ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΧΡΗΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΣΕ «ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΑ» ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Περίληψη
Το κεφάλαιο αυτό αφορά το πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί το ολοκλήρωμα ενέργειας για να μελετηθεί η κίνηση ενός υλικού σημείου. Συζητείται πως η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας σε μονοδιάστατα προβλήματα, μέσω του γραφήματός της, δίνει πληροφορίες για τα όρια της κίνησης, για το αν υπάρχουν σημεία ισορροπίας και την κίνηση γύρω από αυτά. Η μέθοδος εφαρμόζεται σε προβλήματα που είναι μονοδιάστατα, δηλ. σε αυτά που η θέση καθορίζεται μέσω μίας μόνο συντεταγμένης (όχι απαραίτητα καρτεσιανής), αλλά και σε περιπτώσεις όπου μέσω άλλων ολοκληρωμάτων μπορούμε να διώξουμε όλες τις συντεταγμένες εκτός από μία, οπότε η κίνηση ανάγεται σε μονοδιάστατη.
Προαπαιτούμενη γνώση: Τα ολοκληρώματα ενέργειας και στροφορμής, πότε υπάρχουν και οι εκφράσεις τους. Στοιχεία ανάλυσης (παραγώγιση, ολοκλήρωση, διαφορικές εξισώσεις). Μελέτη συναρτήσεων μίας μεταβλητής και γραφικές παραστάσεις τους (ακρότατα, σημεία καμπής, όρια).

5.1 Όρια κίνησης μέσω του γραφήματος της δυναμικής ενέργειας

Σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα το σώμα κινείται σε δεδομένη καμπύλη και άρα χρειαζόμαστε μόνο μία συντεταγμένη για να καθορίσουμε τη θέση. Το πιο απλό παράδειγμα είναι η κίνηση σε μία ευθεία στην οποία μπορούμε να επιλέξουμε άξονα πάνω στην κίνηση και να καθορίσουμε τη θέση μέσω της καρτεσιανής συντεταγμένης πάνω σε αυτόν. Άλλο απλό παράδειγμα αποτελεί η κυκλική κίνηση στην οποία μπορούμε να επιλέξουμε σύστημα στο οποίο ο κύκλος έχει εξίσωση $\varpi =$ σταθερό, $z =$ σταθερό, και να καθορίσουμε τη θέση μέσω της γωνιακής πολικής συντεταγμένης ϕ. Γενικότερα, οποιαδήποτε καμπύλη μπορούμε με άπειρους τρόπους να την παραμετροποιήσουμε, δηλ. να επιλέξουμε συντεταγμένη q ώστε να γνωρίσουμε τη θέση σε κάθε σημείο της καμπύλης μέσω της τιμής της, δηλ. να ξέρουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{r}(q)$ ή τις συνιστώσες του $x(q)$, $y(q)$, $z(q)$.

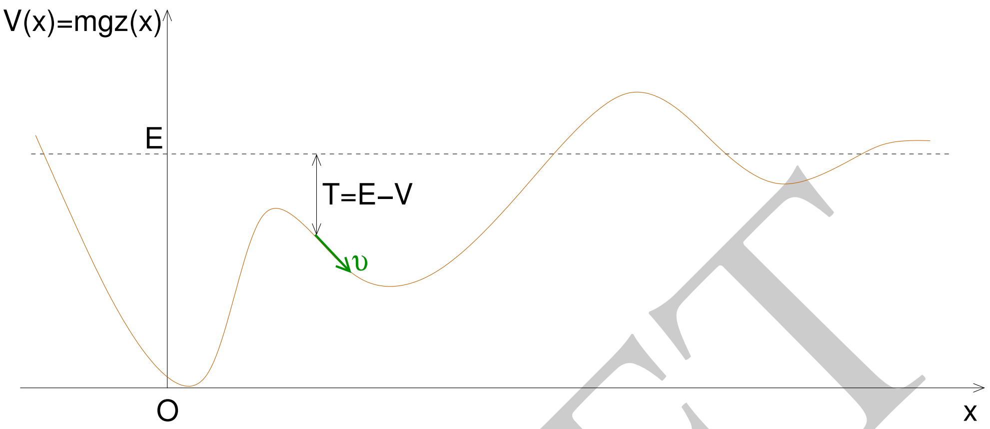
Εφόσον υπάρχει ολοκλήρωμα ενέργειας $T + V = E$ (όπου T η κινητική ενέργεια η οποία είναι συνάρτηση της συντεταγμένης q και της χρονικής της παραγώγου $\dot{q}$), η δυναμική ενέργεια είναι συνάρτηση μίας μετα-

Νεκτάριος Βλαχάκης (2022). «Κλασική Μηχανική».
Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις.

βλητής $V = V(q)$. Ισχύει $T \geq 0$ ή ισοδύναμα $V(q) \leq E$ (με την ισότητα να ισχύει στα σημεία που το σώμα είναι ακίνητο). Αυτή η ανισότητα μπορεί να επιλυθεί και να δώσει τα όρια κίνησης.

Η ανισότητα $V(q) \leq E$ μπορεί να μελετηθεί μέσω του γραφήματος της δυναμικής ενέργειας $V(q)$.

Σαν ένα παράδειγμα έστω σώμα κινείται χωρίς τριβές στην κορυφογραμμή κάποιων λόφων που απεικονίζονται στο σχήμα 5.1, μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας. Ο κατακόρυφος άξονας του σχήματος έχει επιλεγεί το ύψος από κάποιο οριζόντιο επίπεδο αναφοράς, πολλαπλασιασμένο με το βάρος του σώματος, δηλ. είναι η δυναμική ενέργεια $V = mgz$ (θεωρώντας την μηδενική στο ύψος αναφοράς).



Σχήμα 5.1: Κίνηση σώματος στην κορυφογραμμή κάποιων λόφων. Η κίνηση μπορεί να περιγραφεί ποιοτικά μέσω του γραφήματος της δυναμικής ενέργειας.

Αν η αρχική ταχύτητα είναι v_i και η δυναμική mgz_i μπορούμε να βρούμε την ενέργεια $E = \frac{mv_i^2}{2} + mgz_i$.

Από το σχήμα μπορούμε να παρακολουθήσουμε την κίνηση του σώματος πάνω στους λόφους και να καταλάβουμε εύκολα πότε η ταχύτητα μειώνεται κατά μέτρο, κάτι που συμβαίνει αν το z αυξάνεται καθώς το σώμα αλλάζει θέση, δηλ. η $V(x)$ αυξάνεται οπότε η κινητική ενέργεια μειώνεται (τότε η προβολή της δύναμης πάνω στην τροχιά είναι αντίρροπη της ταχύτητας). Όμοια καταλαβαίνουμε πότε, καθώς το σώμα κινείται, το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται.

Αν τοποθετήσουμε και την ενέργεια στο γράφημα (που είναι συγκεκριμένη για δεδομένες αρχικές συνθήκες) η διαφορά $E - V(x)$ σε κάθε σημείο εκφράζεται από την κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των E και $V(x)$ και δίνει ποσοτικά την κινητική ενέργεια, άρα και το μέτρο της ταχύτητας. Η επιτρεπτή περιοχή κίνησης καθορίζεται από την ανισότητα $T(x) = E - V(x) \geq 0 \Leftrightarrow V(x) \leq E$ με την ισότητα $V(x) = E$ να αντιστοιχεί σε σημεία ακινησίας που αποτελούν και τα όρια της κίνησης. Στα σημεία αυτά η ταχύτητα μηδενίζεται στιγμιαία και η δύναμη υποχρεώνει το σώμα να αλλάξει φορά κίνησης. Εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση όπου ένα όριο κίνησης αντιστοιχεί σε μέγιστο της $V(x)$, δηλ. η ενέργεια είναι ίση με μέγιστο της δυναμικής ενέργειας, οπότε το σώμα θα μείνει για πάντα σε αυτό το σημείο.

Μπορούμε επίσης να καταλάβουμε ότι τα σημεία ισορροπίας είναι τα σημεία που τοπικά η καμπύλη είναι οριζόντια, εκεί δηλ. που η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας έχει ακρότατα (εκεί η προβολή της δύναμης πάνω στην τροχιά είναι μηδενική). Αν το ακρότατο είναι ελάχιστο τότε μικρές διαταραχές γύρω από το σημείο αυτό είναι ταλαντωτικές κινήσεις μεταξύ των ακραίων θέσεων όπου $V(x) = E$, οπότε λέμε η θέση ισορροπίας είναι ευσταθής. Αντίθετα αν το ακρότατο είναι μέγιστο μια μικρή διαταραχή θα απομακρύνει σημαντικά το σώμα από αυτό και λέμε ότι η θέση ισορροπίας είναι ασταθής.

Ας μελετήσουμε πιο αναλυτικά την κίνηση σε ευθεία υπό την επίδραση δύναμης εξαρτώμενης μόνο από τη θέση. Επιλέγοντας τον άξονα x πάνω στην κίνηση η δύναμη είναι $\boldsymbol{F} = F(x)\hat{x}$ και μπορεί να γραφεί $F(x) = -\frac{dV}{dx}$ όπου $V = V(x) = -\int F(x)\,dx$ η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας. (Μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε τιμή της αυθαίρετης προσθετικής σταθεράς στην συνάρτηση $V(x)$. Παρότι αλλάζοντας την τιμή αυτή μετατοπίζονται κατά μία σταθερά οι τιμές τόσο της δυναμικής ενέργειας σε όλες τις θέσεις όσο και της ολικής ενέργειας, δεν αλλάζει η φυσική του προβλήματος που επηρεάζεται μόνο από διαφορές ενεργειών μεταξύ δύο θέσεων.)

Η εξίσωση κίνησης είναι ο νόμος Νεύτωνα, δηλ. η διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης $m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}$. Λόγω του ότι η κίνηση είναι μονοδιάστατη έχουμε μόνο την x συντεταγμένη άγνωστη και η εξίσωση κίνησης που την καθορίζει είναι η $\hat{x}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα. Η συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα πάνω στην κίνηση είναι ισοδύναμη με το ολοκλήρωμα ενέργειας

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) = E \tag{5.1}$$

που αποτελεί διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης – έχει γίνει ήδη μία ολοκλήρωση στο νόμο Νεύτωνα[1] και έχει εμφανιστεί μία σταθερά ολοκλήρωσης, η ποσότητα που αποκαλούμε ενέργεια E).

Η 5.1 είναι μία διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών. Λύνοντας ως προς την ταχύτητα βρίσκουμε

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]} \tag{5.2}$$

όπου το πρόσημο επιλέγεται ανάλογα με τη φορά κίνησης (θετικό αν η κίνηση γίνεται προς μεγαλύτερα x οπότε η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας είναι θετική, αρνητικό αν η κίνηση γίνεται προς μικρότερα x οπότε η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας είναι αρνητική, ενώ αν αλλάζει η φορά κίνησης την μελετούμε τμηματικά σε μέρη που το πρόσημο είναι καθορισμένο). Γράφοντας $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ και χωρίζοντας τις μεταβλητές καταλήγουμε στο ολοκλήρωμα $\int dt = \int \frac{dx}{\dot{x}}$, ή,

$$\int dt = \pm\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]}} \tag{5.3}$$

το οποίο μπορεί να γίνει είτε σαν ορισμένο (θέτοντας συγκεκριμένα κάτω όρια στα δύο ολοκληρώματα) είτε σαν αόριστο (καθορίζοντας την σταθερά ολοκλήρωσης μέσω αρχικών συνθηκών), πάντα επιλέγοντας το κατάλληλο πρόσημο ανάλογα με τη φορά κίνησης. Η τελική λύση εξαρτάται από την αρχική θέση x_i σε κάποιο δεδομένο αρχικό χρόνο t_i και από την αρχική ταχύτητα v_i μέσω της ενέργειας $E = \frac{mv_i^2}{2} + V(x_i)$.

Κοιτώντας την εξίσωση κίνησης μαθηματικά, ο νόμος Νεύτωνα (μόνο μία συνιστώσα του, αυτή πάνω στην κίνηση) είναι η έκφρασή της σαν διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, ολοκληρώνοντας μία φορά βρίσκουμε το ολοκλήρωμα ενέργειας 5.1 που αποτελεί την έκφραση της εξίσωσης κίνησης σαν διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, ενώ ολοκληρώνοντας ακόμα μία φορά βρίσκουμε τη σχέση 5.3, δηλ. τη λύση $t = t(x)$ σε μορφή ολοκληρώματος. Παρότι όταν κατεβάζουμε την τάξη μίας διαφορικής εξίσωσης (μετά από ολοκλήρωση) συνήθως απλουστεύουμε το πρόβλημα, αυτό πρακτικά δεν συμβαίνει πάντα. Καταρχάς είναι λίγες οι περιπτώσεις όπου το ολοκλήρωμα 5.3 υπολογίζεται αναλυτικά. Ακόμα και όταν αυτό γίνεται δίνει εκφράσεις που δεν μπορούν εύκολα να «διαβαστούν» και να δώσουν εποπτικά την κίνηση του σώματος. (Επίσης, όπως θα δούμε, υπάρχουν περιπτώσεις όπου είναι ευκολότερο να λύσουμε άμεσα την εξίσωση Νεύτωνα σαν διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης παρά να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα 5.3.)

Για να καταλάβουμε ποιοτικά την κίνηση η καταλληλότερη μορφή είναι το ολοκλήρωμα ενέργειας 5.1 σε συνδυασμό με την γραφική μελέτη της $V(x)$. Από το γράφημα της δυναμικής ενέργειας μπορούμε να καταλάβουμε την κίνηση όπως ακριβώς και στο παράδειγμα με την κίνηση στην κορυφογραμμή των λόφων που

[1]Η απόδειξη γίνεται είτε πολλαπλασιάζοντας το νόμο Νεύτωνα με την ταχύτητα όπως κάναμε στο προηγούμενο κεφάλαιο $m\dot{x}\ddot{x} = -\dot{x}\frac{dV}{dx} \Leftrightarrow \frac{d(m\dot{x}^2/2)}{dt} = -\frac{dV}{dt} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(T+V) = 0$, είτε γράφοντας $m\ddot{x} = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = m\frac{dv}{dx}v = \frac{dT}{dx}$ οπότε ο νόμος Νεύτωνα δίνει $\frac{d}{dx}(T+V) = 0$.

συζητήσαμε προηγουμένως. Εδώ $V(x)$ δεν είναι το ύψος ούτε η τροχιά είναι καμπύλη, αλλά ακριβώς με τον ίδιο τρόπο η σχέση $T(x) = E - V(x)$ μας δίνει το μέτρο της ταχύτητας σε κάθε σημείο (δεν μας δίνει πληροφορία για το πρόσημο της ταχύτητας, δηλ. την φορά κίνησης, αλλά αυτή την καταλαβαίνουμε γνωρίζοντας τι έχει προηγηθεί, ξεκινώντας από την αρχική στιγμή όπου η φορά κίνησης είναι δοσμένη), μας δίνει την επιτρεπτή περιοχή κίνησης $V(x) \leq E$ με την ισότητα $V(x) = E$ να αντιστοιχεί στα όρια κίνησης όπου η ταχύτητα μηδενίζεται, η κλίση δίνει την δύναμη γιατί $F(x) = -\dfrac{dV(x)}{dx}$ (έχει την φορά του άξονα x αν η $V(x)$ είναι φθίνουσα – ακολουθεί τον κανόνα ότι η δύναμη δείχνει προς μικρότερη δυναμική ενέργεια αφού $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$ – και αντίστοιχα είναι αντίρροπη του άξονα x αν η $V(x)$ είναι αύξουσα), τα σημεία ισορροπίας είναι εκεί που μηδενίζεται η δύναμη, δηλ. στα ακρότατα όπου $\dfrac{dV}{dx} = 0$. Αν ένα ακρότατο είναι ελάχιστο, δηλ. αν η συνάρτηση γίνεται από φθίνουσα για $x < x_0$ αύξουσα για $x > x_0$, ή ισοδύναμα αν πάνω στο ακρότατο ισχύει $\dfrac{d^2V}{dx^2} > 0$ (η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα πάνω), η ισορροπία σε αυτό είναι ευσταθής. Αυτό φαίνεται και από το ότι η δύναμη στη γειτονιά του σημείου (της οποίας το πρόσημο είναι αντίθετο της κλίσης) έχει πάντα τη φορά προς το σημείο ισορροπίας, είναι δύναμη επαναφοράς. Αντίθετα αν ένα ακρότατο είναι μέγιστο, δηλ. αν η συνάρτηση γίνεται από αύξουσα για $x < x_0$ φθίνουσα για $x > x_0$, ή ισοδύναμα αν πάνω στο ακρότατο ισχύει $\dfrac{d^2V}{dx^2} < 0$ (η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα κάτω), η ισορροπία σε αυτό είναι ασταθής. Αυτό φαίνεται και από το ότι η δύναμη στη γειτονιά του σημείου (της οποίας το πρόσημο είναι αντίθετο της κλίσης) έχει πάντα τη φορά της απομάκρυνσης από το σημείο ισορροπίας, είναι απωστική δύναμη.

Στην ιδιαίτερη περίπτωση που και η δεύτερη παράγωγος μηδενίζεται πάνω στο σημείο όπου $\dfrac{dV}{dx} = 0$ το σημείο αυτό μπορεί να είναι σημείο καμπής ή ακρότατο ανάλογα με το πρόσημο των ανώτερων παραγώγων. Γενικά μπορούμε να αναπτύξουμε κατά Taylor την συνάρτηση δυναμικής ενέργειας γύρω από οποιοδήποτε σημείο εφόσον είναι αναλυτική στο σημείο αυτό, $V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} V^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$ (ο τόνος σημαίνει παράγωγο ως προς το όρισμα και $V^{(n)}(x_0)$ είναι η τιμή της n-οστής παραγώγου στο σημείο x_0). Ο πρώτος μη τετριμμένος (δηλ. μη σταθερός) όρος $\dfrac{1}{n!}V^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$ δείχνει την συμπεριφορά της συνάρτησης γύρω από αυτό το σημείο. Αν ισχύει $V'(x_0) = 0$ και ο πρώτος μη τετριμμένος όρος $\dfrac{1}{n!}V^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$ είναι άρτιος ως προς $x-x_0$ (δηλ. n άρτιο) το σημείο είναι ελάχιστο ή μέγιστο (ανάλογα με το πρόσημο του $V^{(n)}(x_0)$). Αν ισχύει $V'(x_0) = 0$ και ο πρώτος μη τετριμμένος όρος $\dfrac{1}{n!}V^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$ είναι περιττός ως προς $x - x_0$ (δηλ. n περιττό) το $x = x_0$ είναι σημείο καμπής.

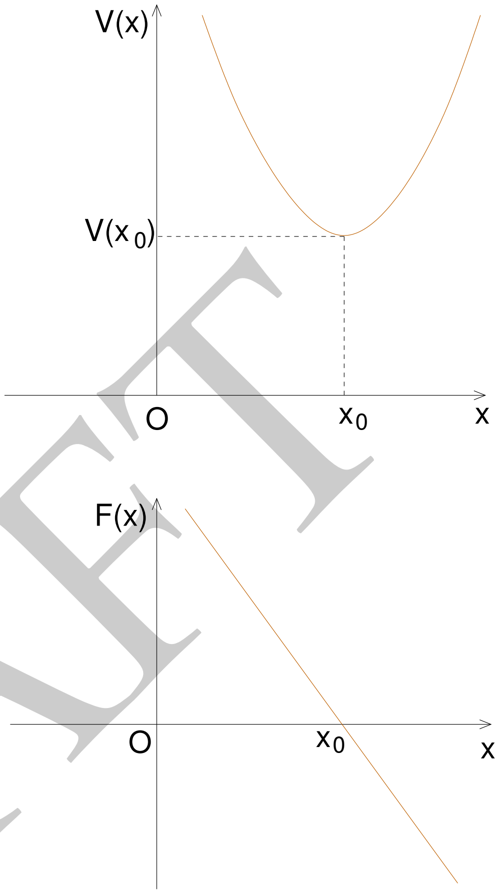
Μελετώντας λοιπόν την συνάρτηση δυναμικής ενέργειας, μέσω του γραφήματος μπορούμε να περιγράψουμε την κίνηση που αντιστοιχεί σε συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες (που αντιστοιχούν σε αρχική θέση, συγκεκριμένη ενέργεια και φορά κίνησης) χωρίς να λύσουμε την εξίσωση κίνησης.

5.1.1 Μικρές ταλαντώσεις γύρω από ευσταθές σημείο ισορροπίας

Ένα σημείο $x = x_0$ στο οποίο ισχύουν $V'(x_0) = 0$ και $V''(x_0) > 0$ είναι ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας. Αν το σώμα βρίσκεται αρχικά κοντά σε αυτό το σημείο και έχει αρκούντως μικρή ταχύτητα, δηλ. η ενέργειά του είναι ελαφρώς μεγαλύτερη από την τιμή του ελαχίστου $V(x_0)$, θα παραμείνει συνεχώς στη γειτονιά του x_0. Το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας δίνει $V(x) \approx V(x_0) + \dfrac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2$, όπως σε ένα ιδανικό ελατήριο με σταθερά $k = V''(x_0) > 0$ (η προσθετική σταθερά $V(x_0)$ δεν επηρεάζει την κίνηση). Η δύναμη $F(x) = -V'(x) \approx -V''(x_0)(x-x_0)$ είναι δύναμη επαναφοράς. Οι εκφράσεις απλοποιούνται αν κάνουμε μία μετατόπιση της αρχής του άξονα, ορίζοντας $q = x - x_0$. Τότε $V \approx V(x_0) + \dfrac{1}{2}V''(x_0)q^2$ και $F = -V''(x_0)q$.

Η προσεγγιστική εξίσωση κίνησης είναι $\dfrac{m\dot{q}^2}{2} + \dfrac{1}{2}V''(x_0)q^2 = E - V(x_0) =$ σταθερά, ή παραγωγίζοντας $m\ddot{q} = -V''(x_0)q$ (κάτι που προκύπτει και από το νόμο Νεύτωνα με $F = -V''(x_0)q$). Ορίζοντας $\omega = \sqrt{\dfrac{V''(x_0)}{m}}$ γράφεται $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$.

Η διαφορική αυτή εξίσωση είναι γραμμική, ομογενής, με σταθερούς συντελεστές και όπως γνωρίζουμε έχει δύο ανεξάρτητες λύσεις (δύο γιατί είναι δεύτερης τάξης) της μορφής $q = e^{\lambda t}$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο που δίνει τις τιμές του λ. Εδώ προκύπτει $\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i\omega$. Η γενική λύση είναι επαλληλία των δύο αυτών λύσεων, δηλ. $q = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$. Οι σταθερές C_1 και C_2 βρίσκονται από τις αρχικές συνθήκες και προκύπτουν πάντα τέτοιες ώστε η έκφραση του q να είναι πραγματική (παρότι είναι άθροισμα μιγαδικών). Είναι προτιμότερο όμως να δώσουμε στη γενική λύση μορφή πραγματικής συνάρτησης. Αυτό γίνεται βάσει του τύπου Euler $e^{i\xi} = \cos\xi + i\sin\xi$, ο οποίος μετατρέπει τη γενική λύση σε $q = (C_1 + C_2)\cos(\omega t) + i(C_1 - C_2)\sin(\omega t)$. Μετονομάζοντας τις σταθερές μπορούμε να γράψουμε τη γενική λύση σαν $q = D_1\cos(\omega t) + D_2\sin(\omega t)$, όπου οι σταθερές D_1 και D_2 προκύπτουν από τις αρχικές συνθήκες. Αν η αρχική θέση είναι $x_0 + q_i$ και η αρχική ταχύτητα v_i οι σχέσεις $q|_{t=0} = q_i \Leftrightarrow D_1 = q_i$ και $\dot{q}|_{t=0} = v_i \Leftrightarrow \omega D_2 = v_i$ δίνουν την λύση $q = q_i\cos(\omega t) + \dfrac{v_i}{\omega}\sin(\omega t)$.



Σχήμα 5.2: Πάνω: η δυναμική ενέργεια κοντά σε τοπικό ελάχιστο. Κάτω: η αντίστοιχη δύναμη.

Δείξαμε λοιπόν, κάτι που θα χρησιμοποιούμε κατευθείαν από εδώ και στο εξής, ότι αν έχουμε μία διαφορική εξίσωση της μορφής $\ddot{q} + Aq = 0$ με σταθερό A, εφόσον το A είναι θετικό η γενική λύση είναι $q = D_1\cos(\sqrt{A}t) + D_2\sin(\sqrt{A}t)$. Όπως θα δούμε αργότερα όταν μιλήσουμε αναλυτικότερα για ταλαντώσεις, η προηγούμενη έκφραση μπορεί να γραφεί και σαν $q = D\cos(\sqrt{A}t + C)$ ή σαν $q = D\sin(\sqrt{A}t + C)$, με $D = \sqrt{D_1^2 + D_2^2}$ θετική σταθερά που εκφράζει το πλάτος της ταλάντωσης.

Προφανώς το αποτέλεσμα περιγράφει μία αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα ω, περίοδο $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ και συχνότητα $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$.

Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι η περίοδος δεν εξαρτάται από την ενέργεια (δηλ. το πλάτος) της ταλάντωσης. Για μία ταλάντωση μεγαλύτερου πλάτους το σώμα έχει να διανύσει μεγαλύτερη απόσταση. Λόγω όμως του ότι και η δύναμη γίνεται μεγαλύτερη το σώμα αποκτά κατάλληλα μεγαλύτερη ταχύτητα ώστε να διανύει την μεγαλύτερη αυτή απόσταση στον ίδιο χρόνο.

Να σημειωθεί επίσης ότι η εξίσωση κίνησης που επιλέχθηκε να επιλυθεί είναι η δεύτερης τάξης που προέκυψε από παραγώγιση του ολοκληρώματος ενέργειας (ή άμεσα από το νόμο Νεύτωνα). Ο λόγος είναι ότι η αυτή η εξίσωση είναι γραμμική, ομογενής, με σταθερούς συντελεστές και όπως είδαμε είναι εύκολο να επιλυθεί. Θα ήταν δυσκολότερη η επίλυση αν επιλέγαμε την εξίσωση κίνησης όπως δίνεται από το ολοκλήρωμα ενέργειας $\frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{1}{2}V''(x_0)q^2 = E - V(x_0)$, το οποίο δίνει όπως ξέρουμε $\pm t = \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x_0)] - \frac{V''(x_0)}{m}q^2}}$.

Θέτοντας $V''(x_0) = m\omega^2$ και $E - V(x_0) = 0 + \frac{1}{2}m\omega^2 D^2$ (D είναι το πλάτος και όταν $q = \pm D$ η κινητική ενέργεια μηδενίζεται) προκύπτει $\pm\omega t = \int \frac{dq}{\sqrt{D^2 - q^2}}$. Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με αλλαγή μεταβλητής $q = D\sin\phi$ και προκύπτει $\pm\phi +$ σταθερά, με το πρόσημο $+$ ή $-$ ανάλογα με το πρόσημο του $\cos\phi$, το οποίο μπορεί να απορροφηθεί στο πρόσημο του αριστερού μέλους. Έτσι προκύπτει $\pm\omega t = \phi + C_0$ όπου $\phi = \arcsin\frac{q}{D}$. Άρα $q = D\sin(\pm\omega t - C_0)$. Το πρόσημο αν είναι αρνητικό μπορεί να απορροφηθεί σε αλλαγή φάσης κατά π οπότε καταλήγουμε ότι σε κάθε περίπτωση η γενική λύση είναι $q = D\sin(\omega t + C)$ με D και C σταθερές ολοκλήρωσης που καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

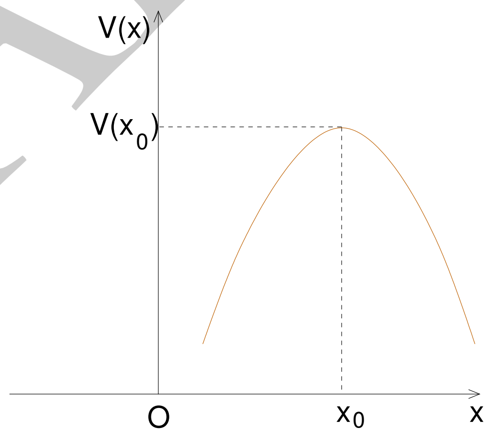
Είναι χρήσιμο να σχολιαστεί ότι ένα ολοκλήρωμα ενέργειας της μορφής $\frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{V''(x_0)}{2}q^2 = E - V(x_0) =$ σταθερά με $V''(x_0) > 0$ δείχνει άμεσα ότι η κίνηση είναι αρμονική ταλάντωση και το πλάτος βρίσκεται θέτοντας $\dot{q} = 0$, $q = \pm D$ να είναι $D = \sqrt{\frac{2}{V''(x_0)}[E - V(x_0)]}$. (Η κυκλική συχνότητα βρίσκεται αφού παραγωγίσουμε τη σχέση και καταλήξουμε στην $\ddot{q} + \frac{V''(x_0)}{m}q = 0$, δηλ. είναι $\omega = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}}$.)

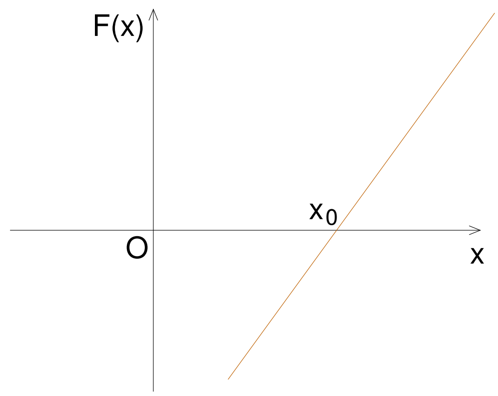
5.1.2 Κίνηση κοντά σε ασταθές σημείο ισορροπίας

Ένα σημείο $x = x_0$ στο οποίο ισχύουν $V'(x_0) = 0$ και $V''(x_0) < 0$ είναι μέγιστο της δυναμικής ενέργειας. Αν το σώμα βρίσκεται αρχικά κοντά σε αυτό το σημείο, για το χρονικό διάστημα που παραμένει στη γειτονιά του x_0 μπορούμε να αναπτύξουμε κατά Taylor την συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V(x) \approx V(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2$. Η δύναμη είναι απωστική $F(x) = -V'(x) \approx -V''(x_0)(x - x_0)$ διότι $V''(x_0) < 0$. Οι εκφράσεις απλοποιούνται αν κάνουμε μία μετατόπιση της αρχής του άξονα, ορίζοντας $q = x - x_0$. Τότε $V \approx V(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)q^2$ και $F = -V''(x_0)q$. Η προσεγγιστική εξίσωση κίνησης είναι $\frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{1}{2}V''(x_0)q^2 = E - V(x_0) =$ σταθερά, ή παραγωγίζοντας $m\ddot{q} = -V''(x_0)q$ (κάτι που προκύπτει και από το νόμο Νεύτωνα με $F = -V''(x_0)q$). Ορίζοντας $\omega = \sqrt{-\frac{V''(x_0)}{m}}$ γράφεται $\ddot{q} - \omega^2 q = 0$.

Η διαφορική αυτή εξίσωση είναι γραμμική, ομογενής, με σταθερούς συντελεστές και όπως γνωρίζουμε έχει δύο ανεξάρτητες λύσεις (δύο γιατί είναι δεύτερης τάξης) της μορφής $q = e^{\lambda t}$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\lambda^2 - \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\omega$. Η γενική λύση είναι επαλληλία των δύο αυτών λύσεων, δηλ. $q = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$.

Οι σταθερές C_1 και C_2 βρίσκονται από τις αρχικές





Σχήμα 5.3: Πάνω: η δυναμική ενέργεια κοντά σε τοπικό μέγιστο. Κάτω: η αντίστοιχη δύναμη.

συνθήκες. Αν η αρχική θέση είναι $x_0 + q_i$ και η αρχική ταχύτητα v_i οι σχέσεις $q|_{t=0} = q_i \Leftrightarrow C_1 + C_2 = q_i$ και $\dot{q}|_{t=0} = v_i \Leftrightarrow \omega(C_1 - C_2) = v_i$ δίνουν $C_1 = \dfrac{q_i + v_i/\omega}{2}$, $C_2 = \dfrac{q_i - v_i/\omega}{2}$. Άρα η λύση είναι $q = \dfrac{q_i + v_i/\omega}{2}e^{\omega t} + \dfrac{q_i - v_i/\omega}{2}e^{-\omega t}$. (Γράφεται και σαν $q = q_i \cosh(\omega t) + \dfrac{v_i}{\omega}\sinh(\omega t)$.)

Λόγω του εκθετικού $e^{\omega t}$ που απειρίζεται σε μεγάλους χρόνους (πρακτικά παίρνει μεγάλες τιμές για $t =$ μερικά $1/\omega$) το σώμα απομακρύνεται σημαντικά από την θέση x_0, κάτι που επίσης δείχνει ότι το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές.

Υπάρχει μία εξαίρεση σε αυτό που αντιστοιχεί στην περίπτωση $C_1 = 0 \Leftrightarrow v_i = -\omega q_i$. Στην περίπτωση αυτή το σώμα κινείται αρχικά προς το μέγιστο της δυναμικής ενέργειας (είτε από μεγαλύτερα x οπότε $q_i > 0$ και $v_i < 0$, είτε από μικρότερα x οπότε $q_i < 0$ και $v_i > 0$) και έχει ενέργεια ίση με αυτό το μέγιστο (το ολοκλήρωμα ενέργειας γράφεται $\dfrac{m\dot{q}^2}{2} + V(x_0) - \dfrac{m\omega^2}{2}q^2 = E$ και η ενέργεια βρίσκεται από τις αρχικές συνθήκες και προκύπτει $E = V(x_0)$ όταν $v_i = -\omega q_i$). Η λύση είναι τότε $q = q_i e^{-\omega t}$ και δείχνει ότι το σώμα προσεγγίζει επ' άπειρον το σημείο ισορροπίας. Θεωρητικά χρειάζεται άπειρο χρόνο για να φτάσει στο $q = 0$, αλλά πρακτικά φτάνει σε $t \sim 5/\omega$.

Αν λοιπόν ένα σώμα κινείται προς ένα μέγιστο της δυναμικής ενέργειας και έχει ενέργεια ίση με τη μέγιστη τιμή αυτή, τότε θα κινείται επ' άπειρον (θεωρητικά) προς το σημείο του μεγίστου.[2]

Τα παραπάνω αφορούν την ιδιαίτερη περίπτωση όπου η ενέργεια είναι ακριβώς ίση με το μέγιστο της δυναμικής ενέργειας. Πρακτικά η ενέργεια μπορεί να είναι είτε ελάχιστα μικρότερη από το μέγιστο οπότε το σώμα μετά από μεγάλο χρόνο θα ανακλαστεί, είτε ελάχιστα μεγαλύτερη από το μέγιστο οπότε το σώμα μετά από μεγάλο χρόνο θα περάσει το μέγιστο.

Η εξίσωση κίνησης που επιλέχθηκε να επιλυθεί είναι η δεύτερης τάξης που προέκυψε από παραγώγιση του ολοκληρώματος ενέργειας (ή άμεσα από το νόμο Νεύτωνα). Ο λόγος είναι ότι η αυτή η εξίσωση είναι γραμμική, ομογενής, με σταθερούς συντελεστές και όπως είδαμε είναι εύκολο να επιλυθεί. Όπως και στην περίπτωση της δύναμης επαναφοράς, έτσι κι εδώ θα ήταν δυσκολότερη η επίλυση αν επιλέγαμε την εξίσωση κίνησης όπως δίνεται από το ολοκλήρωμα ενέργειας το οποίο δίνει κατά τα γνωστά $\pm\omega t = \displaystyle\int \frac{dq}{\sqrt{q^2 + C}}$, όπου $C = \dfrac{2}{m\omega^2}[E - V(x_0)]$. Ανάλογα με το πρόσημο της C το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής ($q = \sqrt{C}\sinh\phi$ αν $C > 0$ και $q = \pm\sqrt{-C}\cosh\phi$ αν $C < 0$).

