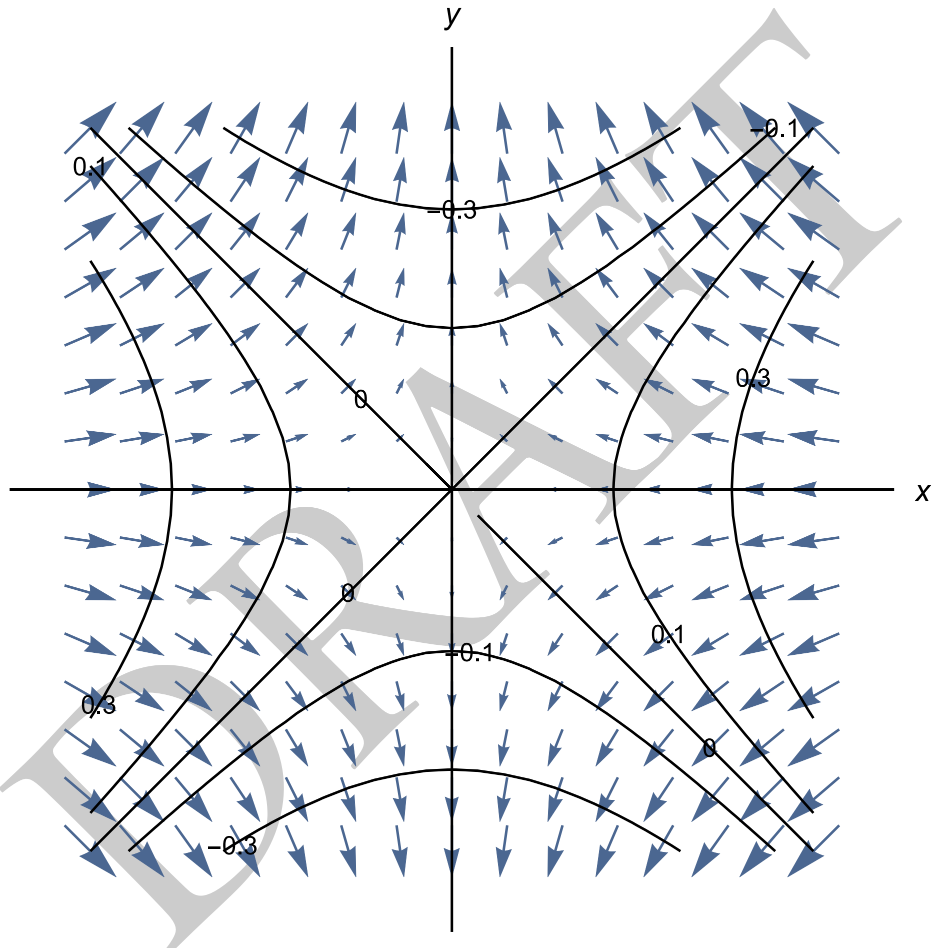
(α) Η τροχιά C_1 αποτελείται από δύο ευθύγραμμα τμήματα και άρα το έργο είναι $W_1 = \int_{(0,0)}^{(\sqrt{3},0)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{(\sqrt{3},0)}^{(\sqrt{3},1)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$. Για το πρώτο μέρος πάνω στον άξονα x μπορεί να επιλεγεί σαν παράμετρος της τροχιάς η συντεταγμένη x. Για το μέρος αυτό $x = 0 \to \sqrt{3}$, $y = 0$, $d\boldsymbol{r} = dx\,\hat{x}$, $\boldsymbol{F} = -x\hat{x}$ και $\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -x\,dx$. Για το δεύτερο μέρος παράλληλα στον άξονα y μπορεί να επιλεγεί σαν παράμετρος της τροχιάς η συντεταγμένη y. Για το μέρος αυτό $x = \sqrt{3}$, $y = 0 \to 1$, $d\boldsymbol{r} = dy\,\hat{y}$, $\boldsymbol{F} = -\sqrt{3}\hat{x} + y\hat{y}$ και $\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = y\,dy$. Άρα $W_1 = \int_0^{\sqrt{3}}(-x\,dx) + \int_0^1 y\,dy = -1$.
Για την τροχιά C_2 μπορεί να επιλεγεί σαν παράμετρος η συντεταγμένη x, οπότε $x = 0 \to \sqrt{3}$, $y = x^2/3$, $dy = (2x/3)dx$, $d\boldsymbol{r} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} = dx\,\hat{x} + (2x/3)dx\,\hat{y}$, $\boldsymbol{F} = -x\hat{x} + (x^2/3)\hat{y}$ και $\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = (-x + 2x^3/9)\,dx$. Άρα $W_2 = \int_0^{\sqrt{3}}(-x + 2x^3/9)\,dx = -1$.

(β) Α' τρόπος: Ο στροβιλισμός της δύναμης είναι $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -x & y & 0 \end{vmatrix} = 0$, άρα η δύναμη είναι συντηρητική.
Β' τρόπος: Για να είναι συντηρητική, αρκεί να υπάρχει συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V(x,y,z)$ τέτοια ώστε να ισχύει $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}V$. Οι καρτεσιανές συνιστώσες της τελευταίας είναι $-x = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $y = -\frac{\partial V}{\partial y}$, $0 = -\frac{\partial V}{\partial z}$. Η τελευταία ολοκληρώνεται σε $V = V(x,y)$, δηλ. η δυναμική ενέργεια εξαρτάται μόνο από τις x και y, κάτι που ήταν αναμενόμενο αφού το πεδίο δύναμης είναι διδιάστατο. Η πρώτη ολοκληρώνεται σε $V(x,y) = \frac{x^2}{2} + C(y)$ (η «σταθερά» ολοκλήρωσης είναι συνάρτηση της μεταβλητής y, αφού ολοκληρώσαμε ως προς x κρατώντας

το y σταθερό). Αντικαθιστώντας στη δεύτερη βρίσκουμε $y = -\dfrac{dC}{dy} \Leftrightarrow C = -\dfrac{y^2}{2} + C_0$ όπου C_0 σταθερά. Επομένως βρήκαμε ότι υπάρχει συνάρτηση δυναμικής ενέργειας κάτι που σημαίνει ότι η δύναμη είναι συντηρητική.

Ταυτόχρονα βρήκαμε ότι η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας είναι $V = \dfrac{x^2 - y^2}{2} + C_0$, όπου C_0 η αυθαίρετη προσθετική σταθερά που μπορούμε να μηδενίσουμε.

Το παρακάτω σχήμα δείχνει τις ισοδυναμικές (είναι υπερβολές $\left(\dfrac{x}{\sqrt{2V}}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{\sqrt{2V}}\right)^2 = 1$ για θετικά V και υπερβολές $\left(\dfrac{y}{\sqrt{-2V}}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{\sqrt{-2V}}\right)^2 = 1$ για αρνητικά V) και με βέλη το διανυσματικό πεδίο της δύναμης (που είναι κάθετο στις ισοδυναμικές με φορά από μεγάλη σε μικρή V).



Μέσω της δυναμικής ενέργειας που βρήκαμε θα μπορούσαμε να είχαμε απαντήσει στο ερώτημα (α). Αφού η δύναμη είναι συντηρητική το έργο είναι ίδιο σε όλες τις τροχιές που ξεκινούν από το σημείο $(0,0)$ και καταλήγουν στο $(\sqrt{3},1)$, και ίσο με $W_{(0,0)\to(\sqrt{3},1)} = V(0,0) - V(\sqrt{3},1) = -1$.

4.6 Παραδείγματα συντηρητικών δυνάμεων

Ακολουθούν κάποιες περιπτώσεις που εμφανίζονται πολύ συχνά σε προβλήματα Μηχανικής και γενικότερα στη Φυσική.

• Η δύναμη σε φορτίο q από ηλεκτροστατικό πεδίο με γνωστό δυναμικό $\Phi(\boldsymbol{r})$ είναι $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$, όπου $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$ η ένταση του πεδίου, δηλ. $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}V$ όπου $V = q\Phi$ η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης φορτίου – πεδίου.