Παράδειγμα 5.1:

Μελετήστε τη μονοδιάστατη κίνηση σώματος μάζας m στον άξονα x υπό την επίδραση δύναμης με δυναμική ενέργεια $V(x) = -4a^3x^5 + 10b^3x^2$, όπου a, b θετικές σταθερές. Συγκεκριμένα, απαντήστε τις ακόλουθες ερωτήσεις:

(α) Ποια τα σημεία ισορροπίας; Είναι ευσταθή ή ασταθή;

(β) Μελετήστε την κίνηση για τυχούσα ενέργεια E.

(γ) Ποια η περίοδος της κίνησης μικρού πλάτους γύρω από το $x = 0$;

(δ) Έστω για $t = 0$ η θέση του σώματος είναι $x_i = \frac{b}{2a}$ και η ταχύτητα v_i είναι αρνητική. Περιγράψτε την κίνηση, διακρίνοντας δύο περιπτώσεις:

($δ_1$) το σώμα φτάνει στο $x = +\infty$ και

($δ_2$) το σώμα εκτελεί περιοδική κίνηση. Ποιο ολοκλήρωμα δίνει τότε την περίοδο;

(ε) Αν το σώμα αρχικά βρίσκεται ακίνητο στο σημείο $x_i = \dfrac{b}{a}(5/2)^{1/3}$ ποια είναι η θέση του σε κάθε χρόνο;

Δίνεται το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{d\xi}{\xi\sqrt{\xi^3 - 1}} = \frac{2}{3}\arctan\sqrt{\xi^3 - 1} +$ σταθερά, για $\xi > 1$.

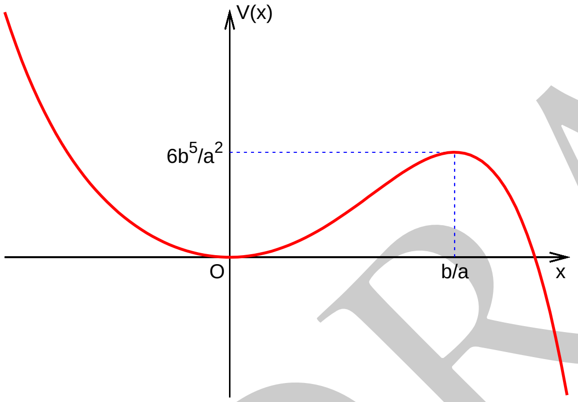
Λύση:

[2] Αυτό ισχύει σίγουρα στην περίπτωση που η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας είναι αναλυτική στο σημείο του μεγίστου.

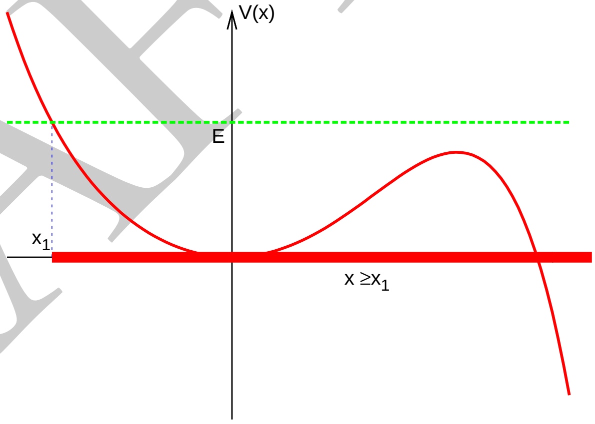
Μελέτη της συνάρτησης $V(x)$: Η συνάρτηση γράφεται $V = -4a^3x^5 + 10b^3x^2 = -4a^3x^2\left[x^3 - \frac{5}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^3\right]$. Η πρώτη παράγωγος είναι $\frac{dV}{dx} = -20a^3x^4 + 20b^3x = -20a^3x\left[x^3 - \left(\frac{b}{a}\right)^3\right]$ και η δεύτερη παράγωγος είναι $\frac{d^2V}{dx^2} = -80a^3x^3 + 20b^3 = -80a^3\left[x^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^3\right]$.

x	$-\infty$		0		$\frac{b}{4^{1/3}a}$		$\frac{b}{a}$		$+\infty$
$\frac{dV}{dx}$		-	0	+		+	0	-	
$\frac{d^2V}{dx^2}$		+		+	0	-		-	
V	$+\infty$	↘	0	↗		↗	$\frac{6b^5}{a^2}$	↘	$-\infty$

Η γραφική παράσταση της $V(x)$ φαίνεται στο σχήμα 5.4.



Σχήμα 5.4: Η γραφική παράσταση της $V(x)$.



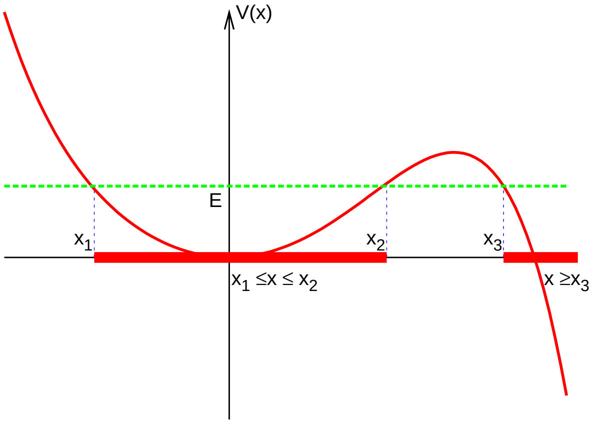
Σχήμα 5.5: Η περίπτωση $E > 6b^5/a^2$.

(α) Σημεία ισορροπίας είναι τα σημεία όπου $dV/dx = 0$, δηλ. τα $x_{01} = 0$ και $x_{02} = b/a$. Στο $x = 0$ η συνάρτηση $V(x)$ έχει τοπικό ελάχιστο, οπότε το σημείο είναι ευσταθές. Στο $x = b/a$ η συνάρτηση $V(x)$ έχει τοπικό μέγιστο, οπότε το σημείο είναι ασταθές.

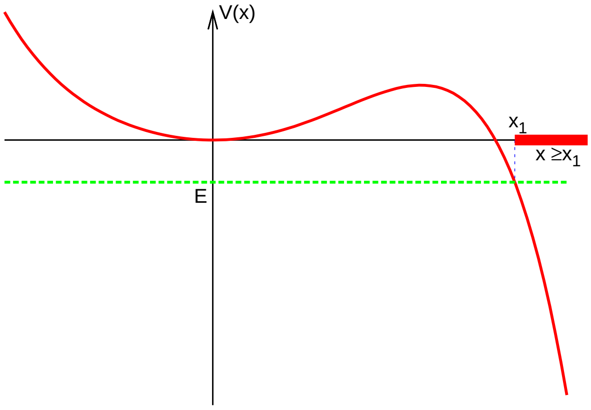
(β) Από το σχήμα 5.4 φαίνεται ότι οι περιπτώσεις που πρέπει να ξεχωρίσουμε είναι οι (β_1) $E > 6b^5/a^2$, (β_2) $0 < E < 6b^5/a^2$, (β_3) $E < 0$, (β_4) $E = 6b^5/a^2$ και (β_5) $E = 0$.

(β_1) Αν $E > 6b^5/a^2$ τότε η ανισότητα $V(x) \leq E$ έχει λύση $x \geq x_1$, όπου x_1 η μόνη λύση της ισότητας $V(x) = E$ (αντιστοιχεί στη τομή των καμπυλών $V(x)$ και E), βλέπε σχήμα 5.5. Ανεξάρτητα από την αρχική θέση x_i του σώματος και τη φορά της ταχύτητάς του,[3] το σώμα θα καταλήξει στο $x = +\infty$. Αν $v_i > 0$ το σώμα θα κινείται συνεχώς προς μεγαλύτερα x, αφού δεν θα συναντήσει σημείο όπου οι καμπύλες $V(x)$ και E τέμνονται, κάτι που είναι απαραίτητο ώστε να μηδενιστεί η ταχύτητα και το σώμα στη συνέχεια να αλλάξει φορά κίνησης. Αν αρχικά $v_i < 0$, δηλ. το σώμα κινείται προς μικρότερα x, τότε θα προχωρήσει μέχρι το $x = x_1$ όπου η ταχύτητα μηδενίζεται. Στο σημείο αυτό είναι $F(x_1) = -dV/dx|_{x=x_1} > 0$, οπότε το σώμα θα αρχίσει να κινείται προς μεγαλύτερα x και θα φτάσει στο $x = +\infty$. Σε κάθε θέση το μέτρο της ταχύτητας βρίσκεται από $mv^2/2 = T$, όπου $T = E - V(x)$ είναι η απόσταση μεταξύ των καμπυλών $V(x)$ και E στη δεδομένη θέση x.

[3]Για δεδομένα x_i και E το μέτρο της αρχικής ταχύτητας είναι $|v_i| = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x_i)\right]}$ (από $\frac{mv_i^2}{2} + V(x_i) = E$).



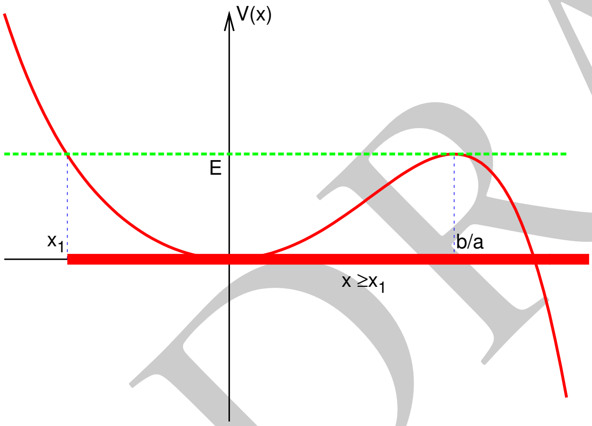
Σχήμα 5.6: Η περίπτωση $0 < E < 6b^5/a^2$.



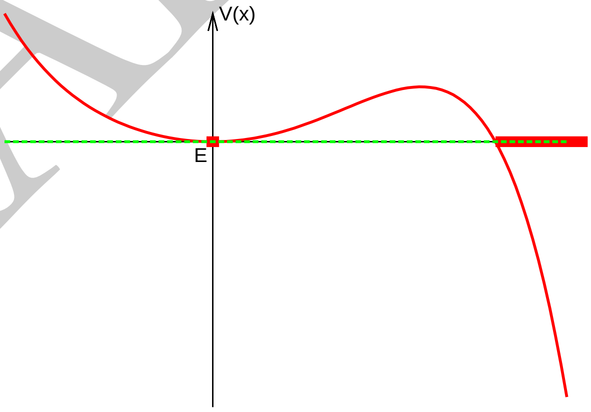
Σχήμα 5.7: Η περίπτωση $E < 0$.

(β_2) Αν $0 < E < 6b^5/a^2$ η ανισότητα $V(x) \leq E$ έχει σα λύσεις δυο περιοχές, τις $x_1 \leq x \leq x_2$ και $x \geq x_3$, όπου x_1, x_2, x_3 είναι οι λύσεις της ισότητας $V(x) = E$, με $x_1 < x_2 < x_3$, βλέπε σχήμα 5.6.
Αν αρχικά το σώμα βρίσκεται στο χώρο $x_1 \leq x_i \leq x_2$ θα παραμείνει για πάντα εκεί εκτελώντας ταλάντωση μεταξύ των ακραίων σημείων $x = x_1$ και $x = x_2$.[4]
Αν αρχικά το σώμα έχει $x_i \geq x_3$ τότε, ανεξάρτητα από τη φορά κίνησής του θα καταλήξει στο $x = +\infty$.

(β_3) Αν $E < 0$, η ανισότητα $V(x) \leq E \Leftrightarrow x \geq x_1$, όπου x_1 η λύση της ισότητας $V(x) = E$, βλέπε σχήμα 5.7. Ανεξάρτητα από την αρχική θέση και φορά κίνησής του, το σώμα θα καταλήξει στο $x = +\infty$.



Σχήμα 5.8: Η περίπτωση $E = 6b^5/a^2$.



Σχήμα 5.9: Η περίπτωση $E = 0$.

(β_4) Το να εξετάσουμε τη περίπτωση όπου η ενέργεια είναι ακριβώς ίση με τη τιμή $6b^5/a^2$, δηλ. $E = 6b^5/a^2$, έχει μόνο θεωρητικό ενδιαφέρον. Και αυτό γιατί πρακτικά δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε την ενέργεια με άπειρη ακρίβεια΄ έτσι η E θα είναι είτε λίγο μεγαλύτερη (έστω και απειροστά) από την τιμή $6b^5/a^2$ οπότε η μελέτη καλύπτεται από τη περίπτωση (β_1), είτε λίγο μικρότερη από $6b^5/a^2$ οπότε η μελέτη καλύπτεται από τη περίπτωση (β_2). Στη συνέχεια, πρώτα θα μελετηθεί η περίπτωση όπου $E = 6b^5/a^2$ και μετά θα σχολιαστεί πως αυτή θα μπορούσε να θεωρηθεί σαν όριο των περιπτώσεων $E \to (6b^5/a^2)^+$ και $E \to (6b^5/a^2)^-$.

Για $E = 6b^5/a^2$ η ανισότητα $V(x) \leq E$ δίνει ότι επιτρεπτή περιοχή κίνησης είναι η $x \geq x_1$, όπου x_1 η μικρότερη (αρνητική) λύση της ισότητας $V(x) = 6b^5/a^2$, βλέπε σχήμα 5.8. Ανάλογα όμως με τις αρχικές συνθήκες έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

• Αν αρχικά το σώμα έχει θέση $x_i < b/a$ τότε θα καταλήξει να κινείται επ άπειρον προς το σημείο b/a (ακόμα

[4] Το σώμα κινούμενο προς μεγαλύτερα x θα φτάνει στο $x = x_2$ όπου η ταχύτητά του μηδενίζεται. Στο σημείο αυτό η δύναμη $F(x_2) < 0$ θα το αναγκάζει να κινηθεί προς μικρότερα x. Όμοια, όταν το σώμα κινείται προς μικρότερα x θα φτάνει στο $x = x_1$ όπου η ταχύτητά του μηδενίζεται, και λόγω της $F(x_1) > 0$ θα κινείται προς μεγαλύτερα x.

και αν αρχικά η ταχύτητά του είναι αρνητική οπότε θα αλλάξει φορά κίνησης στο σημείο $x = x_1$). Θεωρητικά χρειάζεται άπειρο χρόνο για να φτάσει στο σημείο b/a.
• Αν αρχικά το σώμα βρίσκεται στο $x_i = b/a$ (οπότε έχει μηδενική ταχύτητα αφού $mv_i^2/2 = E - V(x_i) = 0$) θα παραμείνει εκεί (το σημείο b/a είναι σημείο ισορροπίας).
• Αν αρχικά το σώμα έχει θέση $x_i > b/a$ και φορά κίνησης προς τα μικρότερα x ($v_i < 0$) θα συνεχίσει για πάντα να κινείται προς το σημείο b/a.
• Αν αρχικά το σώμα έχει θέση $x_i > b/a$ και φορά κίνησης προς τα μεγαλύτερα x θα καταλήξει στο $x = +\infty$.

Όπως ειπώθηκε προηγούμενα η περίπτωση αυτή μπορεί να θεωρηθεί σαν όριο της περίπτωσης (β_1) για $E \to (6b^5/a^2)^+$. Πράγματι, αν σκεφτούμε διαφορετικές περιπτώσεις με Ε $> 6b^5/a^2$, αλλά διαρκώς μειούμενο, παρατηρούμε ότι η κινητική ενέργεια $T = E - V(b/a)$ που έχει το σώμα στο σημείο b/a διαρκώς μειώνεται, επομένως το πέρασμα του σώματος από το σημείο αυτό διαρκεί όλο και περισσότερο χρόνο. Όταν η ενέργεια γίνει ακριβώς $6b^5/a^2$ τότε η ταχύτητα στο σημείο b/a μηδενίζεται και το πέρασμα του σώματος χρειάζεται άπειρο χρόνο. (Τότε οι περιοχές $x_1 \leq x < b/a$ και $x > b/a$ γίνονται ανεξάρτητες.) Όμοια, μπορούμε να σκεφτούμε τι γίνεται για διαφορετικές περιπτώσεις (β_2) με διαρκώς αυξανόμενη ενέργεια. Οι περιοχές $x_1 \leq x \leq x_2$ και $x \geq x_3$ του σχήματος 5.6 τείνουν να ενωθούν. Η περίοδος της ταλάντωσης αν αρχικά $x_i < b/a$ αυξάνεται όσο η ενέργεια πλησιάζει την τιμή $6b^5/a^2$ ' επίσης η κίνηση προς τα μικρότερα x αν αρχικά $x_i > b/a$ γίνεται όλο και πιο αργή όσο η ενέργεια πλησιάζει την τιμή $6b^5/a^2$.
Πρακτικά λοιπόν η ενέργεια είτε θα είναι λίγο (έστω απειροστά) μεγαλύτερη από $6b^5/a^2$ οπότε το σώμα θα μπορέσει να περάσει από το σημείο b/a σε πεπερασμένο χρόνο, είτε θα είναι λίγο (έστω απειροστά) μικρότερη από $6b^5/a^2$ οπότε θα κάνει ταλάντωση αν αρχικά $x_i < b/a$ ή θα καταλήξει στο $x = +\infty$ αν αρχικά $x_i > b/a$. Επίσης αν η αρχική θέση είναι b/a, επειδή επίσης δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε το x_i με άπειρη ακρίβεια, θα είναι είτε $x_i = (b/a)^+$ οπότε το σώμα θα αρχίσει να κινείται προς μεγαλύτερα x και θα καταλήξει στο $x = +\infty$, είτε $x_i = (b/a)^-$ οπότε το σώμα θα αρχίσει να κινείται προς μικρότερα x και θα εκτελεί ταλάντωση. Η απροσδιοριστία αυτή είναι συνέπεια του γεγονότος ότι το σημείο b/a είναι ασταθές σημείο ισορροπίας.

(β_5) Αν $E = 0$ η ανισότητα $V(x) \leq 0$ δίνει λύσεις $x = 0$ ή $x \geq x_3$, όπου x_3 η θετική λύση της ισότητας $V(x) = 0$, βλέπε σχήμα 5.9. Αν αρχικά το σώμα έχει θέση $x = 0$ θα μείνει για πάντα εκεί (κάτι που ενισχύεται και από το γεγονός ότι το σημείο αυτό είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας), ενώ αν αρχικά είναι στην περιοχή $x \geq x_1$ θα καταλήξει στο $x = +\infty$.

Η περίπτωση $E = 0$ μπορεί να θεωρηθεί το όριο της περίπτωσης (β_2) για ενέργειες διαρκώς μειούμενες προς την τιμή $E = 0$. Η περιοχή $x_1 \leq x \leq x_2$ της περίπτωσης (β_2), στην οποία το σώμα ταλαντώνεται μεταξύ των x_1 και x_2 καταλήγει στο να βρίσκεται το σώμα ακίνητο στο σημείο $x_1 = x_2 = 0$ (μηδενικό πλάτος ταλάντωσης).

(γ) Για x κοντά στο 0 η δυναμική ενέργεια απλοποιείται σε $V(x) \approx 10b^3x^2$ και άρα η δύναμη απλοποιείται σε $F(x) \approx -20b^3x$. Ο νόμος Νεύτωνα $m\ddot{x} = -20b^3x$ έχει λύση $x = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$, όπου $\omega = \sqrt{20b^3/m}$. Άρα η κίνηση είναι περιοδική (ταλάντωση) με περίοδο $T = 2\pi/\omega = \pi\sqrt{m/(5b^3)}$.

(δ) Αν v_i η αρχική ταχύτητα και $x_i = \frac{b}{2a}$ η αρχική θέση, η ενέργεια του σώματος είναι

$$E = \frac{mv_i^2}{2} + V\left(\frac{b}{2a}\right). \tag{5.4}$$

Είναι $E \geq V(\frac{b}{2a})$ και αφού $V(\frac{b}{2a}) = \frac{19b^5}{8a^2} > 0$ είναι $E > 0$. Ανάλογα με το αν είναι $E < 6b^5/a^2$ ή $E > 6b^5/a^2$ έχουμε τις ακόλουθες δυο περιπτώσεις.
(δ_1) Αν $E > 6b^5/a^2$, το οποίο χρησιμοποιώντας τη σχέση 5.4 ισοδυναμεί με

$$|v_i| > \sqrt{\frac{29b^5}{4ma^2}} \overset{v_i<0}{\Longleftrightarrow} v_i < -\sqrt{\frac{29b^5}{4ma^2}},$$

το σώμα θα κινηθεί προς μικρότερα x μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του στο σημείο $x = x_1$ όπου $E = V(x_1)$, βλέπε σχήμα 5.5. Στην πορεία του προς το x_1 το σώμα εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση μέχρι το $x = 0$ (αφού η κινητική ενέργεια $T = E - V(x)$ αυξάνει) και στη συνέχεια επιβραδυνόμενη κίνηση μέχρι το x_1 όπου η

ταχύτητα μηδενίζεται. Στη συνέχεια (και επειδή $F(x_1) = -dV/dx|_{x=x_1} > 0$) το σώμα θα αρχίσει να κινείται προς μεγαλύτερα x. Η κίνηση είναι επιταχυνόμενη μέχρι το $x = 0$, στη συνέχεια επιβραδυνόμενη μέχρι το $x = b/a$ όπου η κινητική του ενέργεια είναι $E - 6b^5/a^2$ και στη συνέχεια επιταχυνόμενη μέχρι το $x = +\infty$.
(δ_2) Αν $E < 6b^5/a^2$, το οποίο χρησιμοποιώντας τη σχέση 5.4 ισοδυναμεί με

$$|v_i| < \sqrt{\frac{29b^5}{4ma^2}} \overset{v_i<0}{\Longleftrightarrow} v_i > -\sqrt{\frac{29b^5}{4ma^2}},$$

το σώμα θα εκτελεί ταλάντωση μεταξύ των σημείων x_1 και x_2 τα οποία αποτελούν τις μικρότερες λύσεις της $E = V(x)$, βλέπε σχήμα 5.6. (Σημειώστε ότι η αρχική θέση του σώματος βρίσκεται μέσα στο διάστημα $x_1 \le x_i \le x_2$. Για $E = V(\frac{b}{2a})$ – τιμή που αποτελεί την ελάχιστη πιθανή ενέργεια – είναι $x_i = x_2$ και η αρχική ταχύτητα είναι μηδέν.)

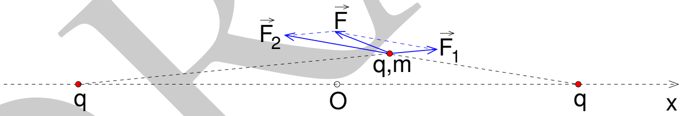
Το χρονικό διάστημα για να πάει το σώμα από το x_1 στο x_2 βρίσκεται ολοκληρώνοντας την $dt = \dfrac{dx}{\dot{x}}$ με $\dot{x} = +\sqrt{\dfrac{2}{m}[E - V(x)]}$ από το ολοκλήρωμα ενέργειας, διότι η ταχύτητα είναι θετική. Δηλ. $\Delta t_{x_1 \to x_2} = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}}$.

Το χρονικό διάστημα για να γυρίσει το σώμα από το x_2 στο x_1 είναι ίσο, διότι η ταχύτητα είναι αντίθετη σε κάθε σημείο, αλλά ίση κατά μέτρο. Αυτό φαίνεται και από τη σχέση $\Delta t_{x_2 \to x_1} = \displaystyle\int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{-\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}}$ (η ταχύτητα είναι αρνητική). Επομένως η περίοδος είναι $T = 2\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}}$.

(ε) Η ενέργεια είναι $E = 0 + V(x_i) = 0$ και σύμφωνα με τα προηγούμενα το σώμα θα αρχίσει να κινείται προς μεγαλύτερα x (θα φτάσει στο $+\infty$). Η ταχύτητά του είναι θετική και βρίσκεται από το ολοκλήρωμα ενέργειας $\dot{x} = +\sqrt{\frac{2}{m}[0 - V(x)]} = \sqrt{\frac{2}{m}}\left(4a^3x^5 - 10b^3x^2\right)$. Χωρίζοντας τις μεταβλητές και ολοκληρώνοντας προκύπτει $\displaystyle\int_0^t dt = \int_{x_i}^{x} \frac{dx}{\dot{x}} \Leftrightarrow t = \int_{x_i}^{x} \frac{dx}{x\sqrt{\frac{8a^3}{m}\left(x^3 - x_i^3\right)}}$. Η αλλαγή μεταβλητής $x = x_i\xi$ μετατρέπει το ολοκλήρωμα στο δοσμένο και άρα $t = \sqrt{\dfrac{m}{8a^3x_i^3}}\displaystyle\int_1^{x/x_i} \frac{d\xi}{\xi\sqrt{\xi^3 - 1}} = \sqrt{\frac{m}{18a^3x_i^3}}\left[\arctan\sqrt{\xi^3 - 1}\right]_1^{\xi} = \sqrt{\dfrac{m}{18a^3x_i^3}}\arctan\sqrt{x^3/x_i^3 - 1}$. Αντιστρέφοντας τη σχέση βρίσκουμε $\sqrt{x^3/x_i^3 - 1} = \tan\left(\sqrt{\dfrac{18a^3x_i^3}{m}}t\right) \Leftrightarrow x = x_i\left[1 + \tan^2\left(\sqrt{\dfrac{18a^3x_i^3}{m}}t\right)\right]^{1/3}$, ή απλούστερα $x = x_i\cos^{-2/3}\left(\sqrt{\dfrac{18a^3x_i^3}{m}}t\right)$.
(Το σώμα θα φτάσει στο άπειρο σε χρόνο $\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m}{18a^3x_i^3}}$. Το ότι το σώμα διανύει άπειρο μήκος σε πεπερασμένο χρόνο οφείλεται στο ότι η ταχύτητα απειρίζεται σαν αποτέλεσμα της $\lim\limits_{x\to+\infty} V(x) = -\infty$.)

Να σημειωθεί ότι οι υπολογισμοί θα είχαν απλοποιηθεί σημαντικά αν επιλέγαμε κατάλληλες μονάδες ώστε να θέσουμε στις εκφράσεις τα a, b και m ίσα με μονάδες. Αυτό είναι δυνατόν διότι: παρατηρώντας την έκφραση της δυναμικής ενέργειας συμπεραίνουμε ότι ο λόγος b/a έχει διαστάσεις μήκους (ώστε οι δύο όροι της V να έχουν ίδιες μονάδες) και η ποσότητα b^5/a^2 έχει μονάδες ενέργειας. Από τις δύο αυτές ποσότητες και τη μάζα m μπορούμε να φτιάξουμε ποσότητα με μονάδα χρόνου. Με βάση τη σχέση $[E] = [M][v]^2 \Rightarrow [T] = [L][M]^{1/2}[E]^{-1/2}$ καταλήγουμε στο ότι η ποσότητα αυτή είναι η $m^{1/2}/b^{3/2}$. Αν λοιπόν μετράμε μήκη σε b/a, μάζα σε m και χρόνους σε $m^{1/2}/b^{3/2}$ (δηλ. θέσουμε $x \to x(b/a)$, $t \to tm^{1/2}/b^{3/2}$, $\dot{x} \to \dot{x}b^{5/2}/(am^{1/2})$, $V \to Vb^5/a^2$, $E \to Eb^5/a^2$) φεύγουν τα a, b, m από όλες τις σχέσεις, δηλ. παίρνουμε ίδιες εξισώσεις με το να θέσουμε στις αρχικές a, b και m ίσα με μονάδες.

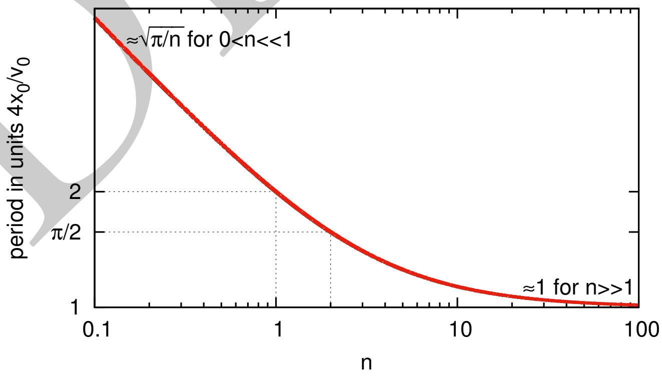
Παράδειγμα 5.2:
Σωμάτιο μάζας m και φορτίου q μπορεί να κινείται στο ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ δύο άλλων ίσων φορτίων που κρατούνται ακίνητα στα σημεία $x = \pm d$ άξονα $x'Ox$. Ποια η περίοδος των μικρών ταλαντώσεων του m γύρω από τη θέση $x = 0$;
Αν το σωμάτιο m είναι ελεύθερο να κινηθεί και σε άλλες κατευθύνσεις εκτός του άξονα $x'Ox$, θα είναι ευσταθής η ισορροπία του στο $x = y = z = 0$; (Εξετάστε τη φορά της ολικής δύναμης σε μια μετατοπισμένη θέση.)
Η δύναμη Coulomb από φορτίο A σε φορτίο B είναι $\dfrac{q_A q_B}{4\pi\varepsilon_0 \tau_{AB}^2}\hat{\tau}_{AB}$, όπου τ_{AB} η απόσταση των φορτίων και $\hat{\tau}_{AB}$ η διανυσματική μονάδα από το A στο B.
Λύση:
Αν το σωμάτιο είναι στη θέση $x \in (-d, d)$ δέχεται δύναμη $\boldsymbol{F}_1 = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (d+x)^2}\hat{x}$ από το φορτίο στη θέση $x = -d$ και $\boldsymbol{F}_2 = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (d-x)^2}(-\hat{x})$ από το φορτίο στη θέση $x = d$. Η συνολική δύναμη είναι $\boldsymbol{F} = F(x)\hat{x}$ με $F(x) = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (d+x)^2} - \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (d-x)^2}$.
Η δύναμη μηδενίζεται για $x = 0$, οπότε αυτό είναι σημείο ισορροπίας. Για μικρές ταλαντώσεις $|x| \ll d$ είναι $F(x) \approx F|_{x=0} + \left.\dfrac{dF}{dx}\right|_{x=0} x = -\dfrac{q^2}{\pi\varepsilon_0 d^3}x$, οπότε η εξίσωση κίνησης γράφεται $\ddot{x} + \dfrac{q^2}{\pi\varepsilon_0 d^3 m}x = 0$.
Είναι $\omega^2 = \dfrac{q^2}{\pi\varepsilon_0 d^3 m}$ και $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\dfrac{4\pi^3\varepsilon_0 d^3 m}{q^2}}$.
Η μελέτη μπορεί να γίνει και με βάση τη δυναμική ενέργεια $V(x) = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(d+x)} + \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(d-x)} = \dfrac{q^2 d}{2\pi\varepsilon_0(d^2-x^2)}$.
Είναι $\omega^2 = \dfrac{1}{m}\left.\dfrac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=0}$, $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.
Αν το σωμάτιο m κινηθεί εκτός του άξονα x, η συνισταμένη των δυνάμεων τείνει να το απομακρύνει περισσότερο από τον άξονα.



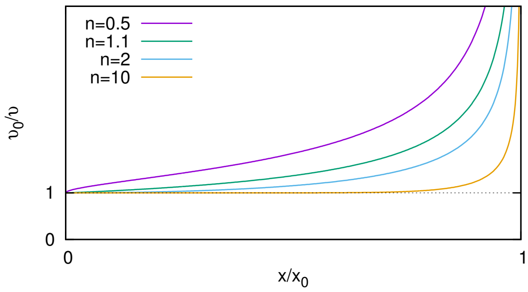
Άρα η ισορροπία είναι ασταθής.
Η απάντηση μπορεί να δοθεί και μέσω της δυναμικής ενέργειας $V(x,y,z) = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(d+x)^2+y^2+z^2}} + \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(d-x)^2+y^2+z^2}}$. Οι παράγωγοι $\left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{x=y=z=0}$, $\left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right|_{x=y=z=0}$ προκύπτουν αρνητικές.
Γενικά για ένα ηλεκτροστατικό πεδίο στο κενό το δυναμικό ικανοποιεί την εξίσωση Laplace $\nabla^2\Phi = 0$. Η δυναμική ενέργεια φορτίου q σε ένα τέτοιο πεδίο είναι $V = q\Phi$. Τυχόν θέση ισορροπίας (όπου $\nabla V = 0$) σε τέτοιο πεδίο είναι πάντα ασταθής, γιατί ακόμα και αν σε κάποια κατεύθυνση, π.χ. στην x, η V έχει ελάχιστο (δηλ. $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} > 0$ στο σημείο αυτό), υπάρχει σίγουρα άλλη κατεύθυνση στην οποία έχει μέγιστο γιατί το άθροισμα των δευτέρων παραγώγων (που ισούται με την Λαπλασιανή) είναι μηδενικό.

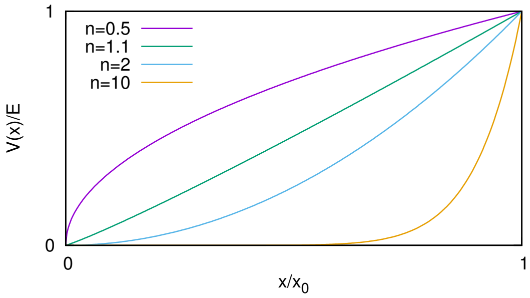
Παράδειγμα 5.3:
Σ' ένα ιδιαίτερο ελατήριο η δυναμική ενέργεια είναι ανάλογη της n-οστής δύναμης της απομάκρυνσης, δηλ. $V = A|x|^n$ με A, n θετικές σταθερές.
(α) Αν σώμα m, δεμένο στο ελατήριο αυτό, εκτελεί ταλάντωση πλάτους x_0, εκτιμήστε διαστατικά την περίοδο της κίνησης.
(β) Βρείτε την ακριβή τιμή της περιόδου.

Δίνεται $\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^a}} = \frac{\Gamma(1+1/a)}{\Gamma(1/2+1/a)}\sqrt{\pi}$ για $a > 0$.
(γ) Κάποιος ισχυρίζεται ότι όσο το πλάτος αυξάνεται η περίοδος αυξάνεται επίσης, διότι το σώμα έχει να διανύσει μεγαλύτερο μήκος. Κάποιος άλλος ισχυρίζεται ότι όσο το πλάτος αυξάνεται η περίοδος μειώνεται, διότι ασκείται στο σώμα μεγαλύτερη δύναμη που του δίνει μεγαλύτερη ταχύτητα. Ποιος έχει δίκιο;
Λύση:
(α) Οι μονάδες του A είναι ενέργεια ανά μήκος εις την n, άρα $[A] = \frac{[M][L]^2/[T]^2}{[L]^n}$. Η σχέση $T \propto m^\alpha A^\beta x_0^\gamma$ δίνει $[T] = [M]^\alpha \left([M][L]^{2-n}[T]^{-2}\right)^\beta [L]^\gamma \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 = (2-n)\beta + \gamma \text{ (από μήκη)}, \\ 0 = \alpha + \beta \text{ (από μάζες)}, \\ 1 = -2\beta \text{ (από χρόνους)}, \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 1/2, \\ \beta = -1/2, \\ \gamma = (2-n)/2. \end{array}\right.$ Επομένως η περίοδος είναι $T \propto \sqrt{\frac{m}{Ax_0^{n-2}}}$.
(β) Το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\frac{m\dot{x}^2}{2} + A|x|^n = E$. Εφαρμόζοντάς το στα άκρα της κίνησης όπου η ταχύτητα είναι μηδενική και $|x| = x_0$ το πλάτος της ταλάντωσης βρίσκουμε $E = Ax_0^n$. Άρα ισχύει $\frac{m\dot{x}^2}{2} + A|x|^n = Ax_0^n \Leftrightarrow |\dot{x}| = \sqrt{\frac{2A}{m}(x_0^n - |x|^n)}$.
Η κίνηση είναι συμμετρική γύρω από τη θέση ισορροπίας, άρα η περίοδος είναι τετραπλάσια του χρόνου της κίνησης από το $x = 0$ στο $x = x_0$ (κατά την οποία η ταχύτητα είναι θετική), δηλ. $T = 4\int_0^{x_0} \frac{dx}{\dot{x}} = 4\int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(Ax_0^n - Ax^n\right)}}$. Αλλάζοντας μεταβλητή $x = \xi x_0$ και χρησιμοποιώντας το δοσμένο ολοκλήρωμα βρίσκουμε $T = 4\sqrt{\frac{m}{2Ax_0^{n-2}}}\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^n}} = \sqrt{\frac{8\pi m}{Ax_0^{n-2}}}\frac{\Gamma(1+1/n)}{\Gamma(1/2+1/n)}$.
Αν $v_0 = \sqrt{\frac{2Ax_0^n}{m}}$ η ταχύτητα στην θέση ισορροπίας το ολοκλήρωμα ενέργειας γράφεται $\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$ και η περίοδος $\frac{T}{4x_0/v_0} = \int_0^{x_0} \frac{dx/x_0}{v/v_0} = \frac{\Gamma(1+1/n)}{\Gamma(1/2+1/n)}\sqrt{\pi}$.



Η περίοδος φαίνεται σαν εμβαδόν στο διάγραμμα $x - 1/v$ (αφού $dt = \frac{1}{v}dx$). Το εμβαδόν του ορθογωνίου που δίνει $4x_0/v_0$ είναι καλή εκτίμηση, ιδιαίτερα για μεγάλα n για τα οποία η δύναμη είναι σημαντική μόνο στα άκρα της κίνησης (η δυναμική ενέργεια προσεγγίζει συνάρτηση δέλτα στα άκρα της κίνησης).





(γ) Κανένας δεν είναι απόλυτα σωστός γιατί και οι δύο παράγοντες παίζουν ρόλο. Για $n < 2$ υπερισχύει ο πρώτος και η περίοδος αυξάνεται με το πλάτος, ενώ για $n > 2$ υπερισχύει ο δεύτερος και η περίοδος μειώνεται με το πλάτος. (Για μεγάλα n η δύναμη παραμένει αμελητέα σε μεγάλη περιοχή γύρω από το σημείο ισορροπίας οπότε για «μικρά» πλάτη η περίοδος είναι «άπειρη». Η τιμή της δύναμης στα άκρα εξαρτάται έντονα από το πλάτος, γι' αυτό η περίοδος μειώνεται όταν το πλάτος αυξάνεται.) Για $n = 2$ (αρμονικός ταλαντωτής) έχουμε ισοπαλία και η περίοδος είναι ανεξάρτητη του πλάτους.

5.2 Διαγράμματα φάσης

Μέχρι τώρα έχουμε μιλήσει για τροχιές σωμάτων στο θεσεογραφικό χώρο (τον συνήθη τριδιάστατο χώρο που περιγράφεται από τρεις χωρικές συντεταγμένες π.χ. από τις καρτεσιανές x, y, z). Κάθε τροχιά περιγράφεται από δύο σχέσεις μεταξύ των συντεταγμένων (ώστε από τρεις διαστάσεις να κατέβουμε σε μονοδιάστατη καμπύλη) και περιγράφει τα σημεία από τα οποία περνά το σώμα καθώς κινείται. Η τροχιά αυτή όμως δεν δίνει πληροφορία για την ταχύτητα του σώματος σε κάθε σημείο της, πόσο γρήγορα δηλ. διανύει το σώμα την συγκεκριμένη τροχιά. Υπάρχει ένας άλλος χώρος, ο χώρος φάσης που δίνει και αυτή την πληροφορία.

Ο χώρος φάσης αποτελείται από τις τρεις χωρικές συντεταγμένες, αλλά και τις τρεις χρονικές τους παραγώγους ή ισοδύναμα τις αντίστοιχες ορμές. Αν π.χ. επιλέξουμε καρτεσιανές συντεταγμένες, χώρος φάσης είναι ο εξαδιάστατος χώρος (x, y, z, p_x, p_y, p_z), ή ισοδύναμα ο χώρος $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. Οι τροχιές σε αυτό το χώρο, οι καμπύλες φάσης όπως λέμε, περιγράφουν πλήρως την κίνηση, δείχνουν την τροχιά στο θεσεογραφικό χώρο (που είναι υποσύνολο του χώρου φάσης), αλλά και το πόσο γρήγορα κινείται το σώμα σε κάθε σημείο. Το αντίτιμο είναι βέβαια ότι ο χώρος αυτός έχει διπλάσιες διαστάσεις σε σχέση με το θεσεογραφικό χώρο, κάνοντας μη τετριμμένη την απεικόνισή τους. Εδώ θα περιοριστούμε σε μονοδιάστατα προβλήματα στα οποία ο χώρος φάσης είναι διδιάστατος, ορίζεται από μία θέση και την αντίστοιχη ορμή. Για να καλύψουμε περιπτώσεις όπου η χωρική συντεταγμένη δεν είναι καρτεσιανή (μπορεί π.χ. να είναι μία γωνία σε πολικές) θα την συμβολίζουμε q και την αντίστοιχη ορμή p. Στα παρακάτω πολλές φορές χρησιμοποιούμε τη σχέση $p = m\dot{q}$ που ισχύει σε καρτεσιανές, η γενίκευση όμως είναι εύκολη για οποιαδήποτε άλλη σχέση που συνδέει την p με την $\dot{q}$.

Αν ξέρουμε τις αρχικές τιμές q_i και p_i σε κάποιο αρχικό χρόνο τότε η καμπύλη φάσης είναι μονοσήμαντα καθορισμένη μέσω του νόμου Νεύτωνα. Οι σχέσεις $q = q(t; q_i, p_i)$ και $p = p(t; q_i, p_i)$ δίνουν σε παραμετρική μορφή την καμπύλη αυτή (με παράμετρο το χρόνο). Σε άξονες με q οριζόντιο και p κατακόρυφο οι καμπύλες φάσης καθώς ο χρόνος αυξάνεται διαγράφονται δεξιόστροφα (δηλ. κατά την ανάδρομη φορά, όπως οι δείκτες του ρολογιού), γιατί θετικό(αρνητικό) p σημαίνει ότι η q αυξάνεται(μειώνεται) με το χρόνο. Το πως αλλάζει η ορμή με το χρόνο το δίνει ο νόμος Νεύτωνα $\dot{p} = F(q, p, t)$, όπου στη γενική περίπτωση η δύναμη είναι συνάρτηση και της θέσης και της ορμής και του χρόνου.
Ένα άλλο γενικό χαρακτηριστικό των καμπυλών φάσης είναι ότι όταν τέμνουν τον άξονα θέσης είναι κάθετες σε αυτόν. Αυτό συμβαίνει γιατί στο σημείο τομής είναι $p = 0$ και αφού $p = m\dot{q}$ η θέση τοπικά δεν μεταβάλλεται.

Στις περιπτώσεις χρονοανεξάρτητων πεδίων δύναμης $F = F(q, p)$, αν σχεδιάσουμε όλες τις καμπύλες φάσης που αντιστοιχούν σε διαφορετικές αρχικές συνθήκες παίρνουμε αυτό που ονομάζουμε διάγραμμα φάσης, ένα σύνολο από καμπύλες που αποτελεί την ταυτότητα του πεδίου δύναμης, γιατί το πεδίο μπορεί να καθοριστεί με βάση αυτές τις καμπύλες όπως θα δούμε αργότερα. Στην περίπτωση αυτή οι διάφορες καμπύλες δεν τέμνονται, διότι η κλίση τους σε κάθε σημείο $\frac{dp}{dq} = \frac{\dot{p}(t;q_i,p_i)}{\dot{q}(t;q_i,p_i)} = \frac{F(q,p)}{p/m}$ είναι μονοσήμαντα καθορισμένη, δηλ. εξαρτάται από το ίδιο το σημείο και όχι από τις αρχικές συνθήκες.

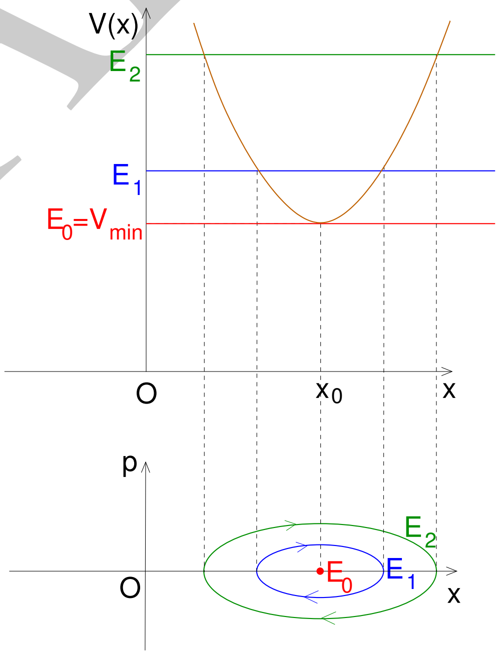
Για να βρούμε λοιπόν μία καμπύλη φάσης λύνουμε το σύστημα εξισώσεων $\dot{q} = p/m, \dot{p} = F$. Στην περίπτωση χρονοανεξάρτητης δύναμης $F = F(q,p)$, ο χρόνος απαλείφεται διαιρώντας κατά μέλη τις δύο σχέσεις και οι καμπύλες περιγράφονται πλήρως από την διαφορική εξίσωση $\frac{dp}{dq} = \frac{F(q,p)}{p/m}$, η οποία έχει μοναδική λύση αν ξέρουμε ότι η καμπύλη περνά από συγκεκριμένο σημείο (q_i, p_i), ανεξάρτητα του ποιος είναι ο χρόνος στον οποίο πέρασε το σώμα από αυτό το σημείο.

Στην υποπερίπτωση όπου η δύναμη είναι συνάρτηση μόνο της θέσης υπάρχει όπως ξέρουμε ολοκλήρωμα ενέργειας $\frac{p^2}{2m} + V(q) = E$, το οποίο αποτελεί ταυτόχρονα και της εξίσωση των καμπυλών φάσης αφού συνδέει θέση και ορμή. Για κάθε τιμή της ενέργειας έχουμε διαφορετική καμπύλη φάσης (ή πολλές καμπύλες γιατί μία δεν καλύπτει πάντα όλη την επιτρεπτή περιοχή κίνησης). Στην περίπτωση αυτή μάλιστα οι καμπύλες είναι συμμετρικές στις θετικές και αρνητικές ορμές, αφού η εξίσωση τους μπορεί να γραφεί $p = \pm\sqrt{2m[E - V(q)]}$.

Για να μπορούμε να σχεδιάζουμε τα διαγράμματα φάσης πολύπλοκων πεδίων θα ξεκινήσουμε με απλές υποπεριπτώσεις που περιγράφουν τοπικά οποιαδήποτε συνάρτηση $V(q)$. Σημαντικές είναι οι περιπτώσεις του αρμονικού ταλαντωτή και της απωστικής γραμμικής δύναμης, γιατί περιγράφουν τις καμπύλες φάσης κοντά σε ελάχιστα ή μέγιστα της δυναμικής ενέργειας, αντίστοιχα.

5.2.1 Διάγραμμα φάσης αρμονικού ταλαντωτή

Η δυναμική ενέργεια αρμονικού ταλαντωτή με θέση ισορροπίας $q = 0$ είναι παραβολή με τα κοίλα πάνω και κορυφή το σημείο ισορροπίας $V = \frac{m\omega^2}{2}q^2 + C$ (η προσθετική σταθερά δεν επηρεάζει την φυσική του προβλήματος, αλλά για λόγους πληρότητας την κρατάμε). Η σχέση αυτή καλύπτει την συμπεριφορά γύρω από ένα τοπικό ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας $V(x)$ στη θέση x_0, για την οποία $V(x_0) = C$, $V'(x_0) = 0$, $V''(x_0) = m\omega^2 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{V''(x_0)/m}$ και $q = x - x_0$.



Σχήμα 5.10: Πάνω: η δυναμική ενέργεια για αρμονικό ταλαντωτή. Κάτω: το αντίστοιχο διάγραμμα φάσης.

Οι καμπύλες φάσης περιγράφονται μαθηματικά από το ολοκλήρωμα ενέργειας $\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 = E'$ όπου $E' = E - C$ (η κινητική ενέργεια έχει γραφεί συναρτήσει της ορμής). Για κάθε τιμή της ενέργειας έχουμε μία καμπύλη.
Για την ελάχιστη ενέργεια $E' = 0$ η σχέση δίνει το σημείο $q = 0, p = 0$ το οποίο αντιστοιχεί σε ακινησία στο σημείο ισορροπίας.
Για κάθε ενέργεια $E' > 0$ το ολοκλήρωμα ενέργειας γράφεται $\left(\frac{p}{\sqrt{2mE'}}\right)^2 + \left(\frac{q}{\sqrt{2E'/m\omega^2}}\right)^2 = 1$ και εκφράζει έλλειψη στο χώρο φάσης με ημιάξονα $\sqrt{2mE'}$ στον άξονα των ορμών και $\sqrt{2E'/m\omega^2}$ στον άξονα των θέσεων. Πράγματι, όπως δείχνει το σχήμα, σκεπτόμενοι την επιτρεπτή περιοχή κίνησης για κάθε ενέργεια μέσω του γραφήματος της δυναμικής ενέργειας, αυτή είναι ανάμεσα στα σημεία $q = \pm\sqrt{2E'/m\omega^2}$ που το σώμα ανακλάται και αποτελούν τις λύσεις της $V(x) = E$.

Ακολουθώντας την κίνηση πάνω σε κάποια καμπύλη ξεκινώντας π.χ. από το αριστερό άκρο της ταλάντωσης όπου η ορμή είναι μηδενική, η ορμή γίνεται θετική και αυξάνεται μέχρι το σημείο ισορροπίας, κατόπιν μειώνεται μέχρι μηδενισμού στο δεξιό άκρο της ταλάντωσης, μετά γίνεται αρνητική και αυξάνεται κατ' απόλυτη τιμή, κ.ο.κ. Το σχήμα των κλειστών αυτών καμπυλών θα μπορούσαμε να το σχεδιάσουμε με βάση το γράφημα της $V(x)$ και μόνο. Η μαθηματική έκφραση (το ολοκλήρωμα ενέργειας) δείχνει ότι είναι ελλείψεις.
Διαφορετικές ταλαντώσεις έχουν διαφορετικές ενέργειες και αντιστοιχούν σε διαφορετικές ελλείψεις. Για μικρότερη ενέργεια οι άξονες της έλλειψης είναι επίσης μικρότεροι (το πλάτος της ταλάντωσης ελαττώνεται όπως και το πλάτος της ταχύτητας και της ορμής). Η έλλειψη εκφυλίζεται σε σημείο όταν η ενέργεια γίνει ίση με την ελάχιστη δυναμική.

Το διάγραμμα φάσης λοιπόν του αρμονικού ταλαντωτή είναι ένα σύνολο από ελλείψεις με κέντρο το σημείο ισορροπίας. Εννοείται ότι μπορούμε άμεσα να σχεδιάσουμε το διάγραμμα σε άξονες x, p. Θα μπορούσαμε επίσης να επιλέξουμε σαν κατακόρυφο άξονα την ταχύτητα αντί της ορμής' το σχήμα πρακτικά δεν αλλάζει λόγω της σχέσης αναλογίας $p = m\dot{x}$.

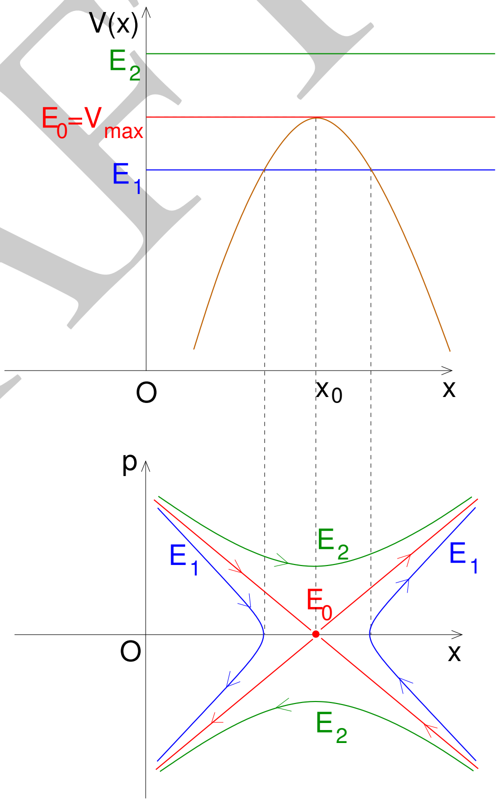
5.2.2 Διάγραμμα φάσης απωστικής γραμμικής δύναμης

Η δυναμική ενέργεια απωστικής γραμμικής δύναμης $F = -m\omega^2 q$ με θέση ισορροπίας $q = 0$ είναι παραβολή με τα κοίλα κάτω και κορυφή το σημείο ισορροπίας $V = -\frac{m\omega^2}{2}q^2 + C$ (η προσθετική σταθερά δεν επηρεάζει την φυσική του προβλήματος, αλλά για λόγους πληρότητας την κρατάμε). Η σχέση αυτή καλύπτει την συμπεριφορά γύρω από ένα τοπικό μέγιστο της δυναμικής ενέργειας $V(x)$ στη θέση x_0, για την οποία $V(x_0) = C$, $V'(x_0) = 0$, $V''(x_0) = -m\omega^2 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{-V''(x_0)/m}$ και $q = x - x_0$.

Μπορούμε βέβαια να περιγράψουμε την κίνηση και τις καμπύλες φάσης μέσω της έκφρασης $q(t)$ που βρήκαμε όταν μελετήσαμε την κίνηση κοντά σε ασταθές σημείο ισορροπίας, αλλά είναι ευκολότερο να το κάνουμε με βάση το γράφημα της δυναμικής ενέργειας.

Οι καμπύλες φάσης περιγράφονται μαθηματικά από το ολοκλήρωμα ενέργειας $\frac{p^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{2}q^2 = E'$ όπου $E' = E - C$. Όλες οι τιμές της ενέργειας είναι επιτρεπτές (για όλες υπάρχει επιτρεπτή περιοχή κίνησης) και για κάθε μία έχουμε μία καμπύλη φάσης. Πρέπει να διακρίνουμε τις περιπτώσεις $E' > 0$, $E' < 0$ και $E' = 0$.

Για κάθε ενέργεια $E' > 0$ το ολοκλήρωμα ενέργειας γράφεται $\left(\frac{p}{\sqrt{2mE'}}\right)^2 - \left(\frac{q}{\sqrt{2E'/m\omega^2}}\right)^2 = 1$ και εκφράζει ζεύγος υπερβολών στο χώρο φάσης που τέμνει τον άξονα των ορμών στα σημεία $\pm\sqrt{2mE'}$.



Σχήμα 5.11: Πάνω: η δυναμική ενέργεια για απωστική γραμμική δύναμη. Κάτω: το αντίστοιχο διάγραμμα φάσης.

Όπως δείχνει το σχήμα, σκεπτόμενοι την επιτρεπτή περιοχή κίνησης για κάθε ενέργεια μέσω του γραφήματος της δυναμικής ενέργειας, η υπερβολή στην περιοχή θετικών ορμών αντιστοιχεί σε κίνηση με θετική ταχύτητα κατά την οποία ανεξάρτητα της αρχικής θέσης το σώμα δεν ανακλάται κάπου και καταλήγει στο $q = +\infty$. Η υπερβολή καλύπτει κάθε αρχική θέση q_i' προφανώς για συγκεκριμένη κίνηση το σώμα περνά μόνο από τα

σημεία $q \geq q_i$ δεξιά της αρχικής του θέσης, αλλά αυτή η q_i μπορεί να είναι ακόμα και στο $-\infty$. Αν το σώμα ξεκινά αριστερά του σημείου ισορροπίας η ταχύτητά του μειώνεται καθώς πλησιάζει και κατόπιν αυξάνεται όσο απομακρύνεται. Είναι αναμενόμενο λοιπόν το σχήμα της καμπύλης φάσης παρότι από το γράφημα της $V(x)$ και μόνο δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι είναι υπερβολή.
Η υπερβολή στην περιοχή των αρνητικών ορμών αντιστοιχεί όμοια σε περιπτώσεις όπου το σώμα έχει αρνητική αρχική ταχύτητα και ενέργεια αρκετή για να περάσει το λόφο δυναμικής ενέργειας, κινείται συνεχώς με αρνητική ταχύτητα και καταλήγει στο $q = -\infty$.

Για κάθε ενέργεια $E' < 0$ το ολοκλήρωμα ενέργειας γράφεται $\left(\frac{q}{\sqrt{-2E'/m\omega^2}}\right)^2 - \left(\frac{p}{\sqrt{-2mE'}}\right)^2 = 1$ και εκφράζει ζεύγος υπερβολών στο χώρο φάσης που τέμνει τον άξονα των θέσεων στα σημεία $q = \pm\sqrt{-2E'/m\omega^2}$.
Όπως δείχνει το σχήμα, σκεπτόμενοι την επιτρεπτή περιοχή κίνησης για κάθε ενέργεια μέσω του γραφήματος της δυναμικής ενέργειας, η υπερβολή στην περιοχή δεξιά του μέγιστου αντιστοιχεί είτε σε κίνηση με αρχικά θετική ταχύτητα και θέση δεξιά του μέγιστου, οπότε το σώμα κινείται επιταχυνόμενο προς το $q = +\infty$, είτε σε κίνηση προς το μέγιστο (από θετικά q με αρνητική ορμή), οπότε υπάρχει ανάκλαση στο σημείο που η υπερβολή τέμνει τον άξονα των θέσεων και κατόπιν το σώμα κινείται προς το $q = +\infty$.
Όμοια για την υπερβολή στην περιοχή αριστερά του μέγιστου.
Το σχήμα λοιπόν της καμπύλης φάσης προκύπτει άμεσα από το γράφημα της $V(x)$ παρότι μόνο ποιοτικά, από το γράφημα και μόνο δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι είναι υπερβολή.

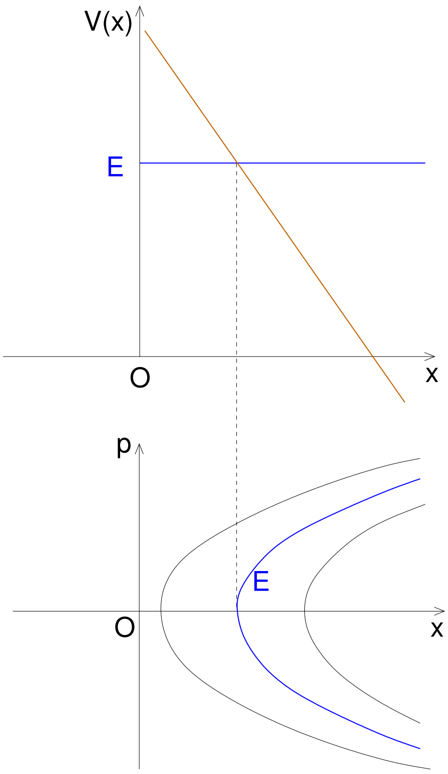
Αν η ενέργεια είναι ίση με το μέγιστο της δυναμικής $E' = 0$ το ολοκλήρωμα ενέργειας δίνει $p = \pm m\omega q$. Αυτή η μαθηματική έκφραση περιγράφει πέντε διαφορετικές περιπτώσεις όπως μπορούμε να καταλάβουμε με βάση το γράφημα της δυναμικής ενέργειας.
Η πρώτη είναι το σημείο $q = 0, p = 0$ που αντιστοιχεί σε ακινησία στο σημείο ισορροπίας. Παρότι σημείο, είναι μία ξεχωριστή από τις υπόλοιπες «καμπύλη» φάσης.
Η δεύτερη είναι η ημιευθεία $p = +m\omega q$ στα θετικά q η οποία περιγράφει περιπτώσεις που το σώμα βρίσκεται αρχικά δεξιά του σημείου ισορροπίας (οσοδήποτε μακρυά ή κοντά, αλλά όχι ακριβώς πάνω) και απομακρύνεται από αυτό.
Η τρίτη είναι η ημιευθεία $p = +m\omega q$ στα αρνητικά q η οποία περιγράφει περιπτώσεις που το σώμα βρίσκεται αρχικά αριστερά του σημείου ισορροπίας (οσοδήποτε μακρυά ή κοντά, αλλά όχι ακριβώς πάνω) και απομακρύνεται από αυτό (έχει αρνητική ορμή).
(Βλέπουμε ότι οι δύο ημιευθείες, αλλά και το σημείο $q = 0, p = 0$, αντιστοιχούν σε διαφορετικές περιπτώσεις. Ένα σώμα δεν μπορεί να μεταπηδήσει από την μία στην άλλη, γι' αυτό δεν είναι σωστό να σκεφτόμαστε ενιαία την $p = +m\omega q$ σαν ευθεία.)
Η τέταρτη είναι η ημιευθεία $p = -m\omega q$ στα θετικά q η οποία περιγράφει περιπτώσεις που το σώμα βρίσκεται αρχικά δεξιά του σημείου ισορροπίας και κινείται προς αυτό (έχει αρνητική ορμή). Στην περίπτωση αυτή, όπως βρήκαμε όταν μελετήσαμε την κίνηση γύρω από ασταθές σημείο ισορροπίας, το σώμα πλησιάζει επ' άπειρον το σημείο ισορροπίας (η θέση είναι $q = q_i e^{-\omega t}$).
Η πέμπτη είναι η ημιευθεία $p = -m\omega q$ στα αρνητικά q η οποία περιγράφει περιπτώσεις που το σώμα βρίσκεται αρχικά αριστερά του σημείου ισορροπίας και κινείται προς αυτό (έχει θετική ορμή). Και στην περίπτωση αυτή το σώμα πλησιάζει επ' άπειρον το σημείο ισορροπίας.

5.2.3 Διάγραμμα φάσης γενικής περίπτωσης συντηρητικού πεδίου

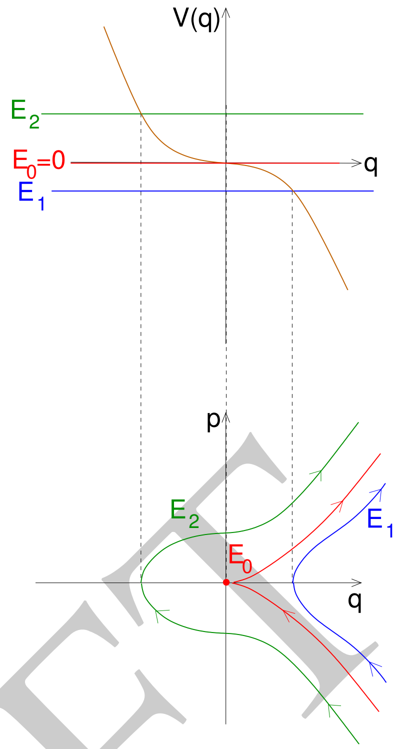
Στην γενική περίπτωση δύναμης $F = -V'(x)$ με βάση το γράφημα της δυναμικής ενέργειας μπορούμε για κάθε ενέργεια να κατανοήσουμε την κίνηση και να σχεδιάσουμε την αντίστοιχη καμπύλη φάσης (της οποίας η μαθηματική έκφραση είναι $\frac{p^2}{2m} + V(x) = E$).

Δύο υποπεριπτώσεις, σταθερής δύναμης και δύναμης ανάλογης του τετραγώνου της απόστασης από θέση ισορροπίας φαίνονται στα σχήματα 5.12 και 5.13.

Στη γενική περίπτωση μπορούμε ποιοτικά να σχεδιάζουμε το διάγραμμα φάσης παρατηρώντας το γρά-



Σχήμα 5.12: Διάγραμμα φάσης για σταθερή δύναμη $F > 0$ με $V = -Fx + C$. Για κάθε ενέργεια υπάρχει σημείο ανάκλασης και η επιτρεπτή περιοχή κίνησης είναι δεξιά από αυτό. Το ακριβές σχήμα των καμπύλων φάσης είναι παραβολές $x + \frac{E-C}{F} = \frac{p^2}{2mF}$. (Όμοια βρίσκουμε το διάγραμμα για $F < 0$, ουσιαστικά αντιστρέφουμε τον άξονα θέσεων.)
Η φορά διαγραφής είναι προφανής ακόμα και αν δεν φαίνεται στο σχήμα (προς μεγαλύτερα x στον ημιχώρο θετικών ορμών και αντίστοιχα προς μικρότερα x στον ημιχώρο αρνητικών ορμών.)



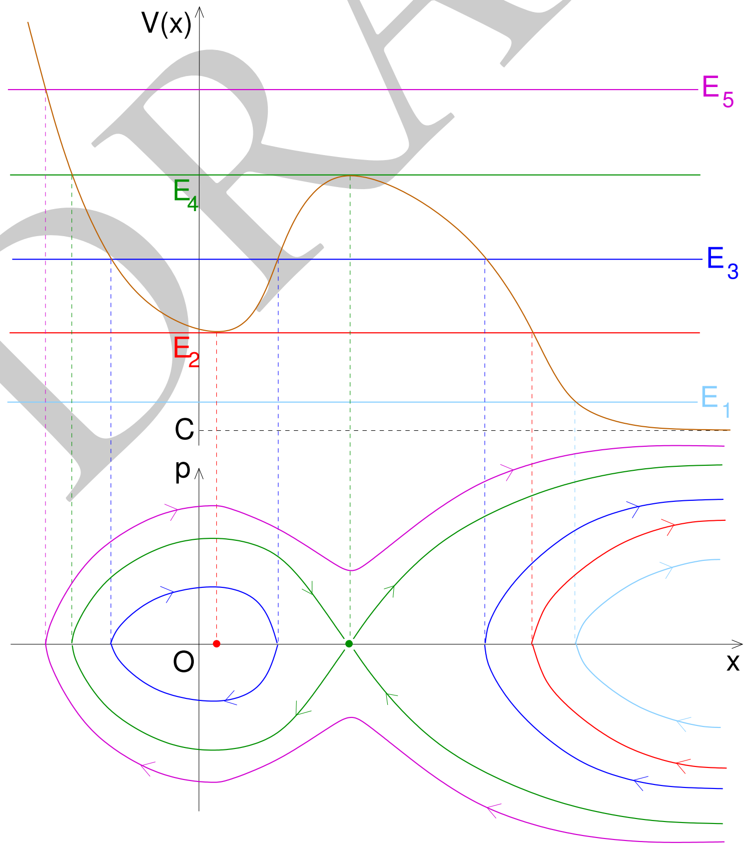
Σχήμα 5.13: Διάγραμμα φάσης για πεδίο $V = -\lambda q^3$ με $\lambda > 0$. Το $q = 0$ είναι σημείο ισορροπίας και η δύναμη $F = 3\lambda q^2$ είναι θετική τόσο αριστερά από αυτό (δύναμη επαναφοράς), όσο και δεξιά (απωστική δύναμη). Το διάγραμμα φάσης έχει ομοιότητες με αυτό του ταλαντωτή για $q < 0$ και της απωστικής δύναμης για $q > 0$. Για την οριακή ενέργεια $E = 0$ υπάρχουν τρεις καμπύλες φάσης: Η μία είναι το σημείο ισορροπίας και οι άλλες δύο οι $p = \pm\sqrt{2m\lambda}\, q^{3/2}$ που υπάρχουν μόνο στα θετικά q.

φημα της δυναμικής ενέργειας και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι κοντά σε τοπικά ελάχιστα οι καμπύλες φάσης θα είναι κλειστές όπως αυτές του αρμονικού ταλαντωτή, ενώ γύρω από τοπικά μέγιστα θα μοιάζουν με αυτές της απωστικής γραμμικής δύναμης (μακρυά όμως από τα μέγιστα προσαρμόζονται στην εκάστοτε συμπεριφορά της δυναμικής ενέργειας, μπορεί π.χ. να κλείνουν σε σημείο ανάκλασης). Σκεπτόμενοι όλες τις δυνατές ενέργειες, σαρώνοντας π.χ. από μικρότερες σε μεγαλύτερες, μπορούμε να σχεδιάζουμε τις καμπύλες φάσης βρίσκοντας αφενός τα όρια της κίνησης αν υπάρχουν και αφετέρου το μέτρο της ορμής από την κινητική ενέργεια (που εκφράζεται από τη διαφορά $E - V$ στο γράφημα της δυναμικής ενέργειας).

Για παράδειγμα, έστω η δυναμική ενέργεια είναι αυτή του σχήματος 5.14. Δυνατές είναι όλες οι ενέργειες $E > C$ και τις σαρώνουμε από μικρότερες σε μεγαλύτερες.

• Για ενέργειες τύπου E_1, από την ελάχιστη δυνατή τιμή C μέχρι το τοπικό ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας E_2, η επιτρεπτή περιοχή κίνησης είναι δεξιά της τομής $V(x) = E$ που αποτελεί σημείο ανάκλασης. Ασυμπτωτικά η δυναμική ενέργεια αποκτά σταθερή τιμή C οπότε και η ορμή σταθεροποιείται στην τιμή $+\sqrt{2m(E-C)}$ για τον θετικό κλάδο και $-\sqrt{2m(E-C)}$ για τον αρνητικό (το σχήμα είναι συμμετρικό πάνω-κάτω όπως έχουμε πει).

• Για την ενέργεια E_2 που είναι ίση με το τοπικό ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας η $V(x) = E$ έχει δύο ρίζες. Η μία επιτρεπτή περιοχή κίνησης είναι δεξιά της μεγαλύτερης ρίζας και η καμπύλη φάσης είναι όμοια με πριν. Υπάρχει όμως τώρα και μία δεύτερη περίπτωση που αντιστοιχεί σε ακινησία στο σημείο ισορροπίας (για την οποία η καμπύλη εκφυλίζεται σε σημείο).
• Για ενέργειες τύπου E_3, από το τοπικό ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας E_2 μέχρι το τοπικό μέγιστο E_4, η $V(x) = E$ έχει τρεις ρίζες. Η μία επιτρεπτή περιοχή κίνησης είναι δεξιά της μεγαλύτερης ρίζας και η καμπύλη φάσης είναι όμοια με πριν. Η δεύτερη επιτρεπτή περιοχή είναι ανάμεσα στις δύο μικρότερες ρίζες και αντιστοιχεί σε ταλάντωση. (Η ταλάντωση είναι αρμονική και η καμπύλη φάσης ελλειπτική μόνο όσο μένουμε στη γειτονιά του ελαχίστου όπου η $V(x)$ προσεγγίζεται με παραβολή και η ενέργεια είναι ελάχιστα μεγαλύτερη της E_2. Για μεγαλύτερες ενέργειες η καμπύλη δεν είναι έλλειψη αλλά παραμένει κλειστή όπως σε κάθε ταλάντωση.
• Για την ενέργεια E_4 που είναι ίση με το τοπικό μέγιστο της δυναμικής ενέργειας κοντά στο μέγιστο οι καμπύλες φάσης είναι όμοιες με αυτές της απωστικής δύναμης. Υπάρχει δηλ. το σημείο ισορροπίας (που αποτελεί από μόνο του μία καμπύλη φάσης) και οι τέσσερις ημιευθείες, δύο που ξεκινούν από το σημείο ισορροπίας και δύο που πλησιάζουν σε αυτό. Οι καμπύλες φάσης δεξιά του σημείου ισορροπίας ξεκινούν σαν ημιευθείες κοντά σε αυτό, όσο η $V(x)$ μπορεί να θεωρηθεί παραβολή, αλλά όσο απομακρυνόμαστε προσαρμόζονται στην μορφή του $V(x)$. Όμοια οι καμπύλες αριστερά του σημείου ισορροπίας δεν παραμένουν ευθύγραμμες όσο απομακρυνόμαστε από αυτό, αλλά κλείνουν στον εαυτό τους στο σημείο ανάκλασης που αποτελεί τη μικρότερη λύση της $V(x) = E$.
• Για ενέργειες τύπου E_5, μεγαλύτερες από το τοπικό μέγιστο E_4, η επιτρεπτή περιοχή κίνησης είναι δεξιά της τομής $V(x) = E$. Στην καμπύλη πρέπει να προσέξουμε ότι η ορμή κατ' απόλυτη τιμή έχει τοπικό μέγιστο/ελάχιστο στη θέση όπου η $V(x)$ έχει ελάχιστο/μέγιστο.
Στο σχήμα 5.14 φαίνεται το διάγραμμα φάσης κάτω από την δυναμική ενέργεια.