• Η δύναμη σε μάζα m από βαρυτικό πεδίο με γνωστό δυναμικό $\Phi(\boldsymbol{r})$ είναι $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$, όπου $\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$ η ένταση του πεδίου, δηλ. $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}V$ όπου $V = m\Phi$ η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης μάζας – πεδίου.

• Για ομογενές βαρυτικό πεδίο $\boldsymbol{g} = -g\hat{z}$ ($\hat{z}$ είναι ο κατακόρυφος άξονας με φορά προς τα πάνω) η δύναμη σε μάζα m είναι $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} = -mg\hat{z}$.
Αναζητώντας συνάρτηση δυναμικής ενέργειας μπορούμε να ολοκληρώσουμε τις καρτεσιανές συνιστώσες της $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}V$, δηλ. τις $0 = -\dfrac{\partial V}{\partial x}$, $0 = -\dfrac{\partial V}{\partial y}$, $-mg = -\dfrac{\partial V}{\partial z}$ και να βρούμε ότι η λύση είναι $V = mgz + C$, όπου C η αυθαίρετη προσθετική σταθερά. Γράφοντας τη λύση σαν $V = mg(z - z_0)$ η σταθερά z_0 αντιστοιχεί στο οριζόντιο επίπεδο στο οποίο θεωρούμε την δυναμική ενέργεια μηδενική.
Ένας δεύτερος τρόπος να βρούμε την δυναμική ενέργεια είναι πρώτα να ελέγξουμε ότι η δύναμη είναι συντηρητική μέσω της $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0$ (που εδώ βέβαια ισχύει αφού η δύναμη είναι σταθερή) και κατόπιν να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $V = -\int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int (-mg\hat{z}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int mg\,dz = mgz + C$.
Αν ο άξονας είχε φορά προς τα κάτω, δηλ. είχαμε $\boldsymbol{g} = g\hat{z}$, όμοια θα βρίσκαμε την δυναμική ενέργεια $V = -mgz + C$.
Γενικότερα αν η (σταθερή) ένταση είναι $\boldsymbol{g}$ η δυναμική ενέργεια είναι $V = -\int \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r} = -\int m\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r} = -m\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r} + C$.
Για παράδειγμα έστω σώμα εκτελεί κυκλική τροχιά ακτίνας R σε κατακόρυφο επίπεδο, όπως στο επίπεδο εκκρεμές. Παίρνοντας κατακόρυφο άξονα x με φορά προς τα κάτω η θέση του σώματος καθορίζεται από την γωνία ϕ των πολικών συντεταγμένων (γωνία μεταξύ διανύσματος θέσης και κατακορύφου). Είναι $\boldsymbol{g} = g\hat{x}$ και η βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι $V = -m\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r} = -mgx = -mg\varpi\cos\phi$ με $\varpi = R$ (μηδενίζοντας την αυθαίρετη προσθετική σταθερά, κάτι που ισοδυναμεί με το να θεωρήσουμε επίπεδο μηδενικής ενέργειας αυτό που περνά από το κέντρο του κύκλου).
Παρεμπιπτόντως η σχέση $-\nabla V$ αντικαθιστώντας $V = -mg\varpi\cos\phi$ μας δίνει τις συνιστώσες του βάρους στις πολικές. Είναι $-\nabla V = -\dfrac{\partial V}{\partial \varpi}\hat{\varpi} - \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi} = mg\cos\phi\,\hat{\varpi} - mg\sin\phi\,\hat{\phi}$, ίδιο με ότι βρίσκαμε αναλύοντας το διάνυσμα $mg\hat{x}$ στη βάση των πολικών, με $\hat{x} = (\hat{x} \cdot \hat{\varpi})\hat{\varpi} + (\hat{x} \cdot \hat{\phi})\hat{\phi} = \cos\phi\,\hat{\varpi} - \sin\phi\,\hat{\phi}$.

• Μία σταθερή δύναμη $\boldsymbol{F}$ είναι προφανώς συντηρητική (αφού έχει μηδενικό στροβιλισμό). Η δυναμική ενέργεια είναι $V = -\int \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r} = -\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r} + C$.