Σχήμα 5.14: Διάγραμμα φάσης για τυχαία $V(x)$.

Παράδειγμα 5.4:

Σώμα μάζας $m = 1$ κινείται στο πεδίο δύναμης $\boldsymbol{F} = \dfrac{2z^2 - 1}{\left(1 + z^2\right)^{5/2}}\hat{z}$ (σε κατάλληλες μονάδες).

(α) Δείξτε ότι η δυναμική ενέργεια είναι $V = \dfrac{z}{\left(1 + z^2\right)^{3/2}}$ και σχεδιάστε το γράφημά της.

Αυτό είναι ένα πεδίο ηλεκτρικού δίπολου. Γενικά το δυναμικό του πεδίου ενός ηλεκτρικού δίπολου με διπολική ροπή $\boldsymbol{p}$ σε θέση $\boldsymbol{r}$ από αυτό είναι $\Phi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$, η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης με φορτίο $V = q\Phi$ και η αντίστοιχη δύναμη $\boldsymbol{F} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} - |\boldsymbol{r}|^2\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{r}|^5}$. Αν το δίπολο είναι $\boldsymbol{p} = p\hat{z}$, βρίσκεται ακίνητο στην αρχή των αξόνων και το φορτίο είναι υποχρεωμένο να κινείται σε μία ευθεία παράλληλη στον άξονα z, συγκεκριμένα την $x = 0, y = 1$, παίρνουμε την έκφραση της άσκησης (σε κατάλληλες μονάδες).

(β) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας, ευσταθή και ασταθή.
(γ) Ποια είναι η περίοδος μικρών ταλαντώσεων γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας;
(δ) Αν το σώμα ξεκινά από το $z = 0$ διερευνήστε που καταλήγει ανάλογα με την τιμή της αρχικής ταχύτητας v_0.
(ε) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης.

Λύση:

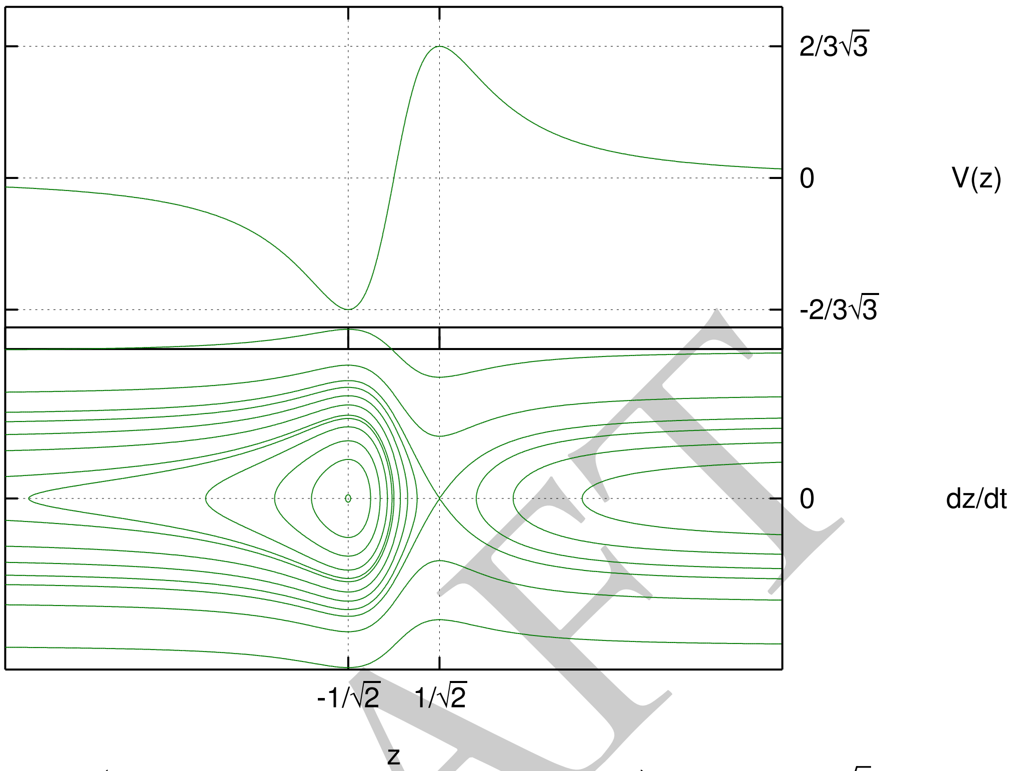
(α) Ισχύει $-\boldsymbol{\nabla} V = -\dfrac{dV}{dz}\hat{z} = \dfrac{2z^2 - 1}{\left(1 + z^2\right)^{5/2}}\hat{z} = \boldsymbol{F}$.

Η δυναμική ενέργεια υπολογίζεται από $V = -\int F dz = \int \dfrac{-2z^2 + 1}{\left(1 + z^2\right)^{5/2}} dz$ με την αντικατάσταση $z = \cot\theta$, όπου $\theta \in (0, \pi)$. Προκύπτει $V = \sin^2\theta\cos\theta + \text{σταθερά} = \dfrac{z}{\left(1 + z^2\right)^{3/2}}$, αφού $\cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{1 + z^2}}$ και $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1 + z^2}}$ (έχουμε μηδενίσει την αυθαίρετη προσθετική σταθερά).

$$V' = -\frac{2}{\left(1 + z^2\right)^{5/2}}\left(z + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(z - \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad V'' = \frac{6}{\left(1 + z^2\right)^{7/2}} z\left(z + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(z - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

z	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
V'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
V''		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
V	0	$\searrow$		$\searrow$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$		$\searrow$	0

(Η συνάρτηση είναι περιττή και θα αρκούσε να μελετηθεί στα θετικά z.)



(β) Σημεία ισορροπίας (ακρότατα της V ή ισοδύναμα μηδενισμοί της F) είναι τα $z = \pm 1/\sqrt{2}$. Το $z = -1/\sqrt{2}$ είναι ευσταθές (αφού το V ελάχιστο) και το $z = 1/\sqrt{2}$ είναι ασταθές (αφού το V μέγιστο).

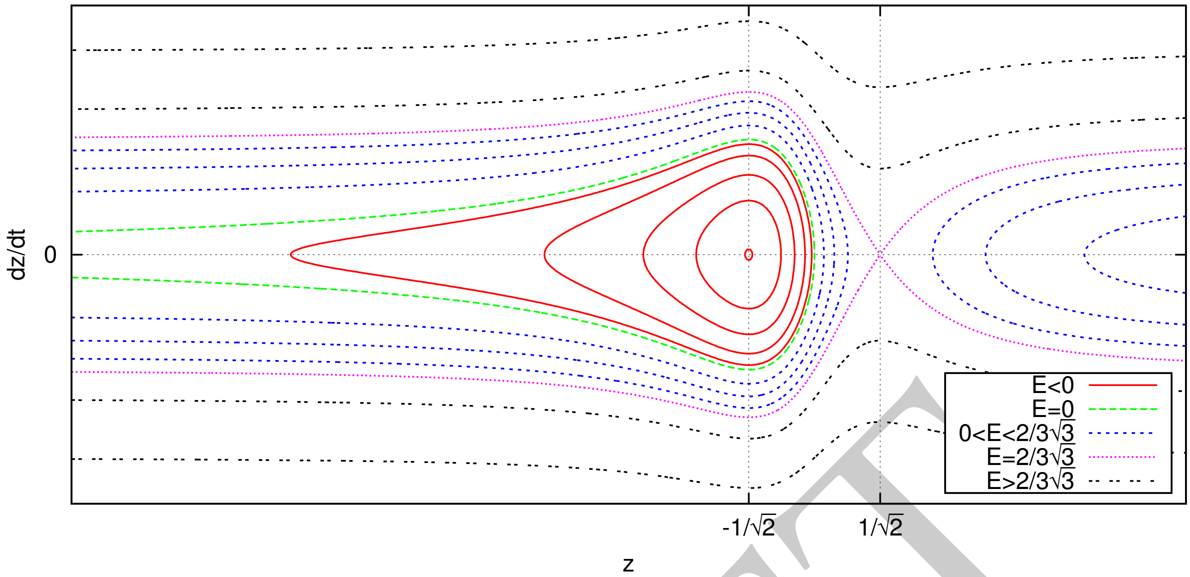
(γ) Γύρω από το ευσταθές, με $z = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + q$ είναι $V \approx V(-1/\sqrt{2}) + V'(-1/\sqrt{2})q + V''(-1/\sqrt{2})q^2/2 = -\dfrac{2}{3\sqrt{3}} + \dfrac{8}{3^{5/2}}q^2$ και $\dfrac{m\dot{z}^2}{2} = \dfrac{\dot{q}^2}{2}$. Άρα το ολοκλήρωμα της ενέργειας είναι $\dfrac{\dot{q}^2}{2} + \dfrac{8}{3^{5/2}}q^2 = E + \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$. Παραγωγίζοντάς το βρίσκουμε $\ddot{q} + \dfrac{16}{3^{5/2}}q = 0$, δηλ. εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή με $\omega = \dfrac{4}{3^{5/4}}$ και περίοδο $\dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{3^{5/4}\pi}{2}$.

Ισοδύναμα μπορούμε να αναπτύξουμε κατά Taylor το νόμο Νεύτωνα $m\ddot{z} = F(z)$. Με $z = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + q$ είναι $F \approx F(-1/\sqrt{2}) + F'(-1/\sqrt{2})q = 0 - V''(-1/\sqrt{2})q = -\dfrac{16}{3^{5/2}}q$ οπότε βρίσκουμε $\ddot{q} + \dfrac{16}{3^{5/2}}q = 0$.

(δ) $E = \dfrac{mv_0^2}{2} + V(0) = \dfrac{v_0^2}{2} \geq 0$.
Αν $v_0 \leq 0$ κινείται προς μικρότερα z και καταλήγει στο $z = -\infty$.
Αν $v_0 > 0$ αρχικά κινείται προς μεγαλύτερα z και ανάλογα με την τιμή της ενέργειας έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:
Αν $E < \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow 0 < v_0 < \dfrac{2}{3^{3/4}}$ θα ανακλαστεί στο σημείο όπου $V(z) = E$ και στη συνέχεια θα κινείται προς μικρότερα z μέχρι το $-\infty$.
Αν $E = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow v_0 = \dfrac{2}{3^{3/4}}$ κινείται επ' άπειρον προς το ασταθές σημείο ισορροπίας $z = 1/\sqrt{2}$.
Αν $E > \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow v_0 > \dfrac{2}{3^{3/4}}$ κινείται διαρκώς προς μεγαλύτερα z μέχρι το $+\infty$.

(ε) Το διάγραμμα φάσης έχει σχεδιαστεί κάτω από το γράφημα της V. Παρακάτω φαίνονται οι διάφορες ενέργειες, με κόκκινο οι $E < 0$ (περαττωμένη κίνηση), με πράσινο η $E = 0$ (με $\dot{z} \to 0$ για $z \to -\infty$), με μπλε οι

$0 < E < \frac{2}{3\sqrt{3}}$, με μωβ οι $E = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ και με μαύρο οι $E > \frac{2}{3\sqrt{3}}$.



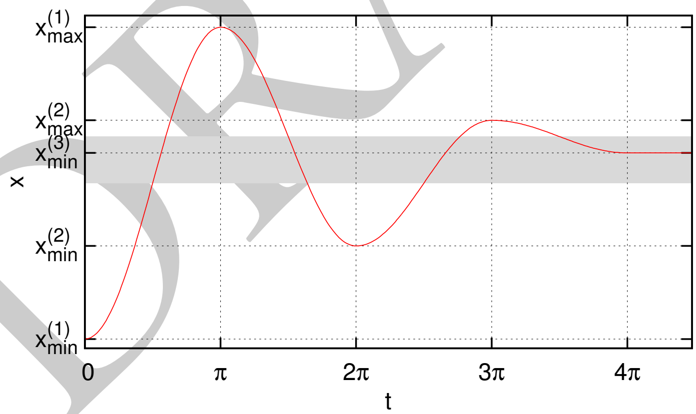
Παράδειγμα 5.5:
Σώμα μάζας m κινείται σε άξονα x πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, υπό την επίδραση δύναμης ελατηρίου $-kx\hat{x}$ και τριβής ολίσθησης μmg.
(α) Γράψτε την εξίσωση κίνησης και δείξτε ότι αν μετράμε μήκη σε μονάδες $\mu mg/k$ και χρόνους σε μονάδες $\sqrt{m/k}$ απλοποιείται σε $\ddot{x} = -x \mp 1$, όπου $\pm$ το πρόσημο της ταχύτητας.
(β) Δείξτε ότι σε κάθε επιμέρους κίνηση στην οποία το πρόσημο της ταχύτητας είναι σταθερό, υπάρχει ολοκλήρωμα «ενέργειας» $\frac{\dot{x}^2}{2} + V_\pm(x) =$ σταθερά, με $V_\pm = \frac{1}{2}(x \pm 1)^2$.
(γ) Έστω αρχικά $x = -7.7$ και $\dot{x} = 0$. Περιγράψτε την κίνηση και φτιάξτε πρόχειρα το διάγραμμα $x = x(t)$ και την καμπύλη φάσης.
Λύση:

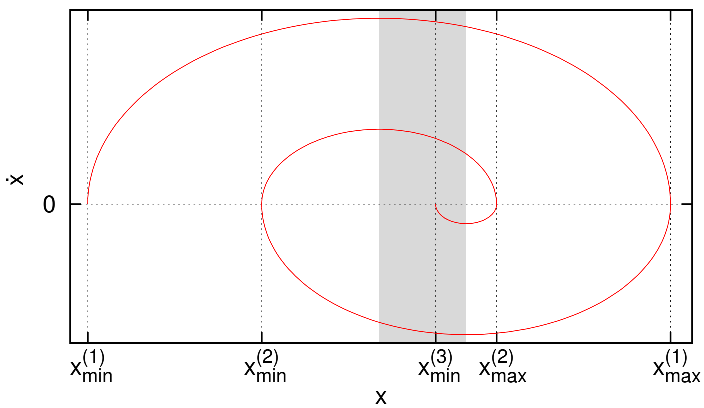
(α) Όταν το σώμα έχει ταχύτητα $\dot{x} = \pm|\dot{x}|$ η εξίσωση κίνησής του είναι $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \mp \mu mg$ (η τριβή ολίσθησης είναι αντίθετη της ταχύτητας).
Αν μετράμε τη συντεταγμένη x σε μονάδες $\mu mg/k$ και τους χρόνους σε $\sqrt{m/k}$ μπορούμε να θέσουμε $x = \frac{\mu mg}{k}x', t = \sqrt{\frac{m}{k}}t'$ στην εξίσωση κίνησης, οπότε αυτή γίνεται $m\frac{d^2\frac{\mu mg}{k}x'}{d\left(\sqrt{\frac{m}{k}}\,t'\right)^2} = -k\frac{\mu mg}{k}x' \mp \mu mg \Leftrightarrow \frac{d^2x'}{dt'^2} = -x' \mp 1$. Μπορούμε να αφαιρέσουμε του τόνους για απλούστευση, οπότε καταλήγουμε στην $\ddot{x} = -x \mp 1$.
Η εξίσωση αυτή περιγράφει γραμμική αρμονική ταλάντωση γύρω από το σημείο ισορροπίας ∓ 1.
Είναι δηλ. σαν να θέτουμε στην αρχική εξίσωση $\mu mg/k = 1$ και $\sqrt{m/k} = 1$.

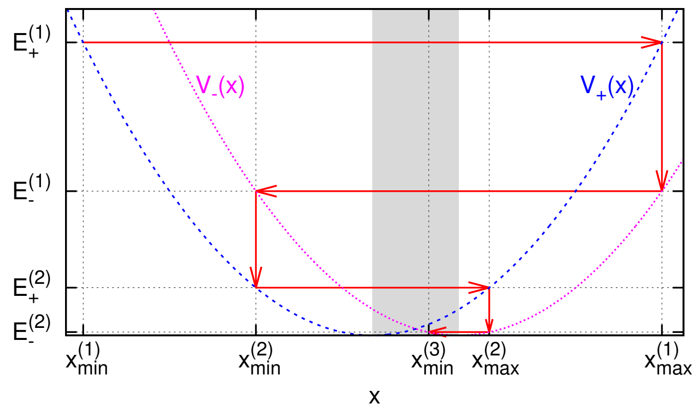
(β) Είναι $\ddot{x} = F_\pm(x) \Leftrightarrow \frac{\dot{x}^2}{2} + V_\pm(x) =$ σταθερά, με $V_\pm = -\int F_\pm dx = \frac{1}{2}(x \pm 1)^2$ (μηδενίσαμε την αυθαίρετη προσθετική σταθερά ολοκλήρωσης).
Το ολοκλήρωμα προκύπτει και αν πολλαπλασιάσουμε το νόμο Νεύτωνα με την ταχύτητα $\dot{x}$.

(γ) Γενικά, όταν το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο σε σημείο x, θα αρχίσει να κινείται μόνο αν η δύναμη από το ελατήριο είναι μεγαλύτερη από την τριβή, δηλ. αν $|x| > 1$.
Αν η συνθήκη αυτή ικανοποιείται στο αρχικό σημείο $x^{(1)}_{min} < 0$ το σώμα θα αρχίσει να κινείται προς μεγαλύτερα x. Αφού η ταχύτητα είναι θετική ισχύει $\ddot{x} = -x - 1$, δηλ. η κίνηση είναι μέρος αρμονικής ταλάντωσης γύρω από το σημείο ισορροπίας $x = -1$. Το πλάτος ταλάντωσης είναι $-1 - x^{(1)}_{min}$, επομένως το σώμα θα φτάσει στο

σημείο $x^{(1)}_{max} = -1 + (-1 - x^{(1)}_{min}) = -2 - x^{(1)}_{min}$ όπου στιγμιαία θα ακινητοποιηθεί ξανά.
Αν στο σημείο αυτό ισχύει η συνθήκη $|x| > 1$ το σώμα θα αρχίσει να κινείται προς μικρότερα x. Η κίνηση περιγράφεται από $\ddot{x} = -x+1$, δηλ. είναι μέρος αρμονικής ταλάντωσης γύρω από το σημείο ισορροπίας $x = +1$. Το πλάτος ταλάντωσης είναι $x^{(1)}_{max} - 1$, επομένως το σώμα θα φτάσει στο σημείο $x^{(2)}_{min} = 1 - (x^{(1)}_{max} - 1) = 2 - x^{(1)}_{max}$ όπου στιγμιαία θα ακινητοποιηθεί ξανά.
Έτσι η κίνηση επαναλαμβάνεται μεταξύ των σημείων $x^{(n)}_{min} \to x^{(n)}_{max} = -2 - x^{(n)}_{min} \to x^{(n+1)}_{min} = 2 - x^{(n)}_{max}$ για οποιοδήποτε n, μέχρις ότου κάποιο ακραίο σημείο βρεθεί στην περιοχή $[-1, 1]$, οπότε το σώμα μένει εκεί γιατί η δύναμη ελατηρίου δεν μπορεί να υπερνικήσει την τριβή.
Κάθε κίνηση από ακινησία σε ακινησία διαρκεί μισή περίοδο, δηλ. χρόνο π.
Η κίνηση από το $x^{(n)}_{min}$ στο $x^{(n)}_{max}$ ξεκινά το χρόνο $(n-1)\times 2\pi$ με αρχικές συνθήκες $x = x^{(n)}_{min}$, $\dot{x} = 0$ και τελειώνει το χρόνο $(n-1)\times 2\pi + \pi$. Η κατάλληλη λύση της $\ddot{x} = -x-1$ που την περιγράφει είναι η $x = -1 + (x^{(n)}_{min} + 1)\cos t$.
Η επόμενη κίνηση από το $x^{(n)}_{max}$ στο $x^{(n+1)}_{min}$ ξεκινά το χρόνο $(n-1)\times 2\pi + \pi$ με αρχικές συνθήκες $x = x^{(n)}_{max}$, $\dot{x} = 0$ και τελειώνει το χρόνο $n \times 2\pi$. Η κατάλληλη λύση της $\ddot{x} = -x + 1$ που την περιγράφει είναι η $x = 1 - (x^{(n)}_{max} - 1)\cos t$.
Στο διάγραμμα των δυναμικών ενεργειών, η τροχιά από το $x^{(n)}_{min}$ στο $x^{(n)}_{max}$ περιγράφεται από το ολοκλήρωμα $\frac{\dot{x}^2}{2} + V_+(x) = E^{(n)}_+$ με $E^{(n)}_+ = V_+(x^{(n)}_{min})$; τα άκρα της αντιστοιχούν στις τομές της παραβολικής καμπύλης $V_+(x)$ με την ενέργεια $E^{(n)}_+$. Η επόμενη τροχιά από το $x^{(n)}_{max}$ στο $x^{(n+1)}_{min}$ περιγράφεται από το ολοκλήρωμα $\frac{\dot{x}^2}{2} + V_-(x) = E^{(n)}_-$ με $E^{(n)}_- = V_-(x^{(n)}_{max})$; τα άκρα της αντιστοιχούν στις τομές της παραβολικής καμπύλης $V_-(x)$ με την ενέργεια $E^{(n)}_-$.
Αν αρχικά το σώμα είναι ακίνητο στο $x = -7.7$ τότε θα κινηθεί με $x^{(1)}_{min} = -7.7 \to x^{(1)}_{max} = -2 - x^{(1)}_{min} = 5.7 \to x^{(2)}_{min} = 2 - x^{(1)}_{max} = -3.7 \to x^{(2)}_{max} = -2 - x^{(2)}_{min} = 1.7 \to x^{(3)}_{min} = 2 - x^{(2)}_{max} = 0.3$. Συνολικά κινείται χρόνο 4π. Η κίνηση φαίνεται στα παρακάτω σχήματα (οι γκρι περιοχές είναι οι $|x| < 1$ όπου το σώμα αν σταματήσει στιγμιαία μένει για πάντα ακίνητο καθώς η δύναμη ελατηρίου δεν μπορεί να υπερνικήσει την στατική τριβή).





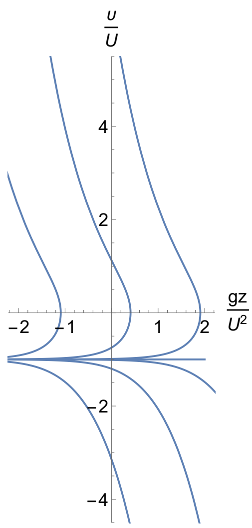


5.2.4 Διάγραμμα φάσης για δυνάμεις που εξαρτώνται από την ταχύτητα

Αν η δύναμη εξαρτάται από την ταχύτητα δεν υπάρχει ολοκλήρωμα ενέργειας. Η μαθηματική έκφραση των καμπυλών φάσης για χρονοανεξάρτητες δυνάμεις $F(q,p)$ προκύπτει όπως έχουμε ήδη πει από την ολοκλήρωση της σχέσης $\dfrac{dp}{dq} = \dfrac{F(q,p)}{p/m}$.

Το παράδειγμα 5.5 ανήκει σε αυτή την κατηγορία παρότι βρήκαμε τρόπο να το αντιμετωπίσουμε μέσω ολοκληρώματος «ενέργειας».

Ένα άλλο παράδειγμα που ήδη έχουμε αντιμετωπίσει είναι η κατακόρυφη κίνηση σώματος υπό την επίδραση αντίστασης, παράδειγμα 3.1. Παρότι βρήκαμε τη μαθηματική σχέση μεταξύ ταχύτητας και θέσης (επιλύοντας την σχετική διαφορική εξίσωση που είναι σε αυτή την περίπτωση $\dfrac{dv}{dz} = -\dfrac{g}{z} - \dfrac{g}{U^2}|v|$) είναι χρήσιμο να σχεδιάσουμε ποιοτικά την καμπύλη φάσης. Καθώς ανεβαίνει το σώμα η ταχύτητά του (και η ορμή του) είναι θετική και μειώνεται μέχρι να γίνει μηδέν στο μέγιστο ύψος, κατόπιν κατεβαίνει οπότε η ταχύτητα είναι αρνητική και αυξάνεται κατά μέτρο μέχρι να αποκτήσει ασυμπτωτικά την οριακή ταχύτητα U. Επεκτείνοντας αυτή τη σκέψη και σε περιπτώσεις όπου η αρχική θέση είναι αρνητική, αλλά και σε αυτές όπου η αρχική ταχύτητα είναι αρνητική, μπορούμε να σχεδιάσουμε τις πλήρεις καμπύλες φάσης. Το σχήμα 5.15 δείχνει το αποτέλεσμα. Σημειώστε ότι και η ευθεία $v = -U$ αποτελεί καμπύλη φάσης (αντιστοιχεί σε μηδενική συνισταμένη δυνάμεων).



Σχήμα 5.15: Διάγραμμα φάσης για κίνηση με $F = -mg - \dfrac{mg}{U^2}|v|v$.

Παράδειγμα 5.6:
Μελετήστε το διάγραμμα φάσης για ευθύγραμμη κίνηση στον άξονα x υπό την επίδραση αντίστασης μέτρου $m\lambda|v|^n$ όπου m η μάζα του σώματος και λ, n θετικές σταθερές.
Λύση: Το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται με το χρόνο και τελικά μηδενίζεται. Το πρόσημο της αλγεβρικής τιμής v είναι ίδιο συνεχώς με το αρχικό, επομένως αρκεί να μελετήσουμε την περίπτωση με $v > 0$ (γνωρίζοντας τις καμπύλες με θετικές ταχύτητες οι καμπύλες με αρνητικές βρίσκονται αντιστρέφοντας τον άξονα των θέσεων).

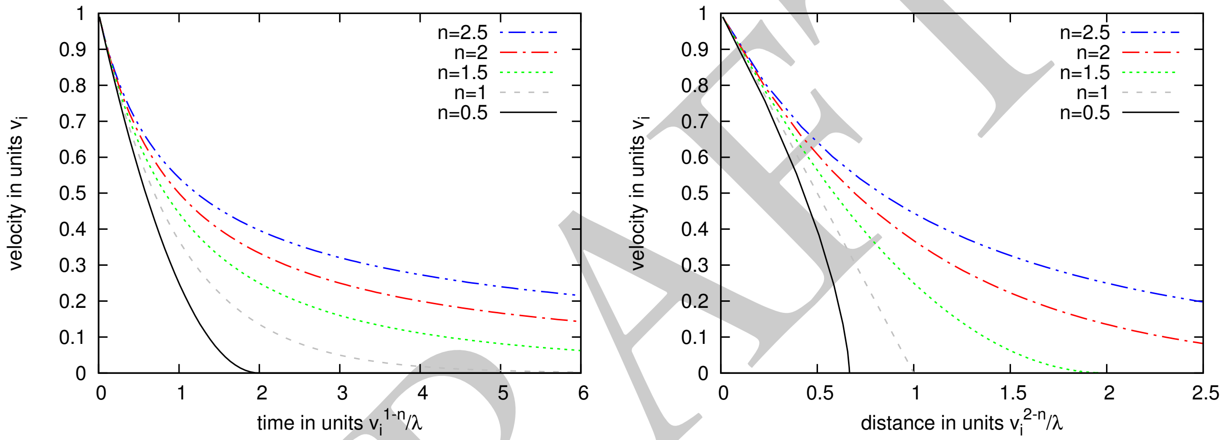
Για $v > 0$ καθώς περνά ο χρόνος η ταχύτητα μειώνεται και η θέση x αυξάνεται, επομένως η $v(x)$ είναι μία φθίνουσα συνάρτηση της θέσης, φθίνει μέχρι να μηδενιστεί.

Δεν είναι προφανές αν μέχρι να σταματήσει το σώμα διανύει άπειρο ή πεπερασμένο διάστημα. Ολοκληρώνοντας την $dx = \dfrac{dv}{dv/dx}$ με $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{\dot{v}}{\dot{x}} = \dfrac{F/m}{v} = -\lambda v^{n-1}$ το διάστημα προκύπτει $z_f - z_i = \displaystyle\int_{v_i}^{0} \frac{dv}{-\lambda v^{n-1}}$. Αν $n \geq 2$ το ολοκλήρωμα αποκλίνει, οπότε σε αυτή την περίπτωση το σώμα διανύει άπειρο διάστημα μέχρι να σταματήσει. Αν $0 < n < 2$ σταματά αφού διανύσει διάστημα $z_f - z_i = \dfrac{v_i^{2-n}}{\lambda(2-n)}$.

Υπάρχει μία επιπλέον διάκριση που σχετίζεται με τα κοίλα της καμπύλης φάσης. Είναι $\dfrac{d^2v}{dx^2} = -\lambda(n-1)v^{n-2}\dfrac{dv}{dx} = \lambda^2(n-1)v^{2n-3}$ επομένως για $n > 1$ η καμπύλη φάσης έχει τα κοίλα πάνω, για $n = 1$ είναι ευθεία και για $0 < n < 1$ έχει τα κοίλα κάτω.

Η περίπτωση $0 < n < 1$ αντιστοιχεί σε ανώμαλη συμπεριφορά της δύναμης όταν η ταχύτητα μηδενίζεται, γιατί η παράγωγος $\dfrac{dF}{dv}$ απειρίζεται για $v = 0$. Στην περίπτωση αυτή μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι το σώμα ακινητοποιείται σε πεπερασμένο χρόνο $\dfrac{v_i^{1-n}}{\lambda(1-n)}$. Σε κάθε άλλη περίπτωση $n > 1$ η καμπύλη φάσης προσεγγίζει τον άξονα των θέσεων χωρίς ποτέ να τον τμήσει.

Όλη η παραπάνω μελέτη θα μπορούσε να γίνει ολοκληρώνοντας την εξίσωση κίνησης. Εύκολα προκύπτουν οι σχέσεις ταχύτητας–θέσης $v = v_i\left[1 - \dfrac{\lambda(2-n)}{v_i|v_i|^{1-n}}(x-x_i)\right]^{1/(2-n)}$ και ταχύτητας–χρόνου $v = v_i\left[1 - \dfrac{\lambda(1-n)}{|v_i|^{1-n}}t\right]^{1/(1-n)}$.



Σχήμα 5.16: Κίνηση με αντίσταση μέτρου $m\lambda|v|^n$.

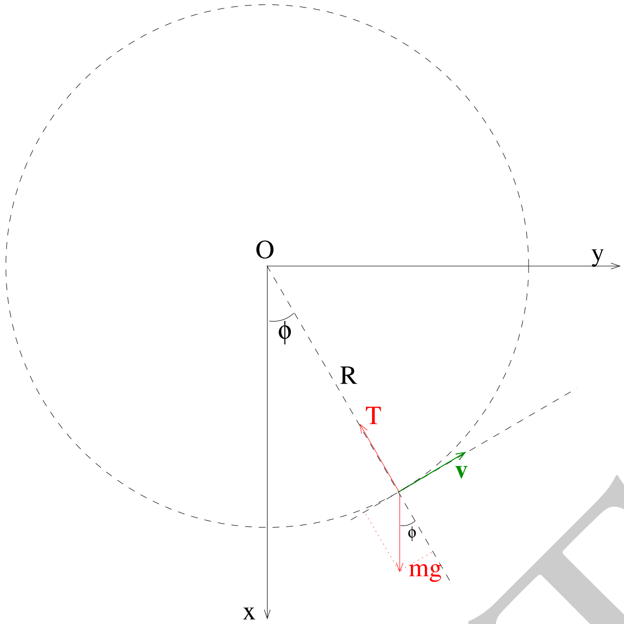
5.3 Επίπεδο ιδανικό εκκρεμές

Το ιδανικό εκκρεμές αποτελείται από σημειακό σώμα μάζας m δεμένο σε αβαρές, μη εκτατό νήμα μήκους R, το άλλο άκρο του οποίου είναι σταθερό. Εναλλακτικά το σώμα μπορεί να είναι στερεωμένο στο άκρο αβαρούς ράβδου μήκους R το άλλο άκρο της οποίας είναι ακίνητο. Στην περίπτωση του επίπεδου εκκρεμούς μας ενδιαφέρει η κυκλική κίνηση σε κατακόρυφο επίπεδο, μέσα σε ομογενή βαρύτητα g.

Ο βολικότερος τρόπος να περιγράψουμε τη θέση του σώματος είναι να χρησιμοποιήσουμε μία γωνία που σχηματίζει το νήμα με κάποια σταθερή κατεύθυνση, έστω την κατακόρυφο. Πιο συγκεκριμένα μπορούμε να περιγράψουμε την κίνηση στο σύστημα αναφοράς του σχήματος 5.17 οπότε ϕ είναι η προσανατολισμένη γωνία των πολικών συντεταγμένων.

Στο σύστημα αυτό είναι $\boldsymbol{r} = R\hat{\varpi}$, $\boldsymbol{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi}$ (ακτίνα επί γωνιακή ταχύτητα), $\boldsymbol{a} = -R\dot{\phi}^2\hat{\varpi} + R\ddot{\phi}\hat{\phi}$ (το πρώτο μέρος είναι η επιτρόχια και το δεύτερο η κεντρομόλος v^2/R με φορά προς το κέντρο), το βάρος είναι $m\boldsymbol{g} = mg\hat{x} = mg\cos\phi\hat{\varpi} - mg\sin\phi\hat{\phi}$ και η τάση του νήματος $\boldsymbol{T} = -T\hat{\varpi}$. Ο νόμος του Νεύτωνα γράφεται $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g} \Leftrightarrow -mR\dot{\phi}^2\hat{\varpi} + mR\ddot{\phi}\hat{\phi} = -T\hat{\varpi} + mg\cos\phi\hat{\varpi} - mg\sin\phi\hat{\phi}$ και οι συνιστώσες του δίνουν

$$T = mR\dot{\phi}^2 + mg\cos\phi\,, \tag{5.5}$$
$$mR\ddot{\phi} = -mg\sin\phi\,. \tag{5.6}$$



Σχήμα 5.17: Επίπεδο ιδανικό εκκρεμές.

Ένας ισοδύναμος τρόπος να μελετήσουμε την κίνηση θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε τα μοναδιαία $\hat{\varepsilon}$ στη διεύθυνση κίνησης και $\hat{n}$ προς το κέντρο της τροχιάς. Ορίζοντας $s = R\phi$ το προσανατολισμένο μήκος πάνω στην τροχιά η ταχύτητα γράφεται $\boldsymbol{v} = v\hat{\varepsilon}$ όπου $v = \dot{s} = R\dot{\phi}$ η αλγεβρική τιμή της (η ταχύτητα δεν είναι πάντα ομόρροπη του $\hat{\varepsilon}$, αλλά η γραφή αυτή βολεύει για να έχουμε συγκεκριμένα μοναδιαία σε κάθε θέση και να μην εξαρτάται το εφαπτόμενο μοναδιαίο από τη φορά κίνησης). Η επιτάχυνση αναλύεται κατά τα γνωστά σε επιτρόχια και κεντρομόλο $\boldsymbol{a} = \dot{v}\hat{\varepsilon} + \dfrac{v^2}{R}\hat{n}$ και η ανάλυση του νόμου Νεύτωνα στα μοναδιαία $\hat{\varepsilon}$ και $\hat{n}$ δίνει τις σχέσεις 5.6 και 5.5.

Η σχέση 5.5 δίνει την τάση του νήματος. Η σχέση 5.6 είναι η εξίσωση κίνησης που καθορίζει την $\phi(t)$. Είναι ισοδύναμη με τη διατήρηση ενέργειας, η οποία ισχύει αφού το βάρος είναι συντηρητική δύναμη με $V = -mgx = -mgR\cos\phi$ (θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που περνά από το κέντρο O) και η τάση του νήματος δεν παράγει έργο σαν κάθετη στην κίνηση (είναι τετριμμένη περίπτωση συντηρητικής δύναμης). Το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι

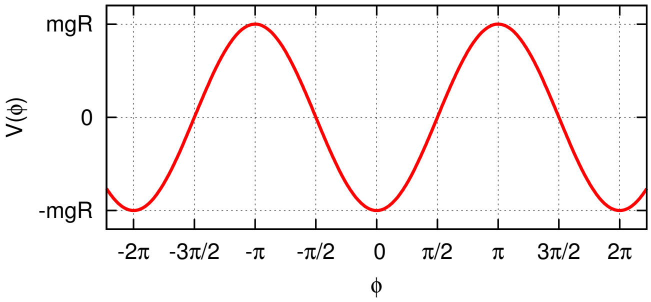
$$\frac{mR^2\dot{\phi}^2}{2} - mgR\cos\phi = E\,, \tag{5.7}$$

όπου $E = \dfrac{mR^2\dot{\phi_i}^2}{2} - mgR\cos\phi_i$ αν γνωρίζουμε αρχικές συνθήκες.

Ένας ισοδύναμος τρόπος για να βρούμε την σχέση (5.7) είναι να ολοκληρώσουμε την εξίσωση (5.6): Με $v = R\dot{\phi} \Leftrightarrow \dot{\phi} = \dfrac{v}{R}$ μπορούμε να γράψουμε $R\ddot{\phi} = \dfrac{dv}{d\phi}\dot{\phi} = \dfrac{v}{R}\dfrac{dv}{d\phi}$, οπότε η εξίσωση (5.6) γράφεται $m\dfrac{v}{R}\dfrac{dv}{d\phi} = -mg\sin\phi \Leftrightarrow \displaystyle\int_{v_i}^{v} mv\,dv = -\int_{\phi_i}^{\phi} mgR\sin\phi\,d\phi \Leftrightarrow \left[\frac{mv^2}{2}\right]_{v_i}^{v} = mgR\left[\cos\phi\right]_{\phi_i}^{\phi}$.

Το ολοκλήρωμα ενέργειας 5.7 είναι μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, χωριζόμενων μεταβλητών και ανάγεται σε ολοκλήρωμα το οποίο όμως δεν μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά. Αρκεί όμως η μελέτη του γραφήματος της δυναμικής ενέργειας 5.18 για να περιγράψουμε την κίνηση μέσω της σχέσης $\dfrac{mR^2\dot{\phi_i}^2}{2} = E - V(\phi) \geq 0$.

Αν $E > mgR$ το σώμα εκτελεί πλήρεις κύκλους (μπορούμε να θεωρούμε ότι η γωνία ϕ μεταβάλλεται μονότονα στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$, μόνιμα αυξάνεται ή μειώνεται, δηλ. το σώμα στρέφεται κατά την ορθή ή την



Σχήμα 5.18: Δυναμική ενέργεια επίπεδου ιδανικού εκκρεμούς $V(\phi) = -mgR\cos\phi$. Μπορούμε να επεκτείνουμε το πεδίο τιμών της συντεταγμένης ϕ σε $(-\infty, +\infty)$ για να μεταβάλλεται συνεχώς όταν το σώμα εκτελεί πλήρεις κύκλους.

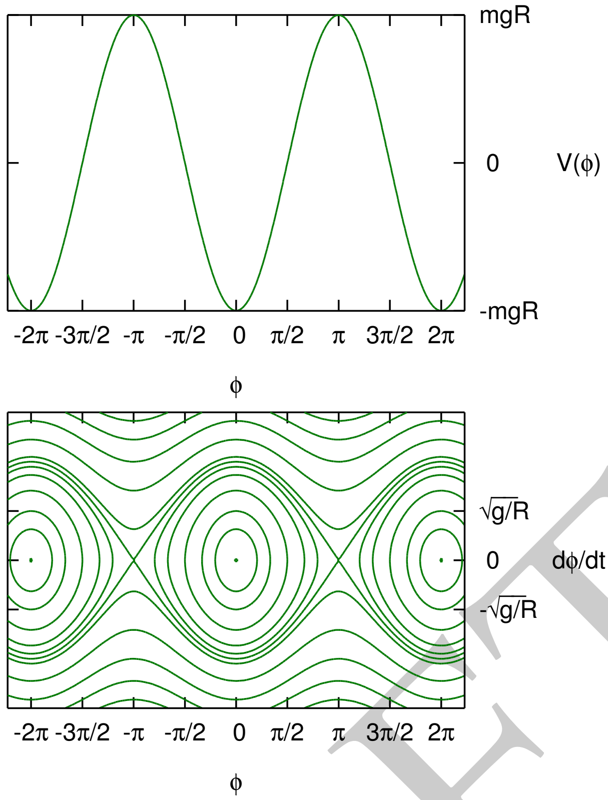
ανάδρομη φορά, ανάλογα με το πρόσημο της αρχικής $\dot\phi$).
Αν $-mgR < E < mgR$ το σώμα ταλαντώνεται μεταξύ των ακραίων θέσεων που αποτελούν λύσεις της $V(\phi_{max}) = E \Leftrightarrow \cos\phi_{max} = \dfrac{-E}{mgR}$, δηλ. μεταξύ των θέσεων $\phi = \pm\phi_{max}$ με $\phi_{max} = \arccos\dfrac{-E}{mgR}$. Για αρνητικές ενέργειες η ϕ_{max} είναι οξεία γωνία, ενώ για θετικές είναι αμβλεία, δηλ. οι ακραίες θέσεις βρίσκονται πάνω από το σημείο στήριξης. Η περίοδος της κίνησης βρίσκεται ολοκληρώνοντας την $dt = \dfrac{d\phi}{\dot\phi}$ με $\dot\phi = \pm\sqrt{\dfrac{2}{mR^2}(E + mgR\cos\phi)}$ όπως προκύπτει από το ολοκλήρωμα ενέργειας ($\pm$ είναι το πρόσημο της $\dot\phi$ και καθορίζεται από τη φορά κίνησης). Έτσι βρίσκουμε $T = 4\displaystyle\int_0^{\phi_{max}} \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{2}{mR^2}(E + mgR\cos\phi)}}$. (Το σύμβολο T για την περίοδο δεν πρέπει να συγχέεται με την τάση που επίσης συμβολίζεται με T.)
Για τις οριακές τιμές της ενέργειας, αν $E = mgR$ το σώμα πλησιάζει επ' άπειρον το ανώτερο σημείο $\phi = \pm\pi$ στο οποίο η δυναμική ενέργεια είναι μέγιστη, ενώ αν $E = -mgR$ το σώμα βρίσκεται ακίνητο στην κατώτερη θέση $\phi = 0$.

Τα παραπάνω μπορούν να απεικονιστούν και σε ένα διάγραμμα φάσης με άξονες ϕ–$\dot\phi$. Η μαθηματική έκφραση των καμπυλών φάσης είναι το ολοκλήρωμα ενέργειας 5.7, αν και είναι ευκολότερο να τις σχεδιάσουμε ποιοτικά με βάση τα όρια κίνησης για κάθε ενέργεια. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα 5.19.

Για ενέργειες κοντά στην ελάχιστη (λίγο μεγαλύτερες από $-mgR$) το σώμα εκτελεί μικρές ταλαντώσεις γύρω από την κατώτερη θέση $\phi = 0$ (ευσταθούς ισορροπίας). Μπορούμε να τις μελετήσουμε αναπτύσσοντας κατά Taylor την δυναμική ενέργεια και γενικά το ολοκλήρωμα ενέργειας κρατώντας μέχρι δεύτερης τάξης όρους κοντά στο σημείο αυτό. Το ανάπτυγμα του $\cos\phi$ γύρω από το μηδέν είναι $\cos\phi \approx 1 - \phi^2/2$, οπότε $V \approx -mgR + \dfrac{mgR}{2}\phi^2$. Έτσι το ολοκλήρωμα ενέργειας δίνει $\dfrac{mR^2\dot\phi^2}{2} + \dfrac{mgR}{2}\phi^2 = E + mgR$ σταθερά. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε την εξίσωση $\ddot\phi + \dfrac{g}{R}\phi = 0$, δηλ. εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή όπως αναμέναμε. Στην ίδια εξίσωση θα καταλήγαμε αν αναπτύσσαμε την εξίσωση κίνησης 5.6 που προέκυψε από το νόμο Νεύτωνα, κρατώντας μέχρι πρώτης τάξης όρους και χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του $\sin\phi$ γύρω από το μηδέν που είναι $\sin\phi \approx \phi$. Έτσι βρίσκουμε ότι η προβολή του βάρους πάνω στην κίνηση είναι γραμμική δύναμη επαναφοράς $-mg\sin\phi \approx -mg\phi$.

Προέκυψαν λοιπόν ταλαντώσεις με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{R}}$ και περίοδο $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$.

Όπως είδαμε μέχρι τώρα, η χρήση του ολοκληρώματος ενέργειας είναι ακριβώς ίδια με τις κινήσεις σε ευθεία. Παρότι η συντεταγμένη που καθορίζει τη θέση εδώ είναι γωνία ϕ και η χρονική της παράγωγος $\dot\phi$ είναι γωνιακή ταχύτητα, η κινητική ενέργεια είναι πάλι ανάλογη του τετραγώνου της $\dot\phi$ και είναι πάντα θετική (ή μηδέν στα σημεία που το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο). Ότι έχουμε δει μέχρι τώρα για κίνηση σε ευθεία γενι-



Σχήμα 5.19: Το διάγραμμα φάσης του ιδανικού επίπεδου εκκρεμούς (κάτω από το γράφημα της δυναμικής ενέργειας).

κεύεται σε οποιαδήποτε μονοδιάστατη κίνηση (δηλ. κίνηση σε καμπύλη δεδομένου σχήματος) για την οποία η θέση καθορίζεται μονοσήμαντα από μία μόνο κατάλληλη συντεταγμένη και το ολοκλήρωμα ενέργειας, εφόσον υπάρχει, είναι η εξίσωση κίνησης που καθορίζει την χρονική εξέλιξη αυτής της συντεταγμένης.

Όλη η μελέτη που προηγήθηκε προϋποθέτει ότι το σώμα κινείται κυκλικά, κάτι που σίγουρα συμβαίνει αν το σώμα είναι στηριγμένο σε αβαρή ράβδο μήκους R. Αν όμως είναι δεμένο σε νήμα πρέπει να διερευνήσουμε αν το νήμα παραμένει τεντωμένο, κάτι που ισχύει αν υπάρχει τάση $T \geq 0$ (το διάνυσμα της τάσης έχει γραφεί $\boldsymbol{T} = -T\hat{\varpi}$). Η εξίσωση (5.5), αντικαθιστώντας την $\dot{\phi}^2$ από την εξίσωση (5.7), δίνει την τάση σε κάθε θέση

$$T = \frac{2E}{R} + 3mg\cos\phi\,. \tag{5.8}$$

Όσο το σώμα ανυψώνεται η τάση μειώνεται.
Καταρχάς η εξίσωση (5.5) δείχνει ότι πιθανός μηδενισμός της τάσης είναι δυνατός μόνο αν $\cos\phi < 0$, δηλ. σε θέση πάνω από το κέντρο της τροχιάς. Αν η ενέργεια είναι αρνητική το σώμα δεν φτάνει σε τέτοιες θέσεις, επομένως το νήμα παραμένει διαρκώς τεντωμένο.
Για θετικές ενέργειες το νήμα χαλαρώνει στην αμβλεία γωνία ϕ_0 στην οποία, σύμφωνα με τη σχέση 5.8, ισχύει $\cos\phi_0 = -\dfrac{2E}{3mgR}$. Θέση χαλάρωσης υπάρχει μόνο αν $E < 3mgR/2$.
(Αν $E > 3mgR/2$ το σώμα συνεχίζει να κινείται κυκλικά επ' άπειρον, χωρίς να αλλάζει φορά κίνησης και χωρίς η τάση να μηδενίζεται. Αν $E = 3mgR/2$ η τάση μηδενίζεται στιγμιαία στην ανώτερη θέση $\phi_0 = \pi$, αλλά αμέσως μετά γίνεται πάλι θετική, οπότε το σώμα συνεχίζει να κινείται κυκλικά.)
Στο σημείο που το νήμα χαλαρώνει είναι $x_0 = R\cos\phi_0$ και $y_0 = R\sin\phi_0$. Η ταχύτητα έχει στο σημείο αυτό μέτρο $v_0 = \sqrt{-gx_0}$ (βρίσκεται από τη σχέση 5.7) και φορά $\hat{\phi} = -\sin\phi_0\hat{x}+\cos\phi_0\hat{y}$, δηλ. είναι $v_{0x} = -v_0\sin\phi_0$ και $v_{0y} = v_0\cos\phi_0$.
Μέχρι να ξανατεντωθεί το νήμα είναι $T = 0$ και το σώμα εκτελεί πλάγια βολή. Ο νόμος Νεύτωνα $m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g}$ δίνει $\ddot{x} = g$ και $\ddot{y} = 0$. Θεωρώντας $t = 0$ την στιγμή της χαλάρωσης του νήματος η πρώτη δίνει $\dot{x} = v_{0x} + gt \Leftrightarrow$

$x = x_0 + v_{0x}t + \dfrac{gt^2}{2}$, ή $x = R\cos\phi_0 - v_0 t\sin\phi_0 + \dfrac{gt^2}{2}$ και η δεύτερη δίνει $\dot{y} = v_{0y} \Leftrightarrow y = y_0 + v_{0y}t$, ή $y = R\sin\phi_0 + v_0 t\cos\phi_0$. Απαλείφοντας τον χρόνο βρίσκουμε την παραβολική εξίσωση τροχιάς $x - x_0 = \dfrac{v_{0x}}{v_{0y}}(y - y_0) + \dfrac{g}{2v_{0y}^2}(y - y_0)^2 \Leftrightarrow y^2 - 2Ry\sin^3\phi_0 + 2Rx\cos^3\phi_0 - 2R^2\cos^2\phi_0 + R^2\sin^2\phi_0 = 0$.

Όταν ξανατεντώσει το νήμα θα είναι $x = R\cos\phi_1$, $y = R\sin\phi_1$ οπότε θα ισχύει $\sin^2\phi_1 - 2\sin\phi_1\sin^3\phi_0 + 2\cos\phi_1\cos^3\phi_0 - 2\cos^2\phi_0 + \sin^2\phi_0 = 0$. Με χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων η τελευταία γράφεται $-4\sin^3\dfrac{\phi_1 - \phi_0}{2}\sin\dfrac{\phi_1 + 3\phi_0}{2} = 0$. Αφού $\phi_0 \in (\pi/2, \pi)$ και $\phi_1 \in (\pi, 5\pi/2)$ η μόνη λύση είναι η $\phi_1 = 4\pi - 3\phi_0$. Το νήμα λοιπόν ξανατεντώνει όταν το σώμα φτάσει στο σημείο $\dfrac{x_1}{R} = \cos(3\phi_0) = 4\cos^3\phi_0 - 3\cos\phi_0$, $\dfrac{y_1}{R} = -\sin(3\phi_0) = 4\sin^3\phi_0 - 3\sin\phi_0$.

Παράδειγμα 5.7:

Σημειακό σώμα μάζας m είναι δεμένο σε αβαρές, μη εκτατό νήμα μήκους R το άλλο άκρο του οποίου είναι σταθερό (ιδανικό εκκρεμές). Στο σώμα εκτός του βάρους mg και της τάσης του νήματος ασκείται και αντίσταση αέρα ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας, δηλ. $F_a = \dfrac{m\cot\lambda}{2R}v^2$, όπου λ σταθερή οξεία γωνία. Το σώμα ξεκινά από το κατώτερο σημείο με οριζόντια ταχύτητα $v_0 = \sqrt{2gR}\sin\lambda$.

(α) Ποια διαφορική εξίσωση δίνει την $\dfrac{v^2}{2gR} = f(\phi)$ συναρτήσει της γωνίας από την κατακόρυφο ϕ;

(β) Επιλύστε την εξίσωση αυτή για να βρείτε την ταχύτητα σε κάθε θέση όσο το σώμα ανεβαίνει. Σε ποια θέση σταματά στιγμιαία για πρώτη φορά;

(γ) Ελέγξτε αν το νήμα παραμένει τεντωμένο σε όλη την ανοδική κίνηση.

(δ) Ποια είναι η ταχύτητα σε κάθε θέση όσο το σώμα κατεβαίνει; Με πόση ταχύτητα θα ξαναπεράσει για πρώτη φορά από το κατώτερο σημείο;

Δίνεται ότι η γενική λύση της $\dfrac{dy}{dx} \pm y\cot\lambda = -\sin x$ είναι η $y = De^{\mp x\cot\lambda} \mp \sin\lambda\cos\lambda\sin x + \sin^2\lambda\cos x$.

Λύση:

Νόμος Νεύτωνα : $m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T} - \dfrac{m\cot\lambda}{2R}v^2\dfrac{\boldsymbol{v}}{|v|}$.

Σε πολικές συντεταγμένες στο σύστημα με άξονα x κατακόρυφο προς τα κάτω και y οριζόντιο προς την αρχική φορά κίνησης, γράφεται $mR\ddot{\phi}\hat{\phi} - m\dot{\phi}^2R\hat{\omega} = mg\cos\phi\hat{\omega} - mg\sin\phi\hat{\phi} - T\hat{\omega} - \dfrac{m\cot\lambda}{2R}|v|\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi}$.

Άρα η εφαπτομενική του συνιστώσα είναι $mR\ddot{\phi} = -mg\sin\phi - \dfrac{mR\cot\lambda}{2}|\dot{\phi}|\dot{\phi}$ και δίνει την γωνία $\phi(t)$, ενώ η ακτινική συνιστώσα είναι $-m\dot{\phi}^2R = mg\cos\phi - T$ και δίνει την τάση του νήματος T.

(α) Κατά το ανέβασμα ισχύει $\dot{\phi} > 0$ και άρα η $\hat{\phi}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα είναι $mR\ddot{\phi} = -mg\sin\phi - \dfrac{mR\cot\lambda}{2}\dot{\phi}^2$. Με $\ddot{\phi} = \dfrac{d\dot{\phi}}{d\phi}\dot{\phi} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d\dot{\phi}^2}{d\phi}$ και $\dot{\phi}^2 = \dfrac{v^2}{R^2} = \dfrac{2g}{R}f$ δίνει $\dfrac{df}{d\phi} + f\cot\lambda = -\sin\phi$.

(β) Η γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης δίνεται $f = De^{-\phi\cot\lambda} - \sin\lambda\cos\lambda\sin\phi + \sin^2\lambda\cos\phi$.

Η λύση της ομογενούς είναι $De^{-\phi\cot\lambda}$. Μια μερική λύση είναι η $A\sin\phi + B\cos\phi$. Η αντικατάσταση δίνει $A + B\cot\lambda = 0$ και $-B + A\cot\lambda = -1$, δηλ. $A = -\sin\lambda\cos\lambda$ και $B = \sin^2\lambda$. Άρα η γενική λύση είναι $f = De^{-\phi\cot\lambda} - \sin\lambda\cos\lambda\sin\phi + \sin^2\lambda\cos\phi = De^{-\phi\cot\lambda} - \sin\lambda\sin(\phi - \lambda)$.

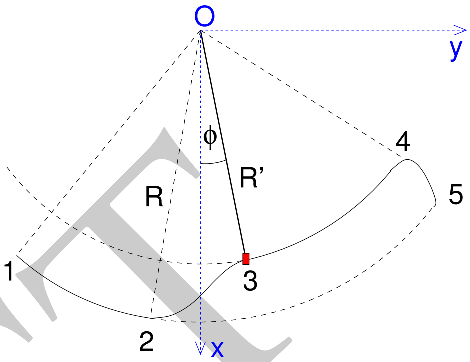
$f|_{\phi=0} = \dfrac{v_0^2}{2gR} = \sin^2\lambda$ οπότε $D = 0$ και σε κάθε θέση $\dfrac{v^2}{2gR} = \sin\lambda\left(\sin\lambda\cos\phi - \sin\phi\cos\lambda\right)$. Η ταχύτητα μηδενίζεται όταν $\tan\phi = \tan\lambda \Leftrightarrow \phi = \lambda$ (αυτή είναι η μικρότερη θετική λύση).

(γ) Η ακτινική συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα δίνει σε κάθε θέση $\mathrm{T} = \dfrac{mv^2}{R} + mg\cos\phi$. Προφανώς η τάση είναι θετική για $0 \le \phi \le \lambda$ (με δεδομένο ότι η λ είναι οξεία γωνία).

(δ) Στη συνέχεια το σώμα αρχίζει να κατεβαίνει και $\dot{\phi} < 0$. Η $\hat{\phi}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα είναι $mR\ddot{\phi} = -mg\sin\phi + \dfrac{mR\cot\lambda}{2}\dot{\phi}^2$ και όμοια με πριν δίνει $\dfrac{df}{d\phi} - f\cot\lambda = -\sin\phi$. Η γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης δίνεται $f = D'e^{\phi\cot\lambda} + \sin\lambda\cos\lambda\sin\phi + \sin^2\lambda\cos\phi$. Η αρχική (για το κατέβασμα) συνθήκη $f|_{\phi=\lambda} = 0$

προσδιορίζει την σταθερά ολοκλήρωσης $D' = -2\sin^2\lambda\cos\lambda e^{-\lambda\cot\lambda}$, οπότε $\frac{v^2}{2gR} = -2\sin^2\lambda\cos\lambda e^{(\phi-\lambda)\cot\lambda} + \sin\lambda\cos\lambda\sin\phi + \sin^2\lambda\cos\phi$. Θέτοντας $\phi = 0$ βρίσκουμε ότι το σώμα θα ξαναπεράσει για πρώτη φορά από την κατώτερη θέση με ταχύτητα μέτρου $v = v_0\sqrt{1 - 2\cos\lambda e^{-\lambda\cot\lambda}}$.

Παράδειγμα 5.8:
Το Botafumeiro (https://en.wikipedia.org/wiki/Botafumeiro) είναι ένα διάσημο θυμιατό που ταλαντώνεται σαν εκκρεμές στον Καθεδρικό Ναό της πόλης Σαντιάγκο ντε Κομποστέλα στη Γαλικία (Ισπανία). Όπως μπορείτε να δείτε στο video https://www.youtube.com/watch?v=FaFqodavn0I η κατάλληλη αυξομείωση του μήκους του σχοινιού από τους ρασοφόρους «tiraboleiros» οδηγεί σε εντυπωσιακή αύξηση του πλάτους ταλάντωσης. Συγκεκριμένα, οι tiraboleiros τραβάνε το σχοινί και μειώνουν το μήκος του εκκρεμούς από R σε R' όταν το θυμιατό βρίσκεται κοντά στην κατώτερη θέση ενώ αυξάνουν το μήκος από R' στην αρχική τιμή του R όταν το θυμιατό βρίσκεται κοντά στις ακραίες θέσεις. Η κίνηση από αριστερά προς τα δεξιά φαίνεται στο δίπλα σχήμα (όμοια είναι η κίνηση του θυμιατού από δεξιά προς τα αριστερά).



Για να εξηγήσουμε το φαινόμενο θα απλουστεύσουμε το πρόβλημα θεωρώντας ότι έχουμε σημειακό σώμα μάζας m δεμένο σε αβαρές μη-εκτατό νήμα, ότι η μείωση του μήκους μεταξύ των θέσεων 2 και 3 γίνεται πολύ γρήγορα έτσι ώστε η γωνία ϕ να μην προλαβαίνει να αλλάξει σημαντικά (είναι κοντά στην μηδενική τιμή) και ότι η αύξηση του μήκους μεταξύ των θέσεων 4 και 5 γίνεται επίσης πολύ γρήγορα ώστε η γωνία ϕ είναι περίπου σταθερή και ίση με την μέγιστη τιμή της.
(α) Έστω η γωνία στην ακραία θέση 1 είναι $-\phi^{(1)}_{\max}$. Θεωρώντας ότι η θέση 2 είναι πρακτικά η κατώτερη ($\phi \approx 0$) βρείτε την ταχύτητα στη θέση αυτή.
(β) Θεωρώντας ότι στην μετακίνηση $2 \to 3$ είναι $|\phi| \ll 1$ δείξτε ότι η στροφορμή διατηρείται και υπολογίστε την ταχύτητα στην θέση 3.
(γ) Βρείτε την δύναμη που ασκούν οι tiraboleiros σαν συνάρτηση της $\varpi(t)$ και δείξτε ότι το έργο της στην μετακίνηση $2 \to 3$ είναι ίσο με την αύξηση της μηχανικής ενέργειας. (Η ακτινική ταχύτητα ξεκινά από μηδενική στη θέση 2 και καταλήγει σε μηδενική στη θέση 3.)
(δ) Ποια είναι η γωνία $\phi^{(2)}_{\max}$ στην ακραία θέση 4;
(ε) Έστω η μετακίνηση $4 \to 5$ είναι ακτινική και η ταχύτητα στη θέση 5 μηδενική. Ποιο το έργο της τάσης του σχοινιού σε αυτή; Ποιο είναι το συνολικό έργο της τάσης για την κίνηση από το 1 στο 5;
(στ) Γιατί η αποδοτικότερη αύξηση του πλάτους υλοποιείται όταν η μείωση του μήκους του νήματος φροντίσουμε να συμβεί στη κατώτερη θέση και η αύξηση του μήκους συμβεί στην ακραία θέση;
(ζ) Αν $R = 20.6$ m, $R - R' = 2.9$ m, $m = 56.5$ kg και αρχικά το θυμιατό αφήνεται από $\phi^{(1)}_{\max} = 13^\circ$ βρείτε τις γωνίες των επόμενων δύο ακραίων θέσεων και την ενέργεια που δίνουν οι tiraboleiros.
Λύση:
(α) Από διατήρηση της μηχανικής ενέργειας $\frac{mv^2}{2} - mgx = \frac{mv^2}{2} - mgR\cos\phi$ μεταξύ των θέσεων 1 και 2 έχουμε $0 - gR\cos\phi^{(1)}_{\max} = \frac{v_2^2}{2} - gR \Leftrightarrow v_2 = \sqrt{2gR(1-\cos\phi^{(1)}_{\max})}$.
(β) Το βάρος είναι κατακόρυφο και η ροπή του (ως προς το O) είναι μηδενική, όπως και η ροπή της τάσης. Άρα η στροφορμή $m\varpi v$ διατηρείται.
Αυτό φαίνεται και από την $\hat{\phi}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα $m\frac{1}{\varpi}\frac{d}{dt}(\varpi^2\dot{\phi}) = mg\cdot\hat{\phi} = -mg\sin\phi \approx 0$.
Η διατήρηση στροφορμής μεταξύ των θέσεων 2 και 3 δίνει $v_3 = \frac{R}{R'}v_2 \Leftrightarrow v_3 = \frac{R}{R'}\sqrt{2gR(1-\cos\phi^{(1)}_{\max})}$.

(γ) Η ακτινική συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα $m(\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2) = mg - T$, χρησιμοποιώντας την διατήρηση στροφορμής $\varpi v = \varpi^2\dot{\phi} = Rv_2$ δίνει $T = \frac{mR^2v_2^2}{\varpi^3} + mg - m\ddot{\varpi}$.

Το έργο της στην μετακίνηση $2 \to 3$ είναι $W_T^{2\to3} = \int_2^3 (-T\hat{\varpi}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_2^3 \left(\frac{-mR^2v_2^2}{\varpi^3} - mg + m\ddot{\varpi}\right) d\varpi = \left[\frac{mR^2v_2^2}{2\varpi^2} - mg\varpi\right]_R^{R'} + \int_2^3 m\ddot{\varpi}\dot{\varpi}\,dt = \frac{mR^2v_2^2}{2R'^2} - \frac{mv_2^2}{2} + mg(R - R') + \left[\frac{m\dot{\varpi}^2}{2}\right]_2^3$. Αφού η ακτινική ταχύτητα είναι μηδενική στις θέσεις 2 και 3 ο τελευταίος όρος μηδενίζεται, οπότε πράγματι ισχύει η (αναμενόμενη από το Θ.Μ.Κ.Ε.) σχέση $W_T^{2\to3} = \left[\frac{mv^2}{2} - mg\varpi\right]_2^3$. Το έργο των tiraboleiros στην μετακίνηση $2 \to 3$ προκύπτει $W_T^{2\to3} = mgR\frac{R^2 - R'^2}{R'^2}\left(1 - \cos\phi_{\max}^{(1)}\right) + mg(R - R')$.

(δ) Από διατήρηση της μηχανικής ενέργειας $\frac{mv^2}{2} - mgR'\cos\phi$ μεταξύ των θέσεων 3 και 4 έχουμε $\frac{v_3^2}{2} - gR' = 0 - gR'\cos\phi_{\max}^{(2)} \Leftrightarrow 1 - \cos\phi_{\max}^{(2)} = (R/R')^3\left(1 - \cos\phi_{\max}^{(1)}\right)$.

Η χρήση της ταυτότητας $1 - \cos\phi = 2\sin^2\frac{\phi}{2}$ δίνει $\sin\frac{\phi_{\max}^{(2)}}{2} = (R/R')^{3/2}\sin\frac{\phi_{\max}^{(1)}}{2}$.

Έχουμε γεωμετρική πρόοδο και μετά από m ημιπεριόδους της κίνησης είναι $\sin\frac{\phi_{\max}^{(1+m)}}{2} = \left(\frac{R}{R'}\right)^{3m/2}\sin\frac{\phi_{\max}^{(1)}}{2}$.

(ε) Η ακτινική συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα $m(\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2) = mg\cos\phi - T$ για σταθερή $\phi = \phi_{\max}^{(2)}$ δίνει $T = mg\cos\phi_{\max}^{(2)} - m\ddot{\varpi}$.

Το έργο της στην μετακίνηση $4 \to 5$ είναι $W_T^{4\to5} = \int_4^5 (-T\hat{\varpi}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_4^5 \left(-mg\cos\phi_{\max}^{(2)} + m\ddot{\varpi}\right) d\varpi = -mg\cos\phi_{\max}^{(2)}\,[\varpi]_{R'}^{R} + \int_4^5 m\ddot{\varpi}\dot{\varpi}\,dt = -mg(R - R')\cos\phi_{\max}^{(2)} + \left[\frac{m\dot{\varpi}^2}{2}\right]_4^5$. Αφού η ακτινική ταχύτητα είναι μηδενική στις θέσεις 4 και 5 ο τελευταίος όρος μηδενίζεται, οπότε $W_T^{4\to5} = -mg(R - R')\cos\phi_{\max}^{(2)}$.

Ισχύει η (αναμενόμενη από το Θ.Μ.Κ.Ε.) σχέση $W_T^{4\to5} = \left[\frac{mv^2}{2} - mg\varpi\cos\phi\right]_4^5$.

Το συνολικό έργο της τάσης για την κίνηση από το 1 στο 5 είναι $W_T^{1\to5} = mgR\frac{R^3 - R'^3}{R'^3}(1 - \cos\phi_{\max}^{(1)})$.

(στ) Όταν ελαττώσουμε το μήκος δίνουμε ενέργεια στο σύστημα μέσω της τάσης του σχοινιού αφού η τάση είναι ομόρροπη στην μετατόπιση. Σε ένα κύκλο πρέπει επίσης να αυξήσουμε το μήκος επαναφέροντάς το στην αρχική τιμή του. Όσο το κάνουμε αυτό αφαιρούμε ενέργεια από το σύστημα, αφού η τάση είναι αντίρροπη στην μετατόπιση. Αφού οι ακτινικές μετατοπίσεις είναι ίδιες στην μείωση και αύξηση του μήκους ο αποδοτικότερος τρόπος να δώσουμε ενέργεια στο σύστημα είναι να ελαττώνουμε το μήκος εκεί που η τάση είναι μέγιστη και να το αυξάνουμε εκεί όπου είναι ελάχιστη. Από $\frac{mv^2}{\varpi} = T - mg\cos\phi \Leftrightarrow T = \frac{mv^2}{\varpi} + mg\cos\phi$ (σχέση που ισχύει όσο η ακτίνα είναι σταθερή) φαίνεται ότι η τάση είναι μέγιστη στην κατώτερη θέση (τόσο η ταχύτητα όσο και το $\cos\phi$ είναι μέγιστα εκεί) και ελάχιστη στην ακραία θέση (τόσο η ταχύτητα όσο και το $\cos\phi$ είναι ελάχιστα εκεί). Άρα συμφέρει να μειώσουμε το μήκος στην κατώτερη θέση και να το αυξήσουμε στην ακραία θέση.

(ζ) Η σχέση $1 - \cos\phi_{\max}^{(n+1)} = (R/R')^3\left(1 - \cos\phi_{\max}^{(n)}\right)$ μας δίνει κάθε νέο πλάτος $\phi_{\max}^{(n+1)}$ συναρτήσει του παλαιού $\phi_{\max}^{(n)}$. Προκύπτει $\phi_{\max}^{(n+1)} = \arccos\left[1 - (R/R')^3\left(1 - \cos\phi_{\max}^{(n)}\right)\right]$ και για $\phi_{\max}^{(1)} = 13^\circ$ έχουμε $\phi_{\max}^{(2)} = 16.34^\circ$ $\phi_{\max}^{(3)} = 20.56^\circ$.

Οι επόμενες μέγιστες γωνίες είναι $\phi_{\max}^{(4)} = 25.90^\circ$, $\phi_{\max}^{(5)} = 32.68^\circ$, $\phi_{\max}^{(6)} = 41.37^\circ$, $\phi_{\max}^{(7)} = 52.66^\circ$, $\phi_{\max}^{(8)} = 67.68^\circ$, $\phi_{\max}^{(9)} = 88.72^\circ$. Η μελέτη μας όμως δεν είναι σωστή για μεγάλα πλάτη όπου οι ταχύτητες θα είναι επίσης μεγάλες και πρέπει να λάβουμε υπόψη πολλούς άλλους παράγοντες, π.χ. το ότι το θυμιατό δεν είναι σημειακό, το σχοινί έχει βάρος, υπάρχει αντίσταση αέρα.