• Για βαρυτικό πεδίο σημειακής μάζας M που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων η ένταση στη θέση $\boldsymbol{r}$ είναι $\boldsymbol{g} = -\dfrac{GM}{r^2}\hat{r}$. Η δύναμη σε μάζα m που βρίσκεται στη θέση $\boldsymbol{r}$ είναι $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} = -\dfrac{GMm}{r^2}\hat{r}$. Όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο το πεδίο βαρύτητας που δημιουργεί μία σφαιρικά συμμετρική κατανομή μάζας στο εξωτερικό της είναι ίδιο με το παραπάνω (σαν όλη η μάζα να βρισκόταν στο κέντρο της κατανομής).
Αναζητώντας συνάρτηση δυναμικής ενέργειας μπορούμε να ολοκληρώσουμε τις συνιστώσες της $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}V$ σε σφαιρικές συντεταγμένες, δηλ. τις $-\dfrac{GMm}{r^2} = -\dfrac{\partial V}{\partial r}$, $0 = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}$, $0 = -\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \phi}$ και εύκολα να βρούμε ότι αυτό είναι δυνατόν και η λύση είναι $V = -\dfrac{GMm}{r} + C$, όπου C η αυθαίρετη προσθετική σταθερά. Μηδενίζοντας αυτή τη σταθερά στην ουσία θεωρούμε μηδενική την δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης των δύο μαζών όταν η m βρίσκεται στο άπειρο σε σχέση με την M. Αυτό ίσως φαίνεται λογικό αφού η δύναμη μηδενίζεται σε άπειρη απόσταση, η δυναμική ενέργεια όμως είναι μέγιστη σε άπειρη απόσταση. Αυτό γιατί η δύναμη είναι ελκτική, επομένως η δυνατότητα παραγωγής έργου είναι μεγαλύτερη όσο απομακρυσμένα είναι τα σώματα. Πράγματι, θεωρώντας $\lim\limits_{r\to\infty} = 0$, η δυναμική ενέργεια σε κάθε άλλο σημείο $V = -\dfrac{GMm}{r}$ είναι αρνητική και μάλιστα ελαττώνεται όσο η απόσταση r μεταξύ των σωμάτων ελαττώνεται.
Ένας δεύτερος τρόπος να βρούμε την δυναμική ενέργεια είναι πρώτα να ελέγξουμε ότι η δύναμη είναι συντηρητική μέσω της $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0$ (που εδώ εύκολα βρίσκουμε ότι ισχύει, χρησιμοποιώντας τη μορφή του στροβιλισμού στις σφαιρικές συντεταγμένες) και κατόπιν να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $V = -\int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int (-\dfrac{GMm}{r^2}\hat{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = -\int (-\dfrac{GMm}{r^2})dr$ (όπως προκύπτει γράφοντας το στοιχείο $d\boldsymbol{r}$ σε σφαιρικές) και η ολοκλήρωση δίνει $V = -\dfrac{GMm}{r} + C$, σχέση που είχαμε βρει και πριν.

• Το Γήινο βαρυτικό πεδίο στο εξωτερικό του πλανήτη περιγράφεται σε πολύ καλή ακρίβεια από $V =$

$-\dfrac{GMm}{r}$. Αν είμαστε κοντά σε τόπο Ο στην επιφάνεια του πλανήτη και θεωρήσουμε κατακόρυφο άξονα z με φορά προς τα πάνω και αρχή το Ο, είναι $r = R + z$ όπου R η ακτίνα του πλανήτη. Αφού $|z| \ll R$ μπορούμε να αναπτύξουμε κατά Taylor την έκφραση της δυναμικής ενέργειας $V = -\dfrac{GMm}{R+z} = -\dfrac{GMm}{R}(1 + z/R)^{-1} \approx -\dfrac{GMm}{R}(1 - z/R) = -\dfrac{GMm}{R} + \dfrac{GMm}{R^2}z$. Πέρα από την σταθερά του δεξιού μέλους (που δεν παίζει ρόλο όπως ξέρουμε), έχουμε βρει την έκφραση mgz του ομογενούς βαρυτικού πεδίου, με $g = \dfrac{GMm}{R^2}$ την ένταση στην επιφάνεια.