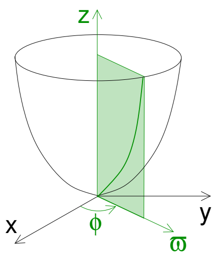
Η ενέργεια που δίνουν οι tiraboleiros για να αυξηθεί η μέγιστη γωνία από $\phi_{\max}^{(n)}$ σε $\phi_{\max}^{(n+1)}$ είναι η μεταβολή μηχανικής ενέργειας $W_n = mgR\left(\cos\phi_{\max}^{(n)} - \cos\phi_{\max}^{(n+1)}\right)$.
Αυτό ισούται με το $W_T^{1\to 5} = mgR\dfrac{R^3 - R'^3}{R'^3}(1 - \cos\phi_{\max}^{(n)})$ που έχει βρεθεί στο ερώτημα (ε). Είναι $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} = \dfrac{1 - \cos\phi_{\max}^{(n+1)}}{1 - \cos\phi_{\max}^{(n)}} = \left(\dfrac{R}{R'}\right)^3$, δηλ. έχουμε γεωμετρική αύξηση.
Για τη μετακίνηση από $\phi_{\max}^{(1)}$ σε $\phi_{\max}^{(2)}$ δίνουν $W_1 = 168.54\,\mathrm{J}$ και για τη μετακίνηση από $\phi_{\max}^{(2)}$ σε $\phi_{\max}^{(3)}$ δίνουν $W_2 = 266.08\,\mathrm{J}$.

5.4 Προβλήματα που ανάγονται σε μονοδιάστατα

Η μελέτη που προηγήθηκε και βασίζεται στη χρήση του ολοκληρώματος ενέργειας για να περιγράψουμε την κίνηση ενός σώματος μπορεί να επεκταθεί και σε διδιάστατα ή τριδιάστατα προβλήματα, αρκεί να μπορούμε με κάποιο τρόπο να απαλείψουμε όλες τις συντεταγμένες εκτός από μία. Η απαλοιφή αυτή γίνεται χρησιμοποιώντας κάποιο ολοκλήρωμα ορμής ή στροφορμής (αν βέβαια υπάρχει). Μέσω αυτής καταλήγουμε στο να γράψουμε το ολοκλήρωμα ενέργειας στη μορφή $T_{\mathrm{eff}}(q,\dot q) + V_{\mathrm{eff}}(q) = E$ όπου q η συντεταγμένη που απέμεινε, δηλ. σαν ολοκλήρωμα ενέργειας μίας μονοδιάστατης κίνησης στην οποία ανάχθηκε το αρχικό πρόβλημα.

Τα παραπάνω θα γίνουν κατανοητά μέσω των ακόλουθων παραδειγμάτων.

Παράδειγμα 5.9:



Σημειακό σώμα μάζας m κινείται στο εσωτερικό λείου μπωλ με κυκλικό παραβολοειδές σχήμα, δηλ. σε επιφάνεια με εξίσωση $z = \lambda\varpi^2$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες (όπου λ θετική σταθερά) και z ο κατακόρυφος άξονας με φορά προς τα πάνω (η επιτάχυνση βαρύτητας είναι $\boldsymbol{g} = -g\hat{z}$).
(α) Έστω βάλουμε το σώμα οριζόντια με ταχύτητα $\boldsymbol{v}_i = v_i\hat{\phi}$ από σημείο του μπωλ. Αν το ύψος του μπωλ είναι H για ποιες v_i το σώμα θα παραμείνει στο εσωτερικό του;
(β) Πως πρέπει να βάλουμε το σώμα ώστε να εκτελεί οριζόντια κυκλική κίνηση ακτίνας ϖ_i;
(γ) Μελετήστε τις μικρές διαταραχές γύρω από κυκλική τροχιά.

Σκέψεις:

Η κίνηση γίνεται σε διδιάστατη επιφάνεια (αφού υπάρχει ο περιορισμός $z = \lambda\varpi^2$ που ελαττώνει τις διαστάσεις από τρεις σε δύο). Οι βολικότερες συντεταγμένες για να μελετηθεί είναι οι κυλινδρικές και συγκεκριμένα οι ϖ και ϕ (μιας και η z είναι γνωστή από $z = \lambda\varpi^2$ εφόσον γνωρίζουμε την ϖ). Επομένως πρέπει να βρούμε δύο εξισώσεις κίνησης, δηλ. δύο διαφορικές εξισώσεις που καθορίζουν την χρονική εξέλιξη των $\varpi(t)$ και $\phi(t)$.
Η βασική εξίσωση από την οποία θα προκύψουν, άμεσα ή έμμεσα, είναι βέβαια ο νόμος Νεύτωνα $m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N}$ όπου $\boldsymbol{N}$ η αντίδραση από το μπωλ η οποία είναι επίσης άγνωστη συνάρτηση του χρόνου.
Αφού δεν υπάρχουν τριβές η αντίδραση είναι κάθετη στην επιφάνεια του μπωλ. Η γεωμετρία της επιφάνειας καθορίζει λοιπόν την διεύθυνση της $\boldsymbol{N}$ σε κάθε σημείο της τροχιάς και ο επιπλέον άγνωστος είναι μόνο το μέτρο της. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι τρεις συνιστώσες της διανυσματικής σχέσης $m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N}$ θα δώσουν τρεις εξισώσεις για τους τρεις αγνώστους $\varpi(t)$, $\phi(t)$ και $N(t)$.

Είναι επιθυμητό να παρακαμφθεί η εύρεση της N και να μπορούμε να γράψουμε εξισώσεις που θα δώσουν μόνο τη θέση του σώματος.
Εκμεταλλευόμενοι την καθετότητα της $\boldsymbol{N}$ με την ταχύτητα μπορούμε να πάρουμε μία εξίσωση που δεν την περιέχει, αν προβάλλουμε το νόμο Νεύτωνα πάνω στην ταχύτητα (και θέσουμε την ισχύ της αντίδρασης $\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{v} = 0$). Έτσι βρίσκουμε $m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v} \Leftrightarrow m\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{g}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{mv^2}{2} - m\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r}\right) = 0$, δηλ. ολοκλήρωμα ενέργειας (αναμενόμενο αφού οι δυνάμεις είναι συντηρητικές). Γράφοντας τη θέση και την ταχύτητα σε κυλινδρικές αυτή είναι μία εξίσωση που περιέχει της άγνωστες $\varpi(t)$ και $\phi(t)$. Επειδή όμως το πρόβλημα είναι διδιάστατο δεν αρκεί μόνο το ολοκλήρωμα ενέργειας, χρειαζόμαστε και δεύτερη εξίσωση.

Αν σκεφτούμε ποια άλλη συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα δεν περιέχει την αντίδραση συμπεραίνουμε ότι αυτή είναι η $\hat{\phi}$, γιατί από τη γεωμετρία της επιφάνειας είναι προφανές ότι η κάθετη αντίδραση δεν έχει $\hat{\phi}$ συνιστώσα, $N_\phi = 0$. Βρίσκουμε λοιπόν μία δεύτερη εξίσωση $ma_\phi = 0$. Αντικαθιστώντας την μορφή της επιτάχυνσης σε κυλινδρικές παίρνουμε $\frac{1}{\varpi}\frac{d}{dt}\left(m\varpi^2\dot{\phi}\right) = 0$, δηλ. ολοκλήρωμα της $\hat{z}$ στροφορμής (αναμενόμενο αφού δεν υπάρχει δύναμη αζιμουθιακή δύναμη και άρα δεν υπάρχει $\hat{z}$ ροπή).
Υπάρχει τρόπος λοιπόν να παρακαμφθεί η εύρεση της $\boldsymbol{N}$.

Πριν προχωρήσουμε στην λύση θα αναλύσουμε την πορεία επίλυσης αν δεν παρακάμπταμε την εύρεση της αντίδρασης (είτε γιατί δεν βρίσκαμε τον τρόπο να το κάνουμε, είτε γιατί θέλαμε να την υπολογίσουμε, π.χ. για να διερευνήσουμε αν τυχόν το σώμα χάνει την επαφή του με την επιφάνεια – κάτι που στην συγκεκριμένη γεωμετρία της επιφάνειας είναι προφανές ότι δεν συμβαίνει ποτέ).

Δύο ανεξάρτητα εφαπτόμενα μοναδιαία πάνω στην επιφάνεια του μπωλ είναι το $\hat{e}_1 = \cos\psi\hat{\varpi} + \sin\psi\hat{z}$ πάνω στην εφαπτόμενη της παραβολής $z = \lambda\varpi^2$ στο πολοειδές επίπεδο, όπου $\tan\psi = \frac{dz}{d\varpi} = 2\lambda\varpi$ η κλίση, και το $\hat{e}_2 = \hat{\phi}$. Αυτά τα δύο ορίζουν το εφαπτόμενο επίπεδο σε κάθε σημείο και την κάθετη σε αυτό $\hat{e}_3 = \frac{\hat{e}_1\times\hat{e}_2}{|\hat{e}_1\times\hat{e}_2|} = -\sin\psi\hat{\varpi} + \cos\psi\hat{z}$. Αφού ψ είναι η οξεία γωνία που ορίζεται από $\tan\psi = 2\lambda\varpi$ είναι $\sin\psi = \frac{\tan\psi}{\sqrt{\tan^2\psi+1}} = \frac{2\lambda\varpi}{\sqrt{1+4\lambda^2\varpi^2}}$ και $\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{\tan^2\psi+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+4\lambda^2\varpi^2}}$.
(Το ίδιο βρίσκεται αν σκεφτούμε το στοιχειώδες $d\boldsymbol{r}$ πάνω στην επιφάνεια του μπωλ. Θέτοντας $z = \lambda\varpi^2 \Rightarrow dz = 2\lambda\varpi d\varpi$ αυτό γράφεται $d\boldsymbol{r} = d\varpi\hat{\varpi} + \varpi d\phi\hat{\phi} + dz\hat{z} = (\hat{\varpi} + 2\lambda\varpi\hat{z})d\varpi + \varpi d\phi\hat{\phi}$, οπότε οι ανεξάρτητες κατευθύνσεις είναι οι $\hat{\varpi} + 2\lambda\varpi\hat{z}$ και $\hat{\phi}$. Τα αντίστοιχα μοναδιαία είναι τα $\hat{e}_1 = \frac{\hat{\varpi} + 2\lambda\varpi\hat{z}}{\sqrt{1+4\lambda^2\varpi^2}}$ και $\hat{e}_2 = \hat{\phi}$.)
Η αντίδραση είναι $\boldsymbol{N} = N\hat{e}_3 = N\frac{-2\lambda\varpi\hat{\varpi} + \hat{z}}{\sqrt{1+4\lambda^2\varpi^2}}$.
Αντικαθιστώντας στο νόμο Νεύτωνα βρίσκουμε τις τρεις συνιστώσες του σε κυλινδρικές $m(\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2) = N\frac{-2\lambda\varpi}{\sqrt{1+4\lambda^2\varpi^2}}$, $\frac{1}{\varpi}\frac{d}{dt}\left(m\varpi^2\dot{\phi}\right) = 0$, $m\ddot{z} = -mg + N\frac{1}{\sqrt{1+4\lambda^2\varpi^2}}$, που σε συνδυασμό με την $z = \lambda\varpi^2$ (οπότε $\ddot{z} = 2\lambda(\dot{\varpi}^2 + \varpi\ddot{\varpi})$) καθορίζουν πλήρως τη θέση $\varpi(t)$, $\phi(t)$, $z(t)$ και την αντίδραση $N(t)$.

Λύση:
Σε κυλινδρικές συντεταγμένες η θέση και η ταχύτητα είναι $\boldsymbol{r} = \varpi\hat{\varpi} + z\hat{z}$, $\boldsymbol{v} = \dot{\varpi}\hat{\varpi} + \varpi\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}$, με $z = \lambda\varpi^2$, $\dot{z} = 2\lambda\varpi\dot{\varpi}$, ενώ η $\hat{z}$ συνιστώσα της στροφορμής είναι $L_z = m\varpi^2\dot{\phi}$.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι συντηρητικές, το βάρος αντιστοιχεί σε δυναμική ενέργεια $V = mgz$, ενώ η αντίδραση σαν κάθετη στην κίνηση δεν παράγει έργο. Άρα υπάρχει ολοκλήρωμα ενέργειας, το οποίο γράφεται

$$\frac{m}{2}(1+4\lambda^2\varpi^2)\dot{\varpi}^2 + \frac{m}{2}\varpi^2\dot{\phi}^2 + mg\lambda\varpi^2 = E = \text{ σταθερά.}$$

Αφού δεν υπάρχει αζιμουθιακή δύναμη η $\hat{z}$ στροφορμή διατηρείται, δηλ. ισχύει

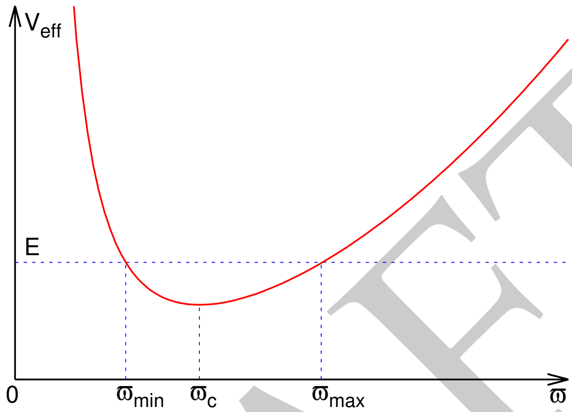
$$m\varpi^2\dot{\phi} = L_z = \text{ σταθερά.}$$

Λύνοντας την τελευταία ως προς $\dot{\phi}$ και αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα ενέργειας η κίνηση ανάγεται σε μονοδιάστατη ως προς θέση ϖ και ολοκλήρωμα ενέργειας

$$\underbrace{\frac{m}{2}(1+4\lambda^2\varpi^2)\dot{\varpi}^2}_{T_{\text{eff}}} + \underbrace{\frac{L_z^2}{2m\varpi^2} + mg\lambda\varpi^2}_{V_{\text{eff}}(\varpi)} = E\,.$$

Η ενεργός δυναμική ενέργεια είναι η συνάρτηση της θέσης $V_{\text{eff}}(\varpi) = \frac{L_z^2}{2m\varpi^2} + mg\lambda\varpi^2$ (συμπεριλαμβάνει την βαρυτική δυναμική ενέργεια, αλλά και την περιστροφική κινητική που έχει εκφραστεί σαν συνάρτηση της θέσης μέσω του ολοκληρώματος στροφορμής). Η ενεργός κινητική ενέργεια $T_{\text{eff}} = \frac{m}{2}(1+4\lambda^2\varpi^2)\dot{\varpi}^2$ είναι παντού θετική και μηδενίζεται στα σημεία όπου $\dot{\varpi} = 0$ στα οποία δεν υπάρχει κίνηση στην ακτινική κατεύθυνση. Το ολοκλήρωμα ενέργειας περιγράφει πλήρως την ακτινική κίνηση του σώματος και μπορεί να μελετηθεί με τις γνωστές μεθόδους που γνωρίζουμε για τις μονοδιάστατες κινήσεις (είναι χωριζόμενων μεταβλητών οπότε δίνει τη σχέση ϖ-t σε μορφή ολοκληρώματος, το γράφημα της ενεργού δυναμικής ενέργειας δίνει τις επιτρεπτές περιοχές κίνησης στην ακτινική κατεύθυνση μέσω της ανισότητας $V_{\rm eff}(\varpi) \le E$, κ.ο.κ.) Αφού βρούμε την $\varpi(t)$ μπορούμε να βρούμε και την $\phi(t)$ μέσω της διατήρησης στροφορμής, δηλ. ολοκληρώνοντας την $\dot\phi = \dfrac{L_z}{m\varpi^2} \Leftrightarrow \phi = \displaystyle\int \dfrac{L_z}{m[\varpi(t)]^2}dt$.

Η συνάρτηση $V_{\rm eff}(\varpi)$ έχει παράγωγο $V'_{\rm eff}(\varpi) = \dfrac{2mg\lambda}{\varpi^3}\left(\varpi^4 - \varpi_c^4\right)$, όπου $\varpi_c = \left(\dfrac{L_z^2}{2m^2 g\lambda}\right)^{1/4}$, άρα έχει ελάχιστο στην ακτίνα ϖ_c ίσο με $E_c = V_{\rm eff}(\varpi) = \dfrac{L_z^2}{m\varpi_c^2}$.
Το γράφημα της φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



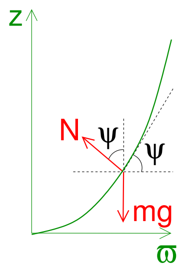
Σύμφωνα με αυτό για κάθε ενέργεια E και στροφορμή L_z (η συνάρτηση $V_{\rm eff}(\varpi)$ εμπεριέχει την στροφορμή) η επιτρεπτή περιοχή κίνησης είναι $\varpi_{\rm min} \le \varpi \le \varpi_{\rm max}$ όπου $\varpi_{\rm min}$, $\varpi_{\rm max}$ οι δύο λύσεις της $V_{\rm eff}(\varpi) = E$ (που μπορούν μάλιστα να βρεθούν αναλυτικά γιατί η σχέση είναι τριώνυμο ως προς ϖ^2). Στα σημεία αυτά η ακτινική κίνηση μηδενίζεται (μηδενίζεται και η κατακόρυφη, αλλά υπάρχει αζιμουθιακή κίνηση, δηλ. η τροχιά τοπικά είναι οριζόντια κυκλική). Αν η ενέργεια είναι ίση με την ελάχιστη δυνατή τιμή της E_c (για δεδομένη στροφορμή) η επιτρεπτή περιοχή εκφυλίζεται σε σημείο, δηλ. ισχύει σε κάθε χρόνο $\dot\varpi = 0$ που σημαίνει ότι η κίνηση είναι κυκλική ακτίνας ϖ_c. (Το ελάχιστο είναι σημείο ισορροπίας μόνο για την ακτινική κίνηση.)

(α) Από τις αρχικές συνθήκες υπολογίζουμε τη στροφορμή $L_z = m\varpi_i v_i$ και την ενέργεια $E = \dfrac{mv_i^2}{2} + mg\lambda\varpi_i^2$, όπου ϖ_i η αρχική ακτίνα. Η επιτρεπτή περιοχή κίνησης έχει όρια τις λύσεις της $V_{\rm eff}(\varpi) = E$ που προκύπτουν ϖ_i (η αρχική ακτίνα) και $\dfrac{v_i^2}{2g\lambda}$. Το ύψος του μπωλ αντιστοιχεί σε ακτίνα $R = \sqrt{H/\lambda}$. Για να μην φτάσει ποτέ το σώμα σε αυτή την ακτίνα πρέπει να ισχύει $R > \max\left\{\varpi_i, \dfrac{|v_i|}{\sqrt{2g\lambda}}\right\}$. Για $|v_i| \le \varpi_i\sqrt{2g\lambda}$ η ανισότητα ισχύει (η κίνηση περιορίζεται σε ακτίνες μικρότερες της αρχικής). Για $|v_i| > \varpi_i\sqrt{2g\lambda}$ η ανισότητα ισχύει αν $|v_i| < R\sqrt{2g\lambda} \Leftrightarrow |v_i| < \sqrt{2gH}$.
Η απάντηση είναι λοιπόν ότι πρέπει να ισχύει $|v_i| < \sqrt{2gH}$.
Το αποτέλεσμα θα μπορούσε να βρεθεί χρησιμοποιώντας άμεσα τις διατηρήσεις ενέργειας και στροφορμής. Οριακά το σώμα φτάνει στο ύψος H έχοντας εκεί μόνο αζιμουθιακή ταχύτητα v_f, η οποία από διατήρηση στροφορμής $m\varpi_i v_i = mRv_f$ προκύπτει $v_f = v_i\varpi_i/R$. Η διατήρηση ενέργειας $\dfrac{mv_i^2}{2} + mgz_i = \dfrac{mv_f^2}{2} + mgH$, θέτοντας $z_i = \lambda\varpi_i^2 = \dfrac{\varpi_i^2}{R^2}H$, δίνει $|v_i| = \sqrt{2gH}$.
Είναι αξιοσημείωτο ότι για το συγκεκριμένο παραβολικό σχήμα της επιφάνειας το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από την αρχική θέση.

(β) Προφανώς η αρχική ταχύτητα πρέπει να είναι οριζόντια (μόνο αζιμουθιακή) $v_i\hat\phi$ και σύμφωνα με το γράφημα της $V_{\rm eff}(\varpi)$ η κίνηση αντιστοιχεί στο ελάχιστο, δηλ. πρέπει να ισχύει $\varpi_i = \varpi_c$. Αντικαθιστώντας

$\varpi_c = \left(\dfrac{L_z^2}{2m^2 g\lambda}\right)^{1/4}$ και $L_z = m\varpi_i v_i$ βρίσκουμε $|v_i| = \varpi_i\sqrt{2g\lambda}$.

Η απάντηση θα μπορούσε να δοθεί μελετώντας τις δυνάμεις και απαιτώντας η συνισταμένη τους $m\mathbf{g} + \mathbf{N}$ να είναι ίση με την κεντρομόλο που απαιτείται για την κυκλική κίνηση $-\dfrac{mv_i^2}{\varpi_i}\hat{\varpi}$. Αν ψ είναι η κλίση της παραβολικής επιφάνειας του μπωλ για την οποία $\tan\psi = \dfrac{dz}{d\varpi} = 2\lambda\varpi$, στην κατακόρυφη διεύθυνση παίρνουμε $N\cos\psi = mg$ και στην οριζόντια $N\sin\psi = \dfrac{mv_i^2}{\varpi_i}$. Διαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε $|v_i| = \varpi_i\sqrt{2g\lambda}$.



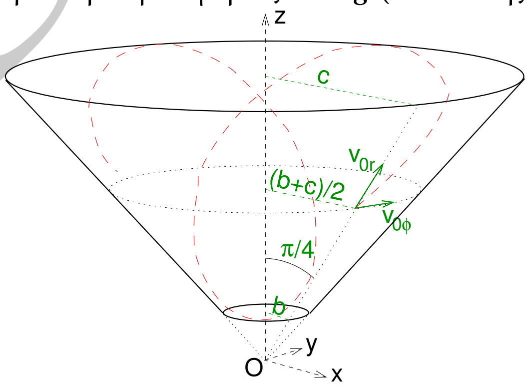
(γ) Η κυκλική τροχιά αντιστοιχεί σε ελάχιστο της ενεργού δυναμικής ενέργειας, επομένως οι μικρές διαταραχές γύρω από αυτό είναι ευσταθείς και θα αντιστοιχούν σε αρμονική λύση. Θέτοντας $q = \varpi - \varpi_c$ και αναπτύσσοντας την εξίσωση κίνησης $T_{\text{eff}} + V_{\text{eff}} = E$ γύρω από την θέση «ισορροπίας», κρατώντας μέχρι δεύτερης τάξης όρους ως προς q (αναπτύσσουμε κατά Taylor την $V_{\text{eff}} \approx V_{\text{eff}}(\varpi_c) + V'_{\text{eff}}(\varpi_c)q + \dfrac{1}{2}V''_{\text{eff}}(\varpi_c)q^2$, ενώ στην «κινητική ενέργεια» ο όρος $\dot{\varpi}^2 = \dot{q}^2$ είναι ήδη δεύτερης τάξης, οπότε στον πολλαπλασιαστικό παράγοντα θέτουμε απλά $\varpi = \varpi_c$), βρίσκουμε $\dfrac{m}{2}(1 + 4\lambda^2\varpi_c^2)\dot{q}^2 + \dfrac{1}{2}V''_{\text{eff}}(\varpi_c)q^2 =$ σταθερά, όπου $V''_{\text{eff}}(\varpi_c) = 8mg\lambda$. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε $m(1 + 4\lambda^2\varpi_c^2)\ddot{q} + 8mg\lambda q = 0$, δηλ. εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\dfrac{8g\lambda}{1 + 4\lambda^2\varpi_c^2}}$. Η γενική λύση είναι $q = D\sin(\omega t + C)$, δηλ. $\varpi = \varpi_c + D\sin(\omega t + C)$.

Η γωνιακή ταχύτητα της σχεδόν κυκλικής τροχιάς είναι προσεγγιστικά $\dot{\phi} = \dfrac{L_z}{m\varpi_c^2} = \sqrt{2g\lambda}$ (χρησιμοποιώντας τη σχέση $\varpi_c = \left(\dfrac{L_z^2}{2m^2 g\lambda}\right)^{1/4}$). Η περίοδος της ακτινικής κίνησης είναι $T_\varpi = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{\pi\sqrt{1 + 4\lambda^2\varpi_c^2}}{\sqrt{2g\lambda}}$ και σε αυτό το χρόνο έχει διαγραφεί γωνία $\Delta\phi = \sqrt{2g\lambda}T_\varpi = \pi\sqrt{1 + 4\lambda^2\varpi_c^2}$.

Χρησιμοποιώντας την σχέση γωνίας–χρόνου $\phi = \sqrt{2g\lambda}\, t + \phi_i$ βρίσκουμε ότι για την τροχιά ισχύει $\varpi = \varpi_c + D\sin\left(\dfrac{2}{\sqrt{1 + 4\lambda^2\varpi_c^2}}\phi + C'\right)$.

Παράδειγμα 5.10:

Έστω ο κατακόρυφος κόλουρος κώνος του σχήματος με ημιάνοιγμα $\theta = \pi/4 = 45°$, ελάχιστη κυλινδρική ακτίνα b και μέγιστη κυλινδρική ακτίνα $c = 7b$. Σημειακό σώμα μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω στην εσωτερική του επιφάνεια, υπό την επίδραση του βάρους του mg (και κάθετης αντίδρασης).



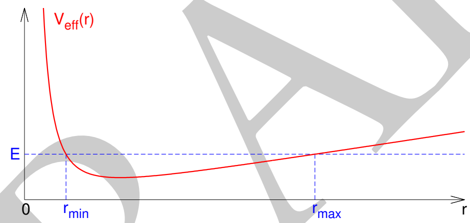
Για να απλουστευθούν οι πράξεις θέσατε $m = 1, g = 1, b = 1, c = 7$.

(α) Γράψτε την έκφραση της ταχύτητας σε σφαιρικές συντεταγμένες.

(β) Αιτιολογήστε γιατί διατηρούνται οι ποσότητες $L = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}$ και $E = \dfrac{mv^2}{2} + mgr\cos\theta$.

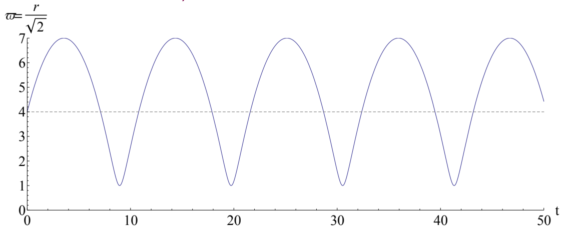
(γ) Δείξτε ότι η κίνηση ανάγεται σε «μονοδιάστατη» με ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{\dot{r}^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) = E$, όπου

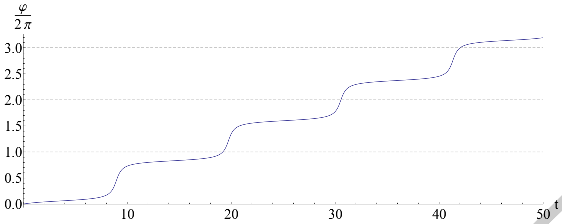
$V_{\text{eff}}(r) = \dfrac{L^2}{r^2} + \dfrac{r}{\sqrt{2}}$. Σχεδιάστε το γράφημα της $V_{\text{eff}}(r)$.
(δ) Έστω βάλουμε το σώμα από σημείο του κώνου που ισαπέχει από τις βάσεις, δηλ. από θέση με $r_0 = 4\sqrt{2}$.
(δ_1) Αν $L = 4\sqrt{2}$ και Ε = 5 δείξτε τα όρια της κίνησης στο γράφημα της $V_{\text{eff}}(r)$.
(δ_2) Ποια πρέπει να είναι η αρχική ταχύτητα $v_0 = v_{0r}\hat{r} + v_{0\phi}\hat{\phi}$ ώστε το σώμα να περάσει από όλη την επιφάνεια του κόλουρου κώνου χωρίς να φύγει έξω από αυτήν;
(Υπολογίσετε τις τιμές των L και E απαιτώντας η κίνηση να καλύπτει την περιοχή $\sqrt{2} \le r \le 7\sqrt{2}$ και κατόπιν βρείτε τις $v_{0\phi}$ και v_{0r}).
Λύση:
(α) Σε σφαιρικές συντεταγμένες, με $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, ισχύει $\boldsymbol{r} = r\hat{r}$, $\boldsymbol{v} = \dot{r}\hat{r} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi} = \dot{r}\hat{r} + \dfrac{r}{\sqrt{2}}\dot{\phi}\hat{\phi}$.
(β) Αφού δεν υπάρχει δύναμη στην $\hat{\phi}$ κατεύθυνση η $\hat{z}$ συνιστώσα της στροφορμής διατηρείται, δηλ. $m\varpi^2\dot{\phi} = L =$ σταθερά, ή ισοδύναμα, με $\varpi = r\sin\theta = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$ και $m = 1$, $\dot{\phi} = \dfrac{2L}{r^2}$.
Ισχύει επίσης η διατήρηση της ενέργειας, αφού το βάρος είναι συντηρητική δύναμη με δυναμική ενέργεια $mgz = mgr\cos\theta$ (δεν υπάρχουν τριβές και άρα το έργο της αντίδρασης σαν κάθετη στην κίνηση είναι μηδενικό), δηλ. $\dfrac{mv^2}{2} + mgr\cos\theta = E =$ σταθερά, ή ισοδύναμα $\dfrac{\dot{r}^2}{2} + \dfrac{r^2\dot{\phi}^2}{4} + \dfrac{r}{\sqrt{2}} = E$.
(γ) Αντικαθιστώντας $\dot{\phi} = \dfrac{2L}{r^2}$ προκύπτει το ολοκλήρωμα ενέργειας της «μονοδιάστατης» κίνησης $\dfrac{\dot{r}^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) = E$, όπου $V_{\text{eff}}(r) = \dfrac{L^2}{r^2} + \dfrac{r}{\sqrt{2}}$.

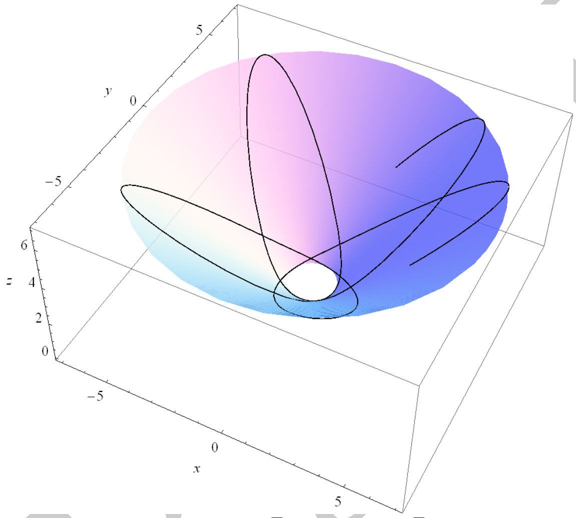


(δ_1) $V_{\text{eff}}(r) = \dfrac{32}{r^2} + \dfrac{r}{\sqrt{2}}$. Στην αρχική θέση είναι $V_{\text{eff}} = 5 = E$ και $V'_{\text{eff}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} > 0$. Άρα η αρχική θέση είναι η ακραία με το μέγιστο r. (Η άλλη ακραία θέση είναι η μικρότερη θετική λύση της $V_{\text{eff}}(r) = E$.)
Αλλιώς: Στα όρια κίνησης $V_{\text{eff}}(r) = E \Leftrightarrow \dfrac{r^3}{\sqrt{2}} - 5r^2 + 32 = 0 \Leftrightarrow (r - 4\sqrt{2})\left(\dfrac{r^2}{\sqrt{2}} - r - 4\sqrt{2}\right) = 0$. Οι θετικές λύσεις είναι $r = \dfrac{1+\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$ και $r = 4\sqrt{2}$, δηλ. η αρχική θέση είναι η ακραία με το μέγιστο r. (Η μικρότερη κυλινδρική ακτίνα είναι $\dfrac{1+\sqrt{17}}{\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} > 1$, επομένως το σώμα μένει πάντα πάνω στον κόλουρο κώνο.)
(δ_2) Πρέπει στις ακραίες ακτίνες $r = \sqrt{2}$ και $r = 7\sqrt{2}$ η ταχύτητα να είναι μόνο εφαπτομενική, δηλ. πρέπει $V_{\text{eff}}(\sqrt{2}) = V_{\text{eff}}(7\sqrt{2}) = E$.
Η ισότητα $V_{\text{eff}}(\sqrt{2}) = V_{\text{eff}}(7\sqrt{2})$ δίνει τη στροφορμή: $\dfrac{L^2}{2} + 1 = \dfrac{L^2}{98} + 7 \Leftrightarrow L = \pm\dfrac{7}{2}$.
Η ενέργεια είναι $E = V_{\text{eff}}(\sqrt{2}) = \dfrac{57}{8}$.
Στην αρχική θέση $r_0 = 4\sqrt{2}$ είναι $\dot{\phi}_0 = \dfrac{2L}{r_0^2} = \pm\dfrac{7}{32}$ και $v_{0\phi} = \dfrac{r_0}{\sqrt{2}}\dot{\phi}_0 = \pm\dfrac{7}{8}$.
$\dfrac{\dot{r}^2}{2} = E - V_{\text{eff}}(4\sqrt{2}) \Leftrightarrow v_{0r} = \dot{r} = \pm\dfrac{3\sqrt{39}}{8}$.
Άρα η αρχική ταχύτητα πρέπει να έχει αζιμουθιακή συνιστώσα $v_{0\phi} = \pm\dfrac{7}{8}$ (δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα) και ακτινική συνιστώσα $v_{0r} = \pm\dfrac{3\sqrt{39}}{8}$ (από ή προς το σημείο Ο).

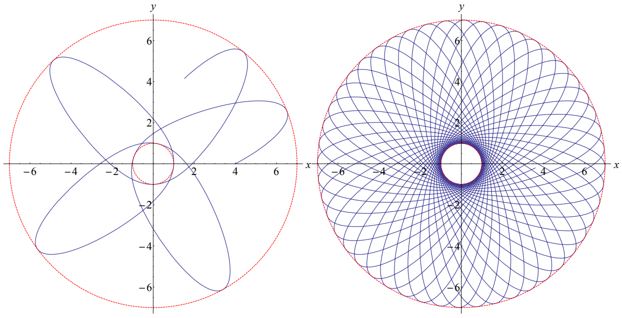
Τα παρακάτω γραφήματα δείχνουν τα αποτελέσματα της αριθμητικής ολοκλήρωσης των εξισώσεων κίνησης για $r|_{t=0} = 4\sqrt{2}$, $\phi|_{t=0} = 0$, $\dot{r}|_{t=0} = +3\sqrt{39}/8$, $\dot{\phi}|_{t=0} = +7/32$.







Η περίοδος της ακτινικής κίνησης είναι $T_r = 2\int_{\sqrt{2}}^{7\sqrt{2}} \frac{dr}{\dot{r}} = \int_{\sqrt{2}}^{7\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}\,dr}{\sqrt{E - V_{\text{eff}}(r)}} \approx 10.7923$. Στο χρόνο αυτό το διάνυσμα θέσης του σώματος έχει στραφεί κατά $\Delta\phi = 2\int_{\sqrt{2}}^{7\sqrt{2}} \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}} dr = \int_{\sqrt{2}}^{7\sqrt{2}} \frac{2\sqrt{2}L/r^2}{\sqrt{E - V_{\text{eff}}(r)}} dr \approx 0.7708 \times 2\pi$.
Το σώμα θα γυρίσει στην αρχική θέση αφού στραφεί κατά γωνία ίση με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των $\Delta\phi$ και 2π. Αυτή είναι θεωρητικά άπειρη γωνία αν ο λόγος $\frac{\Delta\phi}{2\pi}$ είναι άρρητος αριθμός, οπότε το σώμα περνά από κάθε σημείο του κώνου.
Πρακτικά όμως ο λόγος $\frac{\Delta\phi}{2\pi}$ είναι κοντά σε κάποιο ρητό αριθμό, στην περίπτωσή μας στον $\frac{\Delta\phi}{2\pi} \approx \frac{37}{48}$, οπότε μετά από 37 πλήρεις περιστροφές το σώμα γυρνά πολύ κοντά στο αρχικό σημείο. Αυτό συμβαίνει μετά από 48 περιόδους της ακτινικής κίνησης, δηλ. σε χρόνο $48T_r \approx 518$, και φαίνεται στο κάτω δεξιά σχήμα που δείχνει την προβολή της τροχιάς στο επίπεδο xy για $0 \le t \le 517.8$ (το αρχικό σημείο είναι το $x = 4$, $y = 0$, ενώ φαίνεται το σώμα να πλησιάζει στο σημείο αυτό στον τελικό χρόνο). (Το κάτω αριστερά δείχνει την προβολή της τροχιάς για $0 \le t \le 50$.)



Παράδειγμα 5.11:
Φορτισμένο σώμα κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο, η μορφή του οποίου σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι $\boldsymbol{B} = -A'(\varpi)\hat{\phi}$, όπου A κάποια συνάρτηση της κυλινδρικής ακτίνας και $A' = dA/d\varpi$ η παράγωγός της.
(α) Δείξτε ότι οι $\hat{\phi}$ και $\hat{z}$ συνιστώσες του νόμου Νεύτωνα $m\boldsymbol{a} = q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ δίνουν τα ολοκληρώματα $m\varpi^2\dot{\phi} = L =$ σταθερά, $m\dot{z} + qA(\varpi) = p_z =$ σταθερά, αντίστοιχα.
(β) Χρησιμοποιώντας τα ολοκληρώματα αυτά γράψτε την $\hat{\varpi}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα σαν $m\ddot{\varpi} = f(\varpi)$ (η κίνηση ανάγεται σε «μονοδιάστατη») και βρείτε την $V_{\text{eff}} = -\displaystyle\int f(\varpi)\,d\varpi$.
(γ) Γράψτε το ολοκλήρωμα της ενέργειας για αυτή την κίνηση. Έχει σχέση με την κινητική ενέργεια του σώματος (η οποία διατηρείται αφού η δύναμη από το μαγνητικό πεδίο δεν παράγει έργο);
(δ) Έστω το σώμα ξεκινά από το σημείο $\varpi_0\hat{x}$ με ταχύτητα $v_0\hat{x}$ με $v_0 > 0$ (οπότε αρχικά $\varpi = \varpi_0$, $\phi = 0$, $z = 0$, $\dot{\varpi} = v_0$, $\dot{\phi} = 0$, $\dot{z} = 0$) και η συνάρτηση A είναι $A = A_0\dfrac{\varpi - \varpi_0}{\varpi + \varpi_0}$, όπου A_0 σταθερά.
Με τη βοήθεια του γραφήματος της V_{eff} (βρείτε πρώτα τις σταθερές L και p_z) περιγράψτε την κίνηση για διάφορες τιμές της v_0.
Για «μικρές» τιμές της v_0 βρείτε τη θέση συναρτήσει του χρόνου.
(ε) Έστω το σώμα ξεκινά από το σημείο $\varpi_0\hat{x}$ με ταχύτητα $v_0\hat{y}$ (οπότε αρχικά $\varpi = \varpi_0$, $\phi = 0$, $z = 0$, $\dot{\varpi} = 0$, $\dot{\phi} = v_0/\varpi_0$, $\dot{z} = 0$) και η συνάρτηση A είναι $A = A_0\dfrac{\varpi - \varpi_0}{\varpi + \varpi_0}$, όπου A_0 σταθερά.
Με τη βοήθεια του γραφήματος της V_{eff} (βρείτε πρώτα τις σταθερές L και p_z) περιγράψτε την κίνηση για διάφορες τιμές της v_0.
Τι είδους κίνηση εκτελεί το σώμα για «μικρές» τιμές της $|v_0|$;
Λύση:
Σε κυλινδρικές $\boldsymbol{r} = \varpi\hat{\varpi} + z\hat{z}$, $\boldsymbol{v} = \dot{\varpi}\hat{\varpi} + \varpi\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}$, $\boldsymbol{a} = \left(\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2\right)\hat{\varpi} + \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{d}{dt}\left(\varpi^2\dot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z}$, άρα $m\left(\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2\right)\hat{\varpi} +$

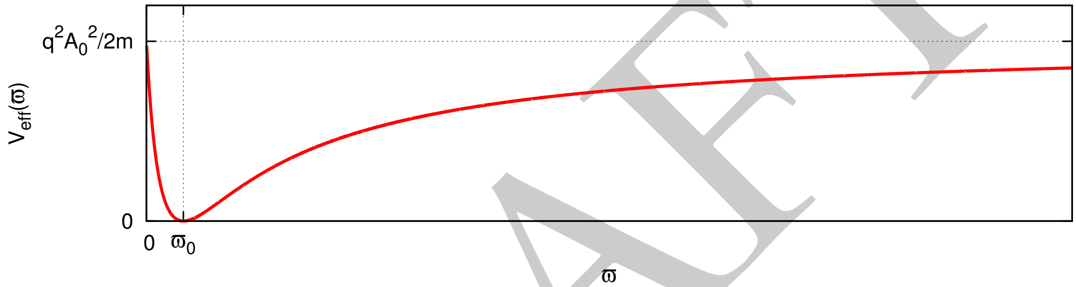
$$m\frac{1}{\varpi}\frac{d}{dt}\left(\varpi^2\dot{\phi}\right)\hat{\phi} + m\ddot{z}\hat{z} = q\begin{vmatrix} \hat{\varpi} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ \dot{\varpi} & \varpi\dot{\phi} & \dot{z} \\ 0 & -A' & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} m\left(\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2\right) = qA'\dot{z} & ① \\ \dfrac{d}{dt}\left(m\varpi^2\dot{\phi}\right) = 0 & ② \\ m\ddot{z} = -qA'\dot{\varpi} & ③ \end{cases}$$

(α) Η ② δίνει το ολοκλήρωμα της στροφορμής $m\varpi^2\dot{\phi} = L =$ σταθερά.
Η ③ ολοκληρώνεται επίσης διότι $A'\dot{\varpi} = \dfrac{dA}{d\varpi}\dfrac{d\varpi}{dt} = \dfrac{dA}{dt}$ και προκύπτει $m\dot{z} + qA = p_z =$ σταθερά.
Αυτή είναι η $\hat{z}$ συνιστώσα της «κανονικής» ορμής $m\boldsymbol{v} + q\boldsymbol{A}$ που ορίζεται σαν το άθροισμα της κινητικής ορμής $m\boldsymbol{v}$ και της «δυναμικής» ορμής $q\boldsymbol{A}$ όπου $\boldsymbol{A}$ το διανυσματικό δυναμικό του μαγνητικού πεδίου, για το οποίο ισχύει $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$. Εδώ είναι $\boldsymbol{A} = \mathrm{A}(\varpi)\hat{z}$ και $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = -A'\hat{\phi}$.
(β) Αντικαθιστώντας στην ① τις σχέσεις $\dot{\phi} = \dfrac{L}{m\varpi^2}$ και $\dot{z} = \dfrac{p_z}{m} - \dfrac{qA}{m}$ βρίσκουμε $m\ddot{\varpi} = f(\varpi)$, δηλ. «μονοδιάστατη» κίνηση με «δύναμη» $f(\varpi) = \dfrac{L^2}{m\varpi^3} - \dfrac{qA'}{m}(qA - p_z)$.
Η «δυναμική ενέργεια» είναι $V_{\text{eff}}(\varpi) = -\displaystyle\int f(\varpi)d\varpi = \dfrac{L^2}{2m\varpi^2} + \dfrac{(p_z - qA)^2}{2m} +$ σταθερά.
(γ) Το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\dfrac{m\dot{\varpi}^2}{2} + V_{\text{eff}}(\varpi) =$ σταθερά, ή $\dfrac{m\dot{\varpi}^2}{2} + \dfrac{L^2}{2m\varpi^2} + \dfrac{(p_z - qA)^2}{2m} = E$.

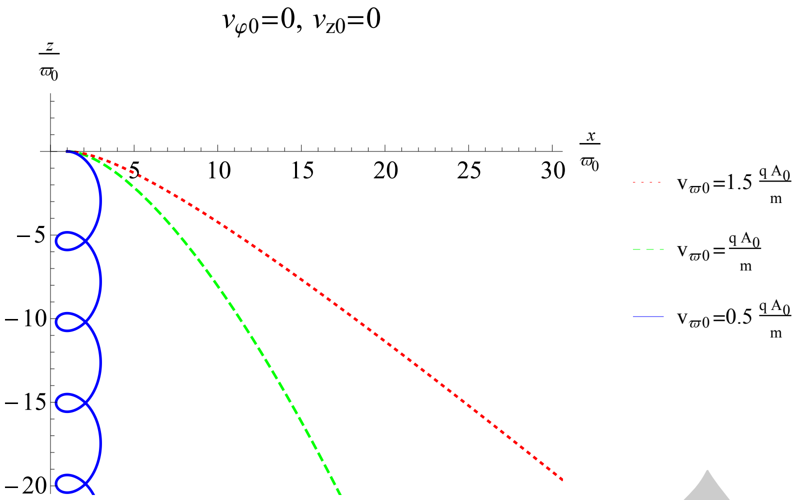
Το ολοκλήρωμα αυτό εκφράζει την πραγματική ενέργεια του φορτίου, δηλ. την κινητική του ενέργεια (το μαγνητικό πεδίο δεν παράγει έργο και γι' αυτό δεν υπάρχει αντίστοιχη δυναμική ενέργεια), αφού $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{\varpi}^2 + \varpi^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m\dot{\varpi}^2}{2} + \frac{L^2}{2m\varpi^2} + \frac{(p_z - qA)^2}{2m}$. Δηλαδή η «δυναμική ενέργεια» $V_{\text{eff}}(\varpi) = \frac{L^2}{2m\varpi^2} + \frac{(p_z - qA)^2}{2m}$ είναι το άθροισμα των επιμέρους κινητικών ενεργειών για τις κινήσεις στην $\hat{\phi}$ και $\hat{z}$ κατεύθυνση.

(δ) Για τις αρχικές συνθήκες $\varpi = \varpi_0, \phi = 0, z = 0, \dot{\varpi} = v_0, \dot{\phi} = 0, \dot{z} = 0$ προκύπτουν $L = 0, p_z = 0, E = \frac{mv_0^2}{2}$, $V_{\text{eff}}(\varpi) = \frac{q^2A_0^2}{2m}\left(\frac{\varpi - \varpi_0}{\varpi + \varpi_0}\right)^2$.

Η παράγωγος $\frac{dV_{\text{eff}}}{d\varpi} = \frac{2q^2A_0^2\varpi_0}{m}\frac{\varpi - \varpi_0}{(\varpi + \varpi_0)^3}$ είναι αρνητική για $\varpi < \varpi_0$ και θετική για $\varpi > \varpi_0$. Επομένως η $V_{\text{eff}}(\varpi)$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $0 \le \varpi < \varpi_0$ όπου μειώνεται από $V_{\text{eff}}(0) = \frac{q^2A_0^2}{2m}$ σε $V_{\text{eff}}(\varpi_0) = 0$, και αύξουσα στο διάστημα $\varpi_0 < \varpi < \infty$ όπου αυξάνεται από $V_{\text{eff}}(\varpi_0) = 0$ σε $\lim_{\varpi\to\infty} V_{\text{eff}} = \frac{q^2A_0^2}{2m}$. Το γράφημά της ακολουθεί.



• Αν $E > \frac{q^2A_0^2}{2m} \Leftrightarrow v_0 > \frac{|qA_0|}{m}$ η κυλινδρική ακτίνα ϖ αυξάνει συνεχώς μέχρι το άπειρο. Όταν το σώμα φτάσει σε $\varpi \to \infty$ θα έχει ακτινική ταχύτητα $\dot{\varpi} = \sqrt{v_0^2 - \frac{q^2A_0^2}{m^2}}$.
Η στροφορμή είναι μηδενική, οπότε η $\dot{\phi}$ είναι συνεχώς μηδενική και άρα η κίνηση γίνεται στο ημιεπίπεδο $\phi = 0$ (δηλ. στο μέρος του επιπέδου xz με θετικά $x = \varpi$).
Η κίνηση στην $\hat{z}$ κατεύθυνση καθορίζεται από την $\dot{z} = -\frac{qA_0}{m}\frac{\varpi - \varpi_0}{\varpi + \varpi_0}$ οπότε το σώμα κινείται συνεχώς προς μικρότερα z αν $qA_0 > 0$ (προς μεγαλύτερα z αν $qA_0 < 0$) και ασυμπτωτικά έχει σταθερή ταχύτητα $\dot{z} = -qA_0/m$.
• Αν $E = \frac{q^2A_0^2}{2m} \Leftrightarrow v_0 = \frac{|qA_0|}{m}$ η κίνηση είναι όμοια με πριν, με τη μόνη διαφορά ότι για $\varpi \to \infty$ η ακτινική ταχύτητα $\dot{\varpi}$ μηδενίζεται.
• Αν $0 < E < \frac{q^2A_0^2}{2m} \Leftrightarrow 0 < v_0 < \frac{|qA_0|}{m}$ τότε η ακτινική κίνηση είναι ταλάντωση μεταξύ των ακτίνων στις οποίες $E = V_{\text{eff}}(\varpi) \Leftrightarrow \frac{\varpi - \varpi_0}{\varpi + \varpi_0} = \pm\frac{mv_0}{qA_0} \Leftrightarrow \varpi = \varpi_0\frac{qA_0 \pm mv_0}{qA_0 \mp mv_0}$, δηλ. $\varpi_0\frac{|qA_0| - mv_0}{|qA_0| + mv_0} \le \varpi \le \varpi_0\frac{|qA_0| + mv_0}{|qA_0| - mv_0}$.
Όπως και πριν η κίνηση γίνεται στο ημιεπίπεδο $\phi = 0$, ενώ η κίνηση στην $\hat{z}$ κατεύθυνση καθορίζεται από την $\dot{z} = -\frac{qA_0}{m}\frac{\varpi - \varpi_0}{\varpi + \varpi_0}$ (η οποία τώρα δεν έχει σταθερό πρόσημο).
• Αν $E = 0 \Leftrightarrow v_0 = 0$ το σώμα παραμένει ακίνητο στο αρχικό σημείο.
Παρακάτω φαίνονται οι διάφορες περιπτώσεις όπως προκύπτουν από αριθμητική ολοκλήρωση.



Για «μικρές» τιμές της v_0 το σώμα μένει στη γειτονιά του ελαχίστου της δυναμικής ενέργειας και είναι $\varpi = \varpi_0 + \epsilon$ με $|\epsilon| \ll \varpi_0$. Προσεγγιστικά η δυναμική ενέργεια είναι $V_{\text{eff}} \approx \dfrac{m\omega^2\epsilon^2}{2}$ με $\omega^2 = \dfrac{q^2A_0^2}{4m^2\varpi_0^2}$, το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\dfrac{m\dot{\epsilon}^2}{2} + \dfrac{m\omega^2\epsilon^2}{2}$ = σταθερά και η παράγωγός του δίνει εξίσωση αρμονικής ταλάντωσης $\ddot{\epsilon} + \omega^2\epsilon = 0$ με γενική λύση $\epsilon = C_1\sin(\omega t) + C_2\cos(\omega t)$, οπότε $\varpi = \varpi_0 + C_1\sin(\omega t) + C_2\cos(\omega t)$, $\dot{\varpi} = \omega C_1\cos(\omega t) - \omega C_2\sin(\omega t)$. Οι αρχικές συνθήκες δίνουν $C_2 = 0$, $C_1 = \dfrac{v_0}{\omega}$, άρα $\epsilon = \dfrac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$ και η αρμονική ταλάντωση στην ακτινική κατεύθυνση περιγράφεται από $\varpi = \varpi_0 + \dfrac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$, ή $\varpi = \varpi_0 + \dfrac{2m\varpi_0 v_0}{qA_0}\sin\left(\dfrac{qA_0}{2m\varpi_0}t\right)$.

Για την κίνηση στην $\hat{z}$ κατεύθυνση ισχύει $\dot{z} \approx -\dfrac{qA_0}{2m\varpi_0}\epsilon = -\dfrac{qA_0 v_0}{2m\omega\varpi_0}\sin(\omega t)$ και ολοκληρώνοντας προκύπτει $z = -\dfrac{qA_0v_0}{2m\varpi_0\omega^2}\left[1 - \cos(\omega t)\right]$, ή $z = -\dfrac{2m\varpi_0 v_0}{qA_0}\left[1 - \cos\left(\dfrac{qA_0}{2m\varpi_0}t\right)\right]$.

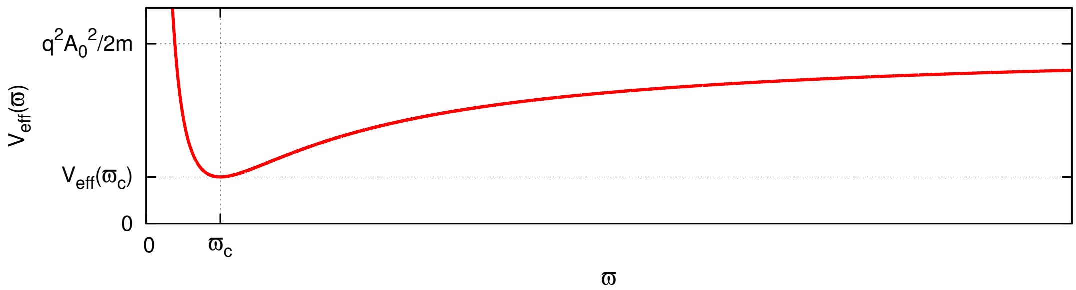
Ο συνδυασμός των κινήσεων στις ϖ και z κατευθύνσεις είναι η αναμενόμενη ομαλή κυκλική κίνηση στο xz επίπεδο γύρω από το (τοπικά ομογενές) μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B} = -A'\hat{\phi} \approx -\dfrac{A_0}{2\varpi_0}\hat{y}$, με ακτίνα $\dfrac{2m\varpi_0v_0}{|qA_0|}$ και κέντρο το σημείο $x = \varpi_0, y = 0, z = -\dfrac{2m\varpi_0v_0}{qA_0}$.

(ε) Για τις αρχικές συνθήκες $\varpi = \varpi_0, \phi = 0, z = 0, \dot{\varpi} = 0, \dot{\phi} = v_0/\varpi_0, \dot{z} = 0$ προκύπτουν $L = m\varpi_0v_0$, $p_z = 0$, $E = \dfrac{mv_0^2}{2}$, $V_{\text{eff}}(\varpi) = \dfrac{m\varpi_0^2v_0^2}{2\varpi^2} + \dfrac{q^2A_0^2}{2m}\left(\dfrac{\varpi - \varpi_0}{\varpi + \varpi_0}\right)^2$.

Η παράγωγος είναι $\dfrac{dV_{\text{eff}}}{d\varpi} = -\dfrac{m\varpi_0^2v_0^2}{\varpi^3} + \dfrac{2q^2A_0^2\varpi_0}{m}\dfrac{\varpi - \varpi_0}{(\varpi + \varpi_0)^3}$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $(\varpi+\varpi_0)^3\dfrac{dV_{\text{eff}}}{d\varpi} = -m\varpi_0^2v_0^2\left(1 + \dfrac{\varpi_0}{\varpi}\right)^3 + \dfrac{2q^2A_0^2\varpi_0}{m}(\varpi - \varpi_0)$ είναι γνησίως αύξουσα (και τα δύο μέρη της είναι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις της ακτίνας) και μεταβάλλεται από $-\infty$ στο $\varpi \to 0$ σε $+\infty$ στο $\varpi \to \infty$. Επομένως έχει ένα και μόνο ένα μηδενισμό σε κάποια ακτίνα ϖ_c, είναι αρνητική για $\varpi < \varpi_c$ και θετική για $\varpi > \varpi_c$. Συνεπώς η $V_{\text{eff}}(\varpi)$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $0 < \varpi < \varpi_c$ όπου μειώνεται από $\lim\limits_{\varpi\to 0} V_{\text{eff}} = +\infty$ σε $V_{\text{eff}}(\varpi_c)$, έχει ελάχιστο στην ακτίνα ϖ_c και είναι αύξουσα στο διάστημα $\varpi_c < \varpi < \infty$ όπου αυξάνεται από $V_{\text{eff}}(\varpi_c)$ σε $\lim\limits_{\varpi\to\infty} V_{\text{eff}} = \dfrac{q^2A_0^2}{2m}$.

Στην ακτίνα ϖ_c είναι $\dfrac{dV_{\text{eff}}}{d\varpi} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2q^2A_0^2\varpi_0}{m}\dfrac{\varpi_c - \varpi_0}{(\varpi_c + \varpi_0)^3} = \dfrac{m\varpi_0^2v_0^2}{\varpi_c^3} > 0$, άρα η ακτίνα ϖ_c είναι μεγαλύτερη της αρχικής ακτίνας ϖ_0.

Το γράφημα της δυναμικής ενέργειας ακολουθεί.



Στην αρχική ακτίνα είναι $\dot{\varpi} = 0$, επομένως είναι άκρο της ακτινικής κίνησης (ισχύει $V_{\text{eff}}(\varpi_0) = E$). Μάλιστα αφού $\varpi_0 < \varpi_c$ η ϖ_0 είναι η ελάχιστη ακτίνα.

Ανάλογα με την τιμή της ενέργειας η εξίσωση $V_{\text{eff}}(\varpi) = E$ έχει ή όχι δεύτερη λύση. Έτσι έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

• Αν $E > \dfrac{q^2A_0^2}{2m} \Leftrightarrow |v_0| > \dfrac{|qA_0|}{m}$ η κυλινδρική ακτίνα ϖ αυξάνει συνεχώς μέχρι το άπειρο. Όταν το σώμα φτάσει σε $\varpi \to \infty$ θα έχει ακτινική ταχύτητα $\dot{\varpi} = \sqrt{v_0^2 - \dfrac{q^2A_0^2}{m^2}}$.

Η κίνηση στην $\hat{\phi}$ κατεύθυνση καθορίζεται από την $\dot{\phi} = \dfrac{\varpi_0 v_0}{\varpi^2}$. Η αντίστοιχη ταχύτητα $\varpi\dot{\phi}$ είναι συνεχώς θετική και ασυμπτωτικά μηδενίζεται.

Η κίνηση στην $\hat{z}$ κατεύθυνση καθορίζεται από την $\dot{z} = -\dfrac{qA_0}{m}\dfrac{\varpi - \varpi_0}{\varpi + \varpi_0}$ οπότε το σώμα κινείται συνεχώς προς μικρότερα z αν $qA_0 > 0$ (προς μεγαλύτερα z αν $qA_0 < 0$) και ασυμπτωτικά έχει σταθερή ταχύτητα $\dot{z} = -\dfrac{qA_0}{m}$.

• Αν $E = \dfrac{q^2A_0^2}{2m} \Leftrightarrow |v_0| = \dfrac{|qA_0|}{m}$ η κίνηση είναι όμοια με πριν, με τη μόνη διαφορά ότι για $\varpi \to \infty$ η ακτινική ταχύτητα $\dot{\varpi}$ μηδενίζεται.

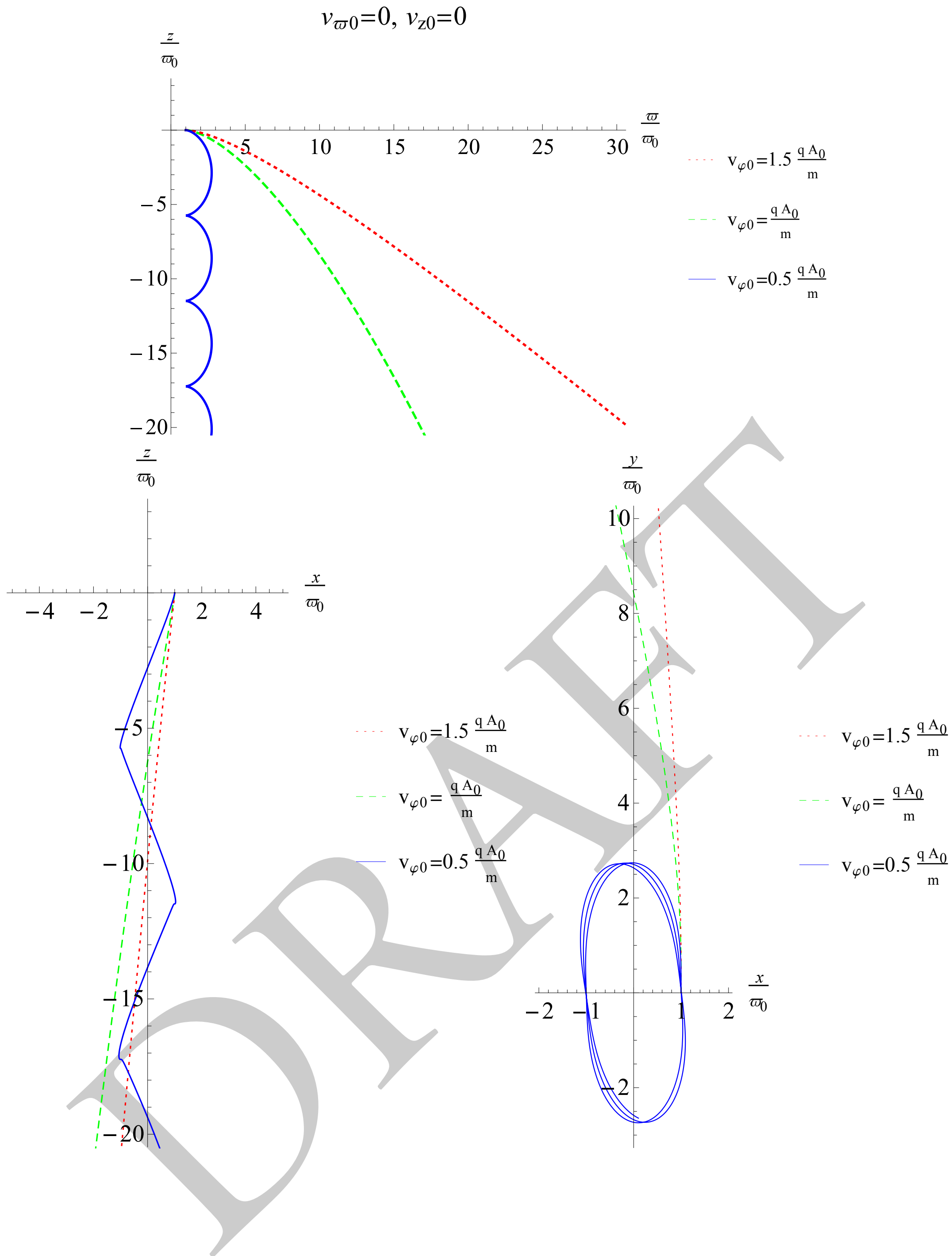
• Αν $V_{\text{eff}}(\varpi_c) < E < \dfrac{q^2A_0^2}{2m} \Leftrightarrow 0 < |v_0| < \dfrac{|qA_0|}{m}$ τότε η ακτινική κίνηση είναι ταλάντωση μεταξύ των ακτίνων στις οποίες $E = V_{\text{eff}}(\varpi)$. Η ελάχιστη λύση είναι η αρχική ακτίνα ϖ_0 και η μέγιστη είναι η άλλη λύση $\varpi_{\max}$ της $\dfrac{m\varpi_0^2 v_0^2}{2\varpi^2} + \dfrac{q^2A_0^2}{2m}\left(\dfrac{\varpi - \varpi_0}{\varpi + \varpi_0}\right)^2 = \dfrac{mv_0^2}{2} \Leftrightarrow \dfrac{q^2A_0^2}{2m}\left(\dfrac{\varpi - \varpi_0}{\varpi + \varpi_0}\right)^2 = \dfrac{mv_0^2}{2}\left(\dfrac{\varpi^2 - \varpi_0^2}{\varpi^2}\right)$, δηλ. η λύση της $\dfrac{q^2A_0^2}{m^2v_0^2}\varpi_{\max}^2(\varpi_{\max} - \varpi_0) = (\varpi_{\max} + \varpi_0)^3$.

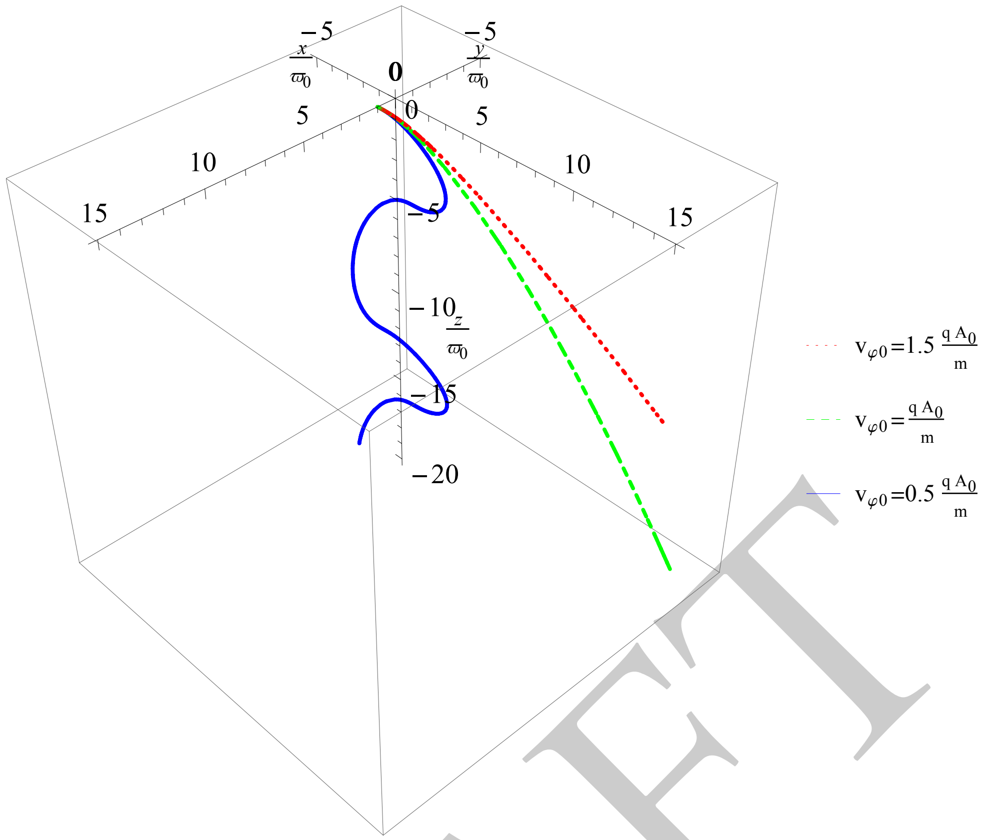
Η κίνηση στην $\hat{\phi}$ κατεύθυνση καθορίζεται από την $\dot{\phi} = \dfrac{\varpi_0 v_0}{\varpi^2}$. Η αντίστοιχη ταχύτητα $\varpi\dot{\phi}$ έχει σταθερό πρόσημο (το πρόσημο της v_0) παρότι αυξομειώνεται καθώς η ακτίνα αυξομειώνεται.

Η κίνηση στην $\hat{z}$ κατεύθυνση καθορίζεται από την $\dot{z} = -\dfrac{qA_0}{m}\dfrac{\varpi - \varpi_0}{\varpi + \varpi_0}$ οπότε το σώμα κινείται συνεχώς προς μικρότερα z αν $qA_0 > 0$ (προς μεγαλύτερα z αν $qA_0 < 0$). (Μόνο τις στιγμές που η ακτίνα γίνεται ϖ_0 η στιγμιαία ταχύτητα $\dot{z}$ μηδενίζεται.)

• Αν $E = V_{\text{eff}}(\varpi_c) \Leftrightarrow v_0 = 0$ το σώμα παραμένει ακίνητο στο αρχικό σημείο. (Σε αυτή την περίπτωση $\varpi_c = \varpi_0$ και $V_{\text{eff}}(\varpi_c) = 0$.)

Παρακάτω φαίνονται οι διάφορες περιπτώσεις όπως προκύπτουν από αριθμητική ολοκλήρωση (διάφορες προβολές των τροχιών και οι τρισδιάστατες).


$v_{\varpi 0}$=0, v_{z0}=0
$\frac{z}{\varpi_0}$
$\frac{\varpi}{\varpi_0}$
$v_{\varphi 0}=1.5\,\frac{q A_0}{m}$
$v_{\varphi 0}=\frac{q A_0}{m}$
$v_{\varphi 0}=0.5\,\frac{q A_0}{m}$
$\frac{x}{\varpi_0}$
$\frac{y}{\varpi_0}$



Για «μικρές» τιμές της $|v_0|$ το σώμα μένει στη γειτονιά του ελαχίστου της δυναμικής ενέργειας, το οποίο είναι κοντά στην αρχική θέση αφού $\left.\frac{dV_{\text{eff}}}{d\varpi}\right|_{\varpi_c} = 0 \Leftrightarrow \frac{2q^2A_0^2\varpi_0}{m}\frac{\varpi_c-\varpi_0}{(\varpi_c+\varpi_0)^3} = \frac{m\varpi_0^2v_0^2}{\varpi_c^3} \ll 1$. Θέτοντας $\varpi_c-\varpi_0 = D \ll \varpi_0$ βρίσκουμε $\frac{2q^2A_0^2\varpi_0}{m}\frac{D}{(2\varpi_0)^3} = \frac{m\varpi_0^2v_0^2}{\varpi_0^3} \Leftrightarrow D = \frac{4m^2v_0^2\varpi_0}{q^2A_0^2}$, οπότε $\varpi_c \approx \varpi_0 + \frac{4m^2v_0^2\varpi_0}{q^2A_0^2}$.
Για να περιγράψουμε τις ταλαντώσεις γύρω από το ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας, ή ισοδύναμα γύρω από την αρχική θέση, θέτουμε $\varpi = \varpi_0 + \epsilon$ με $|\epsilon| \ll \varpi_0$ και αναπτύσσουμε ως προς ϵ αλλά και ως προς v_0^2 (είναι «ίδιας τάξης»). Έτσι προσεγγιστικά η δυναμική ενέργεια είναι $V_{\text{eff}}(\varpi_0+\epsilon) = \frac{m\varpi_0^2v_0^2}{2(\varpi_0+\epsilon)^2} + \frac{q^2A_0^2}{2m}\left(\frac{\epsilon}{2\varpi_0+\epsilon}\right)^2 \approx \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_0^2}{\varpi_0}\epsilon + \frac{m\omega^2\epsilon^2}{2}$ με $\omega^2 = \frac{q^2A_0^2}{4m^2\varpi_0^2}$, το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\frac{m\dot{\epsilon}^2}{2} - \frac{mv_0^2}{\varpi_0}\epsilon + \frac{m\omega^2\epsilon^2}{2} =$ σταθερά και η παράγωγός του δίνει εξίσωση αρμονικής ταλάντωσης $\ddot{\epsilon}+\omega^2\epsilon = \frac{v_0^2}{\varpi_0}$ με γενική λύση $\epsilon = \frac{v_0^2}{\omega^2\varpi_0} + C_1\sin(\omega t) + C_2\cos(\omega t)$, οπότε $\varpi = \varpi_0 + \frac{v_0^2}{\omega^2\varpi_0} + C_1\sin(\omega t) + C_2\cos(\omega t)$, $\dot{\varpi} = \omega C_1\cos(\omega t) - \omega C_2\sin(\omega t)$. Οι αρχικές συνθήκες δίνουν $C_2 = -\frac{v_0^2}{\omega^2\varpi_0}$, $C_1 = 0$, άρα $\epsilon = \frac{v_0^2}{\omega^2\varpi_0}\,[1-\cos(\omega t)]$ και η αρμονική ταλάντωση στην ακτινική κατεύθυνση περιγράφεται από $\varpi = \varpi_0 + \frac{v_0^2}{\omega^2\varpi_0}\,[1-\cos(\omega t)]$, ή $\varpi = \varpi_0 + \frac{4m^2v_0^2\varpi_0}{q^2A_0^2} - \frac{4m^2v_0^2\varpi_0}{q^2A_0^2}\cos\left(\frac{qA_0}{2m\varpi_0}t\right)$.
Μπορούμε να γράψουμε το αποτέλεσμα και σαν $\varpi = \varpi_c - D\cos\left(\frac{qA_0}{2m\varpi_0}t\right)$, σχέση που δείχνει ότι η θέση ισορροπίας είναι η $\varpi_c = \varpi_0 + \frac{4m^2v_0^2\varpi_0}{q^2A_0^2}$ και το πλάτος της ταλάντωσης είναι $D = \varpi_c - \varpi_0$.
Θα μπορούσαμε ισοδύναμα να αναπτύξουμε τη δυναμική ενέργεια γύρω από το σημείο του ελαχίστου, με $\varpi = \varpi_c + \epsilon_c$. Έτσι στο ανάπτυγμα $V_{\text{eff}}(\varpi_c+\epsilon_c) \approx \left.V_{\text{eff}}\right|_{\varpi_c} + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2V_{\text{eff}}}{d\varpi^2}\right|_{\varpi_c}\epsilon_c^2$ απουσιάζει ο γραμμικός όρος, η εξίσωση κίνησης που προκύπτει από παραγώγιση του ολοκληρώματος ενέργειας είναι ομογενής $\ddot{\epsilon}_c + \omega^2\epsilon_c = 0$

και η λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες προκύπτει $\epsilon_c = -D\cos(\omega t)$.
Η κίνηση στην $\hat{\phi}$ κατεύθυνση καθορίζεται από την $\dot{\phi} = \dfrac{\varpi_0 v_0}{\varpi^2} \approx \dfrac{v_0}{\varpi_0}$ οπότε η κυρίαρχη μεταβολή είναι γραμμική αύξηση με το χρόνο $\phi \approx \dfrac{v_0 t}{\varpi_0}$.
Για την κίνηση στην $\hat{z}$ κατεύθυνση ισχύει $\dot{z} \approx -\dfrac{qA_0}{2m\varpi_0}\epsilon = -\dfrac{2mv_0^2}{qA_0}[1-\cos(\omega t)]$ και ολοκληρώνοντας προκύπτει $z = -\dfrac{v_0^2}{\omega^2\varpi_0}[\omega t - \sin(\omega t)]$.
Η κίνηση στο επίπεδο ϖz είναι κυκλοειδής.