• Μία κεντρική δύναμη της μορφής $\boldsymbol{F} = f(r)\hat{r}$ είναι συντηρητική καθώς μπορεί εύκολα να ελεγχθεί ότι ισχύει $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0$ (οι δυνάμεις που έχουν διεύθυνση προς το κέντρο λέγονται κεντρικές, εδώ μιλάμε για την υποκατηγορία στην οποία το μέτρο εξαρτάται μόνο από την ακτίνα και όχι από την κατεύθυνση, δηλ. τις γωνιακές σφαιρικές συντεταγμένες). Η δυναμική ενέργεια βρίσκεται εύκολα από $V = -\int \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int f(r)\hat{r}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int f(r)\,dr$ (θα προκύψει συνάρτηση της ακτίνας, θα έχει και μία αυθαίρετη προσθετική σταθερά).

• Ένα μονοδιάστατο πεδίο δύναμης $\boldsymbol{F} = F(x)\hat{x}$ είναι συντηρητικό καθώς μπορεί εύκολα να ελεγχθεί ότι ισχύει $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0$. Η δυναμική ενέργεια βρίσκεται εύκολα από $V = -\int \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int F(x)\hat{x}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int F(x)\,dx$ (θα προκύψει συνάρτηση του x, θα έχει και μία αυθαίρετη προσθετική σταθερά).

• Υποπερίπτωση της προηγούμενης είναι η δύναμη ιδανικού ελατηρίου το οποίο χαρακτηρίζεται από τη σταθερά επαναφοράς k και το φυσικό μήκος ℓ_0. Η δύναμη επαναφοράς είναι $\boldsymbol{F} = -kq\hat{x}$ όπου $\hat{x}$ ο άξονας πάνω στο ελατήριο με φορά από το σημείο στήριξης προς τα έξω και q η απόσταση από τη θέση ισορροπίας. Αν η αρχή του άξονα είναι το σημείο στήριξης είναι $q = x - \ell_0$, ενώ αν είναι το σημείο φυσικού μήκους είναι $q = x$ (μπορεί να είναι και οπουδήποτε αλλού). Η δυναμική ενέργεια είναι $V = -\int(-kq)\,dq$ (διότι $dx = dq$). Η ολοκλήρωση δίνει $V = \dfrac{1}{2}kq^2$, μηδενίζοντας την προσθετική σταθερά, κάτι που αντιστοιχεί στην λογική επιλογή η δυναμική ενέργεια να μηδενίζεται όταν το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος.

• Η δύναμη σε φορτίο q από μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ είναι κάθετη στην ταχύτητα και άρα δεν παράγει έργο. Είναι λοιπόν τετριμμένα συντηρητική, παρότι δεν γράφεται σαν κλίση δυναμικής ενέργειας. Όταν πολλαπλασιάσουμε το νόμο Νεύτωνα με την ταχύτητα για να πάρουμε το ολοκλήρωμα ενέργειας η δύναμη αυτή δεν συνεισφέρει, επομένως δεν έχει συνεισφορά και στο ολοκλήρωμα ενέργειας (θα μπορούσαμε να πούμε ότι αντιστοιχεί σε μηδενική δυναμική ενέργεια).

Παραδείγματα μη-συντηρητικών δυνάμεων αποτελούν οι τριβές (π.χ. ολίσθησης) και οι αντιστάσεις (π.χ. αέρα). Αυτό γιατί πάντα το έργο τους είναι αρνητικό, ακόμα και σε κλειστές διαδρομές. Οι μη-συντηρητικές αυτές δυνάμεις μετατρέπουν μηχανική ενέργεια σε θερμότητα. Η θερμότητα θεωρείται απώλεια στην Μηχανική όπου επικεντρώνουμε την προσοχή μας σε συγκεκριμένα σώματα (ότι ενέργεια μεταφέρεται σε μικροσκοπική κλίμακα σε σωματίδια εκτός των συγκεκριμένων σωμάτων που μελετούμε, π.χ. στα μόρια του αέρα σαν αποτέλεσμα της αντίστασης αέρα, ή τα μόρια στις επιφάνειες σωμάτων που ολισθαίνουν σχετικά, θεωρούμε ότι χάνεται από το σύστημα).

Παράδειγμα 4.4:
Είναι συντηρητική η δύναμη $\boldsymbol{F} = x^2y\hat{x} + x^2\hat{y}$; Αν ναι βρείτε την δυναμική ενέργεια.
Λύση:
Για να είναι συντηρητική, πρέπει να υπάρχει συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V(x,y,z)$ τέτοια ώστε να ισχύει $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}V$. Οι καρτεσιανές συνιστώσες της τελευταίας είναι $x^2y = -\dfrac{\partial V}{\partial x}$, $x^2 = -\dfrac{\partial V}{\partial y}$, $0 = -\dfrac{\partial V}{\partial z}$. Η τελευταία ολοκληρώνεται σε $V = V(x,y)$, δηλ. η δυναμική ενέργεια εξαρτάται μόνο από τις x και y, κάτι που ήταν αναμενόμενο αφού το πεδίο δύναμης είναι διδιάστατο. Η πρώτη ολοκληρώνεται σε $V(x,y) = -\dfrac{x^3y}{3} + C(y)$ (η «σταθερά» ολοκλήρωσης είναι συνάρτηση της μεταβλητής y, αφού ολοκληρώσαμε ως προς x κρατώντας το y σταθερό). Αντικαθιστώντας στη δεύτερη βρίσκουμε $\dfrac{x^3}{3} - x^2 = \dfrac{dC}{dy}$. Η σχέση αυτή δεν μπορεί να ισχύει για

κάθε x και y. Το ότι καταλήξαμε σε άτοπο σημαίνει ότι δεν υπάρχει συνάρτηση δυναμικής ενέργειας και άρα η δύναμη δεν είναι συντηρητική.

Η απάντηση θα μπορούσε να βρεθεί και μέσω του στροβιλισμού, ο οποίος είναι $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2 y & x^2 & 0 \end{vmatrix} =$ $(2x - x^2)\hat{z}$ και δεν είναι γενικά μηδενικός.

Παράδειγμα 4.5:
Για ποιες $f(x)$ είναι συντηρητική η δύναμη $\boldsymbol{F} = x^2 y\hat{x} + f(x)\hat{y}$;
Λύση:
Για να είναι συντηρητική, πρέπει να υπάρχει συνάρτηση δυναμικής ενέργειας που προφανώς είναι $V(x, y)$ τέτοια ώστε να ισχύει $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$. Οι καρτεσιανές συνιστώσες της τελευταίας είναι $x^2 y = -\dfrac{\partial V}{\partial x}$, $f(x) = -\dfrac{\partial V}{\partial y}$. Η πρώτη ολοκληρώνεται σε $V(x, y) = -\dfrac{x^3 y}{3} + C(y)$. Αντικαθιστώντας στη δεύτερη βρίσκουμε $f(x) = \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{dC}{dy}$. Πρέπει να είναι $\dfrac{dC}{dy} = D =$ σταθερά, άρα $C = Dy + D_0$. Επομένως για να είναι η $\boldsymbol{F}$ συντηρητική πρέπει η $f(x)$ να έχει τη μορφή $f(x) = \dfrac{x^2}{3} - D$ με σταθερά D. Για τέτοιες συναρτήσεις $f(x)$ βρήκαμε συγχρόνως και την δυναμική ενέργεια $V = -\dfrac{x^3 y}{3} + Dy + D_0$ (όπου D_0 η αυθαίρετη προσθετική σταθερά).
Η απάντηση θα μπορούσε να βρεθεί και μέσω του στροβιλισμού. Η δύναμη είναι συντηρητική αν $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2 y & f(x) & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{df}{dx} = x^2 \Leftrightarrow f = \dfrac{x^3}{3} +$ σταθερά.

4.7 Ασκήσεις

Ασκήσεις με λύση

4.7.1 Έστω $\boldsymbol{F} = \dfrac{(a+1)\, z\left(x\hat{x} + y\hat{y}\right) + \left(az^2 - x^2 - y^2\right)\hat{z}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{b+1}}$ όπου a, b σταθερές με $b > 0$.

(α) Ποιο το έργο της $\boldsymbol{F}$ για μια κλειστή διαδρομή σχήματος τετραγώνου με κορυφές τα Α(0, 0, 1), Β(1, 0, 1), Γ(1, 1, 1), Δ(0, 1, 1) και φορά κίνησης Α→Β→Γ→Δ→Α;
(β) Για ποια σχέση των a και b η δύναμη είναι συντηρητική; Ποια η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V(x, y, z)$;
(γ) Ποια η έκφραση της $\boldsymbol{F}$ σε σφαιρικές και κυλινδρικές συντεταγμένες;

4.7.2 Έστω δύναμη $\boldsymbol{F} = \dfrac{3\cos^2\theta - 1}{r^4}\hat{r} + \dfrac{a\sin\theta\cos\theta}{r^4}\hat{\theta}$, σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ), όπου a σταθερά.

(a) Βρείτε το έργο της δύναμης αυτής για τις ακόλουθες διαδρομές:
(α_1) Από το σημείο $A(x = 1, y = 0, z = 0)$ στο σημείο $B(x = 2, y = 0, z = 0)$ πάνω στην ευθεία $y = 0, z = 0$ (ή σε σφαιρικές $\theta = \pi/2, \phi = 0$).
(α_2) Από το σημείο $B(x = 2, y = 0, z = 0)$ στο σημείο $C(x = 0, y = 0, z = 2)$ πάνω στο τεταρτοκύκλιο $x^2 + z^2 = 4, y = 0$ (ή $r = 2, \phi = 0$).
(α_3) Από το σημείο $C(x = 0, y = 0, z = 2)$ στο σημείο $D(x = 0, y = 0, z = 1)$ πάνω στην ευθεία $x = 0, y = 0$ (ή $\theta = 0, \phi = 0$).
(α_4) Από το σημείο $D(x = 0, y = 0, z = 1)$ στο σημείο $A(x = 1, y = 0, z = 0)$ πάνω στο τεταρτοκύκλιο $x^2 + z^2 = 1, y = 0$ (ή $r = 1, \phi = 0$).

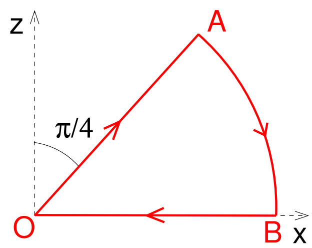
(β) Από τα αποτελέσματά σας στο ερώτημα (α) βρείτε για ποια τιμή της σταθεράς a ίσως η $\boldsymbol{F}$ είναι συντηρητική. Δείξτε ότι πράγματι είναι συντηρητική για αυτή την τιμή της a βρίσκοντας την δυναμική ενέργεια $V(r\,,\theta\,,\phi)$ και υπολογίστε τα έργα στις διαδρομές του ερωτήματος (α) χρησιμοποιώντας την.

4.7.3 Έστω δύναμη σε πολικές συντεταγμένες
$$\boldsymbol{F} = -k\varpi^n \cos^2\phi\,\hat{\varpi} + k\varpi^n \sin\phi\cos\phi\,\hat{\phi},$$
όπου k, n σταθερές με $k > 0$ και $n > -1$.
(α) Βρείτε το έργο της δύναμης αυτής για τις ακόλουθες διαδρομές στο επίπεδο Oxy:
(α_1) Από το σημείο $O(x = 0\,, y = 0)$ στο σημείο $A(x = 1\,, y = 0)$ πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει $\phi = 0$.
(α_2) Από το σημείο $O(x = 0\,, y = 0)$ στο σημείο $B(x = 0\,, y = 1)$ πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει $\phi = \pi/2$ και στη συνέχεια από το σημείο $B(x = 0\,, y = 1)$ στο σημείο $A(x = 1\,, y = 0)$ πάνω στο τεταρτοκύκλιο $\varpi = 1$.
(β) Από τα αποτελέσματά σας στα προηγούμενα ερωτήματα βρείτε για ποια τιμή της σταθεράς n ίσως η $\boldsymbol{F}$ είναι συντηρητική. Δείξτε ότι είναι πράγματι συντηρητική για αυτή την τιμή της n και βρείτε τη δυναμική ενέργεια $V(\varpi\,,\phi)$. Υπολογίστε τα έργα στις διαδρομές του ερωτήματος (α) χρησιμοποιώντας την V.
(γ) Ποιο φυσικό σύστημα έχει αυτής της μορφής δυναμική ενέργεια; Υπόδειξη: $\varpi\cos\phi = x$.
Σώμα μάζας m κινείται υπό την επίδραση της δοσμένης δύναμης, με την τιμή του n για την οποία είναι συντηρητική. Αν αρχικά το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_0\hat{x}$ και έχει ταχύτητα $v_0\hat{y}$, περιγράψτε την κίνηση χωρίς να λύσετε εξισώσεις.

Άλυτες ασκήσεις

4.7.1 Έστω πεδίο δύναμης $\boldsymbol{F} = (2x + y)\hat{x} + F_y(x, y)\hat{y}$.
(α) Για ποιες $F_y(x, y)$ είναι συντηρητικό και ποια είναι τότε η δυναμική ενέργεια;
(β) Ποια είναι η $F_y(x, y)$ αν το πεδίο είναι συντηρητικό και τα σημεία της ευθείας $y = -2x$ είναι όλα σημεία ισορροπίας;
(γ) Έστω μια άλλη περίπτωση συντηρητικού πεδίου μορφής $\boldsymbol{F} = (2x + y)\hat{x} + F_y(x, y)\hat{y}$, στο οποίο ένα σώμα μάζας $m = 1$ κινείται με $x(t) = e^{-t}$. Ποια είναι η $F_y(x, y)$;
Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα την $y(t)$.

4.7.2 Έστω πεδίο δύναμης $\boldsymbol{F} = \lambda r\sin(2\theta)\cos\phi\,\hat{r} + r\cos(2\theta)\cos\phi\,\hat{\theta} - r\cos\theta\sin\phi\,\hat{\phi}$ σε σφαιρικές συντεταγμένες, με $\lambda =$ σταθερά.
(α) Ποιο το έργο της $\boldsymbol{F}$ για την κλειστή διαδρομή Ο→Α→Β→Ο του σχήματος; Οι διαδρομές ΟΑ και ΒΟ είναι ευθύγραμμες, ενώ η ΑΒ είναι τμήμα κύκλου μοναδιαίας ακτίνας με κέντρο το Ο.
(β) Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορούμε να κρίνουμε για ποια τιμή της σταθεράς λ ίσως η $\boldsymbol{F}$ είναι συντηρητική;
Για αυτή τη τιμή του λ είναι πράγματι συντηρητική;
Αν ναι, ποια η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V(r, \theta, \phi)$;



4.7.3 Έστω πεδίο δύναμης $\boldsymbol{F} = 4\left(x^2 + y^2 + z^2 - 4\right)\left(x\hat{x} + y\hat{y} + \lambda z\hat{z}\right)$, με λ σταθερά.
(α) Ποιο το έργο της $\boldsymbol{F}$ για την κλειστή διαδρομή του σχήματος Α→Β→Γ→Δ→Α; Οι ΒΓ και ΔΑ ανήκουν σε κύκλους με κέντρο το Ο και ακτίνα 2 και 1, αντίστοιχα.
(β) Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορούμε να κρίνουμε για ποια τιμή της σταθεράς λ ίσως η $\boldsymbol{F}$ είναι συντηρητική; Είναι πράγματι συντηρητική γι' αυτή την τιμή του λ; Αν ναι, ποια η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V(x, y, z)$;
(γ) Έστω η δύναμη αυτή ασκείται σε σώμα που έχει στροφορμή $\boldsymbol{L}$ ως προς την αρχή του συστήματος αναφοράς Ο. Για ποια τιμή της λ δεν αλλάζει την $\hat{x}$ συνιστώσα της στροφορμής;