Παράδειγμα 5.12:

Έστω σώμα μάζας $m = 1$ κινείται στο πεδίο δύναμης $\boldsymbol{F} = \dfrac{2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}}{r^3}$.
Αυτή είναι η έκφραση του πεδίου ηλεκτρικού δίπολου που αναφέρθηκε στο παράδειγμα 5.4 σε σφαιρικές συντεταγμένες.
(α) Δείξτε ότι υπάρχουν ολοκληρώματα ενέργειας και στροφορμής

$$\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) + \frac{\cos\theta}{r^2} = E\,, \qquad r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi} = L\,.$$

(β) Ένα τρίτο ολοκλήρωμα που προκύπτει από την $\hat{\theta}$ συνιστώσα της εξίσωσης ορμής είναι το

$$\left(r^2\dot{\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{\sin^2\theta} + 2\cos\theta = \beta\,.$$

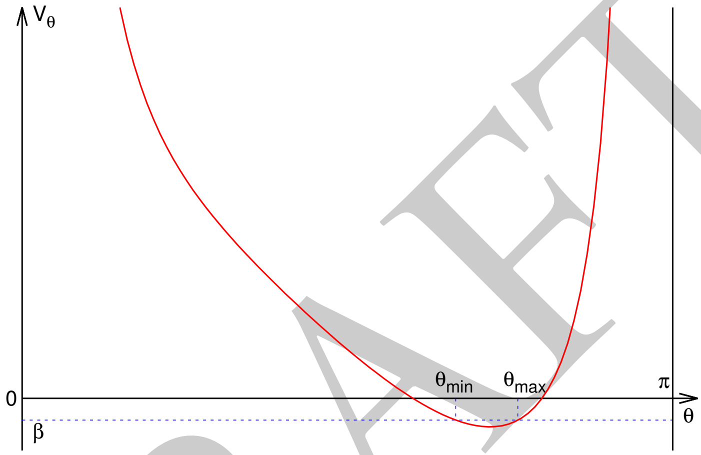
Χρησιμοποιώντας τα ολοκληρώματα δείξτε ότι η κίνηση του σώματος ανάγεται σε δυο «μονοδιάστατα» προβλήματα

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + V_r(r) = E \text{ με } V_r(r) = \frac{\beta}{2r^2} \quad \text{και} \quad r^4\dot{\theta}^2 + V_\theta(\theta) = \beta \text{ με } V_\theta(\theta) = \frac{L^2}{\sin^2\theta} + 2\cos\theta,$$

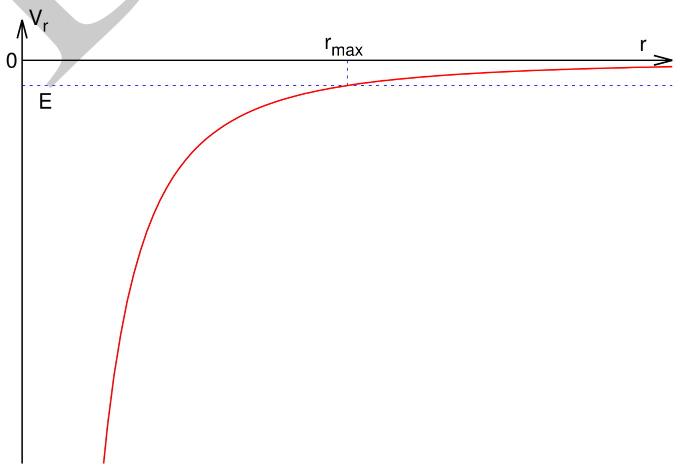
τα οποία μας επιτρέπουν να βρούμε τα όρια των r και θ για διάφορες τιμές των E, β και L, από τις γραφικές παραστάσεις των $V_r(r)$ και $V_\theta(\theta)$.
(γ) Έστω αρχικά το σώμα βρίσκεται στη θέση $\boldsymbol{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} - \dfrac{1}{2}\hat{z}$ (οπότε $r = 1$, $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$, $\phi = 0$) και έχει ταχύτητα $\boldsymbol{v} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\hat{\phi}$ (οπότε $\dot{r} = 0$, $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\phi} = 1$). Βρείτε τα όρια των r και θ και περιγράψτε την κίνηση του σώματος. Σε πόσο χρόνο θα φτάσει το σώμα στην αρχή των αξόνων;
Λύση:
(α) Για να υπάρχει ολοκλήρωμα ενέργειας πρέπει η $\boldsymbol{F}$ να είναι συντηρητική. Πρέπει δηλ. να υπάρχει V τέτοια ώστε $\boldsymbol{F} = -\vec{\nabla}V \Leftrightarrow \dfrac{2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}}{r^3} = -\dfrac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial\theta}\hat{\theta} - \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial\phi}\hat{\phi}$, άρα πρέπει να ισχύουν $\dfrac{\partial V}{\partial r} = -\dfrac{2\cos\theta}{r^3}$, $\dfrac{\partial V}{\partial\theta} = -\dfrac{\sin\theta}{r^2}$ και $\dfrac{\partial V}{\partial\phi} = 0$. Η τρίτη σημαίνει ότι $V = V(r,\theta)$. Ολοκληρώνοντας την πρώτη έχουμε $V = \dfrac{\cos\theta}{r^2} + f(\theta)$. Αντικαθιστώντας στην δεύτερη εξίσωση προκύπτει ότι $df/d\theta = 0$, επομένως η f είναι αυθαίρετη προσθετική σταθερά. Οπότε η δύναμη είναι πράγματι συντηρητική με την δυναμική ενέργεια (αγνοώντας την προσθετική σταθερά κάτι που δεν βλάπτει την γενικότητα) $V = \dfrac{\cos\theta}{r^2}$.
Η ταχύτητα είναι $\boldsymbol{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}$ οπότε το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\dfrac{1}{2}mv^2 + V = E$, ή $\dfrac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) + \dfrac{\cos\theta}{r^2} = E$.
Αφού δεν υπάρχει δύναμη στην $\hat{\phi}$ κατεύθυνση η $\hat{z}$ συνιστώσα της στροφορμής $\hat{z}\cdot(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}) = (\hat{z}\times\boldsymbol{r})\cdot m\boldsymbol{v} = r\sin\theta\hat{\phi}\cdot m\boldsymbol{v} = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\phi} = L$ διατηρείται. (Είναι $\dot{L} = \hat{z}\cdot\dot{\boldsymbol{L}} = \hat{z}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}) = (\hat{z}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{F} = r\sin\theta\hat{\phi}\cdot\boldsymbol{F} = 0$.)
Ισοδύναμα, η $\hat{\phi}$ συνιστώσα της επιτάχυνσης σε σφαιρικές συντεταγμένες γράφεται $a_\phi = \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}\right)$, οπότε ο μηδενισμός της από το νόμο Νεύτωνα αν $F_\phi = 0$ δίνει κατευθείαν $r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi} = \text{σταθερά} = L/m$.

(β) Η έκφραση του ολοκληρώματος β γράφεται $r^4\dot{\theta}^2 + V_\theta(\theta) = \beta$ με $V_\theta(\theta) = \dfrac{L^2}{\sin^2\theta} + 2\cos\theta$.
Απαλείφοντας τα $\dot{\theta}$ και $\dot{\phi}$ στο ολοκλήρωμα ενέργειας, μέσω των $\dot{\phi} = \dfrac{L}{mr^2\sin^2\theta}$ και $\dot{\theta}^2 = \dfrac{\beta - V_\theta(\theta)}{r^4}$ καταλήγουμε στην $\dfrac{\dot{r}^2}{2} + V_r(r) = E$ με $V_r(r) = \dfrac{\beta}{2r^2}$.

(γ) Από τις αρχικές συνθήκες, με $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$, είναι $L = \dfrac{3}{4}$, $\beta = -\dfrac{1}{4}$, $E = -\dfrac{1}{8}$.
Τα όρια του θ θα βρεθούν από την $V_\theta(\theta) \le \beta$, όπου $V_\theta(\theta) = \dfrac{9}{16\sin^2\theta} + 2\cos\theta$ και $\beta = -\dfrac{1}{4}$.
Είναι $V'_\theta = -\dfrac{9\cos\theta}{8\sin^3\theta} - 2\sin\theta > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{9}{16}\cos\theta > \sin^4\theta$. Σχεδιάζοντας τα δύο μέλη στο διάστημα $(0,\pi)$ συμπεραίνουμε ότι $V'_\theta > 0$ για $\theta > \theta_c$, όπου $\theta_c \in (\pi/2, \pi)$ η ρίζα της $-\dfrac{9}{16}\cos\theta_c = \sin^4\theta_c$. Άρα η V_θ απειρίζεται στα $\theta = 0^+$ και π^- και έχει ένα ελάχιστο στο θ_c.



Οι λύσεις της $V_\theta = \beta$ είναι $\theta_{\min} = 2\pi/3 = 2.094$ και $\theta_{\max} = \arccos\dfrac{3-\sqrt{217}}{16} = 2.394$ rad.
Μπορούν να βρεθούν είτε αριθμητικά, είτε αναλυτικά παραγοντοποιώντας το $\dfrac{9}{16\sin^2\theta} + 2\cos\theta + \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{\sin^2\theta}(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - \dfrac{3-\sqrt{217}}{16})(\cos\theta - \dfrac{3+\sqrt{217}}{16})$.
Με την πάροδο του χρόνου το σώμα μπορεί να κινείται μεταξύ αυτών των δύο κώνων.
Τα όρια του r θα βρεθούν από την $V_r(r) \le E$, όπου $V_r(r) = -\dfrac{1}{8r^2}$ και $E = -\dfrac{1}{8}$.

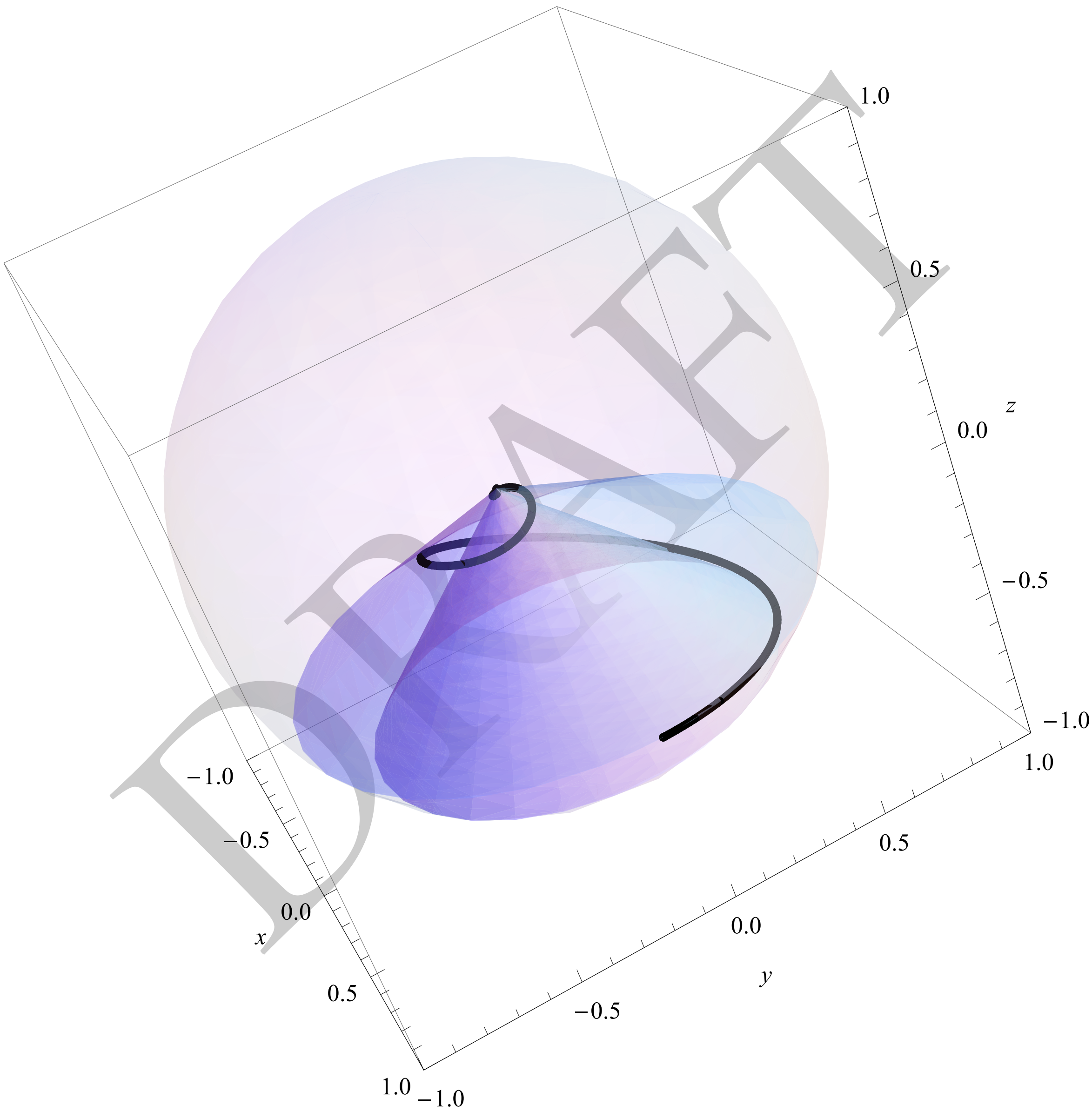


Προκύπτει ότι το σώμα κινείται συνεχώς προς το κέντρο με ταχύτητα στην ακτινική κατεύθυνση (αρνητική)

$\dot{r} = -\sqrt{2(E - V_r)}$. Καταλήγει στο κέντρο μετά από χρόνο $t_c = \int_1^0 \frac{dr}{\dot{r}} = \int_0^1 \frac{2rdr}{\sqrt{1-r^2}} = \left[-2\sqrt{1-r^2}\right]_0^1 = 2$.

Όμοια μπορούμε να βρούμε την ακτίνα σε κάθε χρόνο, $t = \int_1^r \frac{dr}{\dot{r}} = \int_r^1 \frac{2rdr}{\sqrt{1-r^2}} = \left[-2\sqrt{1-r^2}\right]_r^1 = 2\sqrt{1-r^2} \Leftrightarrow r = \sqrt{1-t^2/4}$, ενώ $\theta(t)$ και $\phi(t)$ είναι λύσεις των $(4-t^2)^2\dot{\theta}^2 = -\frac{9}{\sin^2\theta} - 32\cos\theta - 4$ kai $\dot{\phi} = \frac{3}{(4-t^2)\sin^2\theta}$.

Με την πάροδο του χρόνου η απόσταση του σώματος από το κέντρο διαρκώς μειώνεται. Η κίνηση γίνεται μεταξύ των δύο κώνων $\theta = \theta_{\min}$ και $\theta = \theta_{\max}$, ενώ ταυτόχρονα το σώμα περιστρέφεται γύρω από τον άξονα z.



5.5 Ασκήσεις

Ασκήσεις με λύση

5.5.1 Σώμα μάζας $m = 1$ κινείται μονοδιάστατα σε πεδίο δύναμης $V = \dfrac{3x^2 - 1}{\left(x^2 + 1\right)^{5/2}}$.

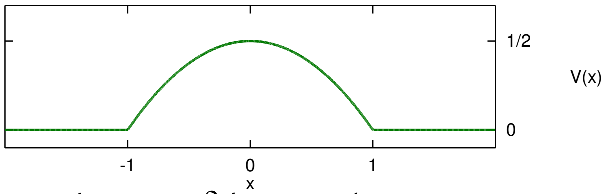
(α) Σχεδιάστε το γράφημα της δυναμικής ενέργειας.
(β) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας, ευσταθή και ασταθή.
(γ) Ποια είναι η περίοδος μικρών ταλαντώσεων γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας;
(δ) Αν το σώμα αρχικά βρίσκεται στο $x = 0$ και κινείται με αρχική ταχύτητα $v_0 > 0$ περιγράψτε την κίνησή του.
(ε) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης.

5.5.2 Σώμα μάζας $m = 1$ κινείται μονοδιάστατα σε πεδίο $V(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.
Αρχικά (για $t = 0$) ξεκινά από το σημείο $x_0 = -2$ και έχει ταχύτητα $v_0 \geq 0$.
Σχεδιάστε το γράφημα της $V(x)$ και μέσω αυτού βρείτε την v_0 σε κάθε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις.
(α) Το σώμα καταλήγει με μηδενική ταχύτητα στο $x = -\infty$.
(β) Το σώμα περνάει μόνο μια φορά το σημείο $x = -1$ και δεν φτάνει ποτέ στο $x = 2$.
(γ) Το σώμα καταλήγει με ταχύτητα $v_\infty = 2$ στο $x = +\infty$.
(δ) Το σώμα εκτελεί ταλάντωση με ελάχιστη τιμή της θέσης $x_{\min} = x_0$. Ποια είναι σε αυτή την περίπτωση η μέγιστη τιμή της θέσης $x_{\max}$ και η περίοδος της ταλάντωσης; (Γράψτε την περίοδο συναρτήσει κάποιου ορισμένου ολοκληρώματος, χωρίς να υπολογίσετε την αριθμητική της τιμή.)
(ε) Σχεδιάστε τις διάφορες καμπύλες στο διάγραμμα φάσης και δείξτε σε αυτό τις τροχιές που αντιστοιχούν στα προηγούμενα ερωτήματα.
(στ) Υπάρχουν σημεία ισορροπίας; Στα τυχόν ευσταθή βρείτε την περίοδο μικρών ταλαντώσεων.

5.5.3 Σώμα μάζας $m = 1$ κινείται μονοδιάστατα στο δυναμικό $V(x) = \dfrac{1}{2}\tan^2 x$ (σε κατάλληλες μονάδες).
(α) Σχεδιάστε το δυναμικό στην περιοχή $|x| < \pi/2$ και περιγράψτε την κίνηση που αντιστοιχεί σε ενέργεια E.
(β) Βρείτε την περίοδο της κίνησης σαν συνάρτηση της ενέργειας E.
(γ) Σχολιάστε το αποτέλεσμα για μικρές και μεγάλες ενέργειες, όπου το δυναμικό προσεγγίζεται σαν αρμονικό και απειρόβαθο πηγάδι, αντίστοιχα.
(δ) Βρείτε την σχέση μεταξύ θέσης και χρόνου αν για $t = 0$ είναι $x = 0$ και $\dot{x} = v_0$.
(ε) Έστω το σώμα είναι αρχικά ($t = 0$) ακίνητο στην αρχή του άξονα και ασκείται η δύναμη $0.01\cos(t\sqrt{2})$, επιπλέον της δύναμης από το δυναμικό. Βρείτε την θέση σε κάθε χρόνο, υποθέτοντας ότι ισχύει συνεχώς $|x| \ll 1$. Επαληθεύεται από την λύση η υπόθεση αυτή;
Θα φτάσει το σώμα ακριβώς στο σημείο $x = 0.02$;
Δίνεται $\displaystyle\int_0^x \frac{\sqrt{2E+1}\,dx}{\sqrt{2E - \tan^2 x}} = \arcsin\left(\sqrt{\frac{2E+1}{2E}}\sin x\right)$ για $|x| \leq \dfrac{\pi}{2}$. Επίσης $|\sin x| = \sqrt{\dfrac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}}$.

5.5.4 Σώμα μάζας $m = 1$ έχει ταχύτητα v_0 στο $x = -\infty$ και πλησιάζει το φράγμα δυναμικού του σχήματος, το οποίο έχει παραβολικό σχήμα

$$V(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x^2}{2} & \text{αν } |x| \leq 1\,, \\ 0 & \text{αν } |x| \geq 1\,. \end{cases}$$



(α) Περιγράψτε την κίνηση του σώματος για διάφορες τιμές της v_0.
(β) Αν το σώμα φτάνει στο $x = +\infty$, βρείτε την χρονική καθυστέρηση της κίνησης σε σχέση με την ελεύθερη κίνηση χωρίς δύναμη.
(γ) Σχολιάστε το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος στο όριο μεγάλων και μικρών (δηλ. οριακά μεγαλύτερων της ταχύτητας που απαιτείται για να ξεπεραστεί το φράγμα) ταχυτήτων.
(δ) Σχεδιάστε προσεκτικά το φασικό διάγραμμα για τις κινήσεις στο παραπάνω δυναμικό.
Δίνεται $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}} = \ln\left|\sqrt{x^2+c}+x\right| +$ σταθερά.

5.5.5 Σώμα μάζας $m = 1$ κινείται στην ημιευθεία Ox υπό την επίδραση πεδίου δυνάμεων $F(x)$. Αν το αφήνουμε από διάφορες θέσεις x_0 του ημιάξονα βλέπουμε ότι η θέση του σαν συνάρτηση του χρόνου είναι

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{1-x_0^4}{x_0^2}\sin^2 t}.$$

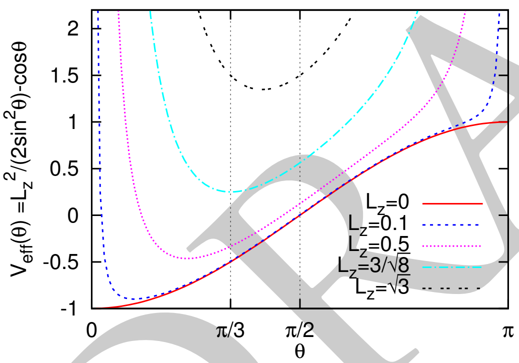
(α) Δείξτε ότι η κινητική του ενέργεια σαν συνάρτηση της θέσης είναι $T = \dfrac{x_0^2}{2} + \dfrac{1}{2x_0^2} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2x^2}$.
(β) Βρείτε δυναμική ενέργεια $V(x)$ για το πεδίο δυνάμεων και τη δύναμη $F(x)$.
(γ) Σχεδιάστε τη συνάρτηση $V(x)$ (για $x > 0$) καθώς και το διάγραμμα φάσης (τις τροχιές σε άξονες $x - \dot{x}$ για διάφορες ενέργειες).
(δ) Έστω αφήνουμε δύο ίδια, ελαστικά σωματίδια μοναδιαίας μάζας στο παραπάνω πεδίο δυνάμεων, το ένα στη θέση $c < 1$ και το άλλο στη θέση $1/c$.
Πότε και που θα συγκρουστούν για πρώτη φορά; Περιγράψτε την κίνηση των σωματιδίων μετά την πρώτη κρούση. Πότε θα βρεθούν στις θέσεις που τα αφήσαμε και τι ταχύτητα θα έχουν εκεί; Σχεδιάστε τις καμπύλες φάσης για τα δύο σωματίδια.

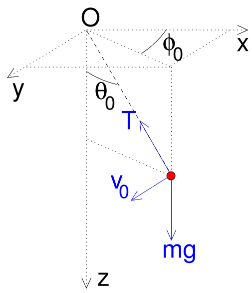
5.5.6 Έστω ιδανικό εκκρεμές με σώμα μάζας $m = 1$ και νήμα μήκους $R = 1$, μέσα σε βαρύτητα $g = 1$ (όλα σε κατάλληλες μονάδες). Στο σώμα ασκείται το βάρος, η τάση του νήματος και αντίσταση αντίρροπη της ταχύτητας με μέτρο $\frac{1}{2}v^2\left|\tan\phi\right|$, όπου v η ταχύτητα και ϕ η γωνία μεταξύ νήματος και κατακόρυφου. Το σώμα ξεκινά από το κατώτερο σημείο με οριζόντια ταχύτητα v_0.
(α) Ποια η διαφορική εξίσωση που δίνει την $v^2 = f(\phi)$ όσο το σώμα ανεβαίνει;
(β) Επιλύστε την εξίσωση αυτή για να βρείτε την ταχύτητα σε κάθε θέση όσο το σώμα ανεβαίνει. Σε ποια θέση σταματά στιγμιαία για πρώτη φορά; Πόση μηχανική ενέργεια έχει χαθεί μέχρι εκείνη την στιγμή;
(γ) Ποιο ορισμένο ολοκλήρωμα δίνει τον χρόνο ανόδου μέχρι το σώμα να σταματήσει στιγμιαία για πρώτη φορά; (Δεν χρειάζεται να το υπολογίσετε.)
(δ) Επαναλάβατε για την κάθοδο, δηλ. βρείτε την ταχύτητα σε κάθε θέση μέχρι το σώμα να φτάσει στην κατώτερη θέση, την ταχύτητα στην θέση αυτή και το ορισμένο ολοκλήρωμα που δίνει τον χρόνο καθόδου.
(ε) Σχεδιάστε ποιοτικά το διάγραμμα φάσης για την κίνηση του εκκρεμούς.
Δίνεται ότι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\dfrac{df}{d\phi} + f\tan\phi = -2\sin\phi$ είναι $f = \cos\phi\,\ln(D\cos^2\phi)$ και της $\dfrac{df}{d\phi} - f\tan\phi = -2\sin\phi$ είναι $f = \dfrac{C+\cos^2\phi}{\cos\phi}$.

5.5.7 Δαχτυλίδι μάζας $m = 1$ μπορεί να κινείται χωρίς τριβές περασμένο σε σταθερή, οριζόντια, κυκλική στεφάνη ακτίνας $R = 1$.

Το δαχτυλίδι είναι δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου μηδενικού φυσικού μήκους και σταθεράς $k = 1$, το άλλο άκρο του οποίου Α είναι σταθερό.
Έστω Oxy το επίπεδο της στεφάνης (Ο το κέντρο της) και το σημείο Α έχει θέση $\boldsymbol{r}_A = x_A\hat{x}+y_A\hat{y}+z_A\hat{z}$.
(α) Δείξτε ότι η επίδραση του ελατηρίου στην κίνηση του δαχτυλιδιού είναι ισοδύναμη με την επίδραση σταθερής δύναμης $k\left(x_A\hat{x} + y_A\hat{y}\right)$. Ποια η δυναμική ενέργεια που αντιστοιχεί σε αυτό το πεδίο;
(β) Αν το σημείο Α έχει $x_A = 3$, $y_A = 4$ και το δαχτυλίδι βρίσκεται αρχικά στην θέση $\phi = 0$, ποια πρέπει να είναι η αρχική ταχύτητά του ώστε να εκτελεί πλήρεις στροφές;
Υπόδειξη: Η παράσταση $x_A \cos\phi + y_A \sin\phi$ μπορεί να γραφεί σαν $\varpi_A \cos(\phi - \phi_A)$, χρησιμοποιώντας τις κυλινδρικές συντεταγμένες του Α, (ϖ_A, ϕ_A, z_A).
(γ) Ποια είναι η θέση ισορροπίας του δαχτυλιδιού;
(δ) Αν αρχικά $\phi = 0$ και $v = 0$, μεταξύ ποιων γωνιών κινείται το δαχτυλίδι;

5.5.8 Σημειακό σώμα μάζας m είναι δεμένο σε αβαρές και μη εκτατό νήμα ακτίνας R και κινείται κάτω από την επίδραση του βάρους του $mg\hat{z}$ και της τάσης από το νήμα $\boldsymbol{T} = -\mathrm{T}\hat{r}$ (σφαιρικό εκκρεμές).
(α) Δείξτε ότι διατηρείται η $\hat{z}$ συνιστώσα της στροφορμής $L_z = (\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}) \cdot \hat{z}$. Βρείτε την έκφρασή της σε σφαιρικές συντεταγμένες.
(β) Γράψτε σε σφαιρικές συντεταγμένες την κινητική, τη δυναμική και την ολική ενέργεια E.
(γ) Δείξτε ότι η διατήρηση της στροφορμής L_z και της ενέργειας E ανάγουν το πρόβλημα σε «μονοδιάστατο» στο οποίο ισχύει $\dfrac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} + V_{\text{eff}}(\theta) = E$ με $V_{\text{eff}}(\theta) = \dfrac{L_z^2}{2mR^2\sin^2\theta} - mgR\cos\theta$. Κάτω αριστερά φαίνεται το γράφημα της $V_{\text{eff}}(\theta)$ για διάφορα L_z (με το V_{eff} σε μονάδες mgR και το L_z σε μονάδες $\sqrt{m^2gR^3}$).





(δ) Έστω αρχικά το σώμα βρίσκεται στη θέση $\theta_0 = \pi/3$ και έχει οριζόντια ταχύτητα $\boldsymbol{v} = v_0\hat{\phi}$.
(δ_1) Για δεδομένο v_0 ποια η στροφορμή L_z, ποια η συνάρτηση $V_{\text{eff}}(\theta)$ και ποια η ενέργεια E;
(δ_2) Για ποιες τιμές της v_0 το σώμα περνά πάνω από το επίπεδο xy;
(δ_3) Διερευνήστε αν και πότε χαλαρώνει το νήμα. (Αν δεν θυμάστε την έκφραση του a_r στις σφαιρικές συντεταγμένες, μπορείτε να την βρείτε παραγωγίζοντας δύο φορές τη σχέση $\boldsymbol{r}^2 = R^2$.)
(δ_4) Για ποια v_0 το σώμα εκτελεί οριζόντια κυκλική τροχιά $\theta =$ σταθερό $= \pi/3$ (κωνικό εκκρεμές);
(δ_5) Αν διαταράξουμε την κυκλική αυτή τροχιά δίνοντας μια στιγμιαία μικρή ώθηση στην $\hat{\theta}$ κατεύθυνση ποια η περίοδος των μικρών ταλαντώσεων; Ποια η σχέση της με την περίοδο της αρχικής κυκλικής κίνησης;

5.5.9 Φορτίο q μάζας m κινείται στο επίπεδο Oxy μέσα σε μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B} = B_0e^{y/y_0}\hat{z}$. Αρχικά βρίσκεται στην αρχή των αξόνων $\boldsymbol{r}_0 = 0$ και έχει ταχύτητα $\boldsymbol{v}_0 = v_0\hat{y}$ με $0 < v_0 < 1$. Μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλα μονάδες και να θέσουμε $y_0 = 1$, $m = 1$ και $qB_0 = 1$, οπότε ο νόμος Νεύτωνα γράφεται $\boldsymbol{a} = e^y\boldsymbol{v} \times \hat{z}$.
(α) Δείξτε ότι η $\hat{x}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα ολοκληρώνεται και δίνει $v_x = v_x(y)$ (συγκεκριμένη συνάρτηση την οποία πρέπει να βρείτε).
(β) Δείξτε ότι το πρόβλημα ανάγεται σε μονοδιάστατο $\ddot{y} = f(y)$. Βρείτε το αντίστοιχο δυναμικό $V(y)$ και γράψτε το ολοκλήρωμα ενέργειας. Ποια η φυσική του σημασία;
(γ) Με την βοήθεια του γραφήματος του δυναμικού βρείτε τα όρια της κίνησης στην y κατεύθυνση.

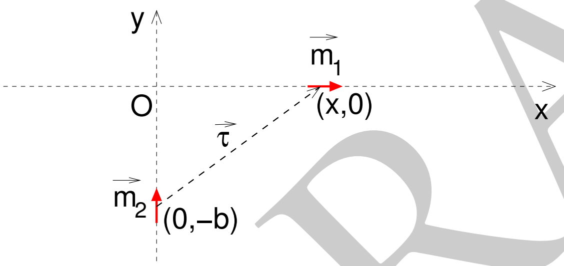
(δ) Βρείτε την θέση του φορτίου σε κάθε χρόνο.
Δίνονται τα ολοκληρώματα $\int \frac{dy}{\sqrt{a+be^{y}+ce^{2y}}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ae^{-y}+b}{\sqrt{b^2-4ac}} +$ σταθερά για $a<0, b^2 > 4ac$ και $\int \frac{d\xi}{1-\sin\lambda\,\sin\xi} = \frac{2}{\cos\lambda} \arctan \frac{\tan(\xi/2)-\sin\lambda}{\cos\lambda} +$ σταθερά.

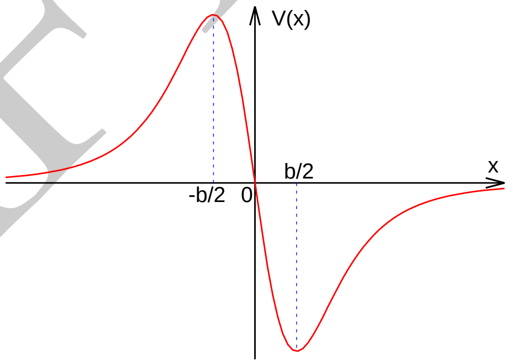
Άλυτες ασκήσεις

5.5.1 Ένα μαγνητικό δίπολο μάζας m μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε οριζόντιο σύρμα, με την μαγνητική του ροπή πάντα παράλληλη στο σύρμα. Έστω το σύρμα είναι ο άξονας $x'Ox$, το δίπολο βρίσκεται στη θέση $\boldsymbol{r}_1 = x\hat{x}$ και η ροπή του είναι $\boldsymbol{m}_1 = m_1\hat{x}$. Το δίπολο βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ένα άλλο μαγνητικό δίπολο ροπής $\boldsymbol{m}_2 = m_2\hat{y}$ το οποίο κρατείται σταθερό στο σημείο $\boldsymbol{r}_2 = -b\hat{y}$, όπου $y'Oy$ ο κατακόρυφος άξονας και $b>0$.
(α) Η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης δύο μαγνητικών διπόλων είναι

$$V = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{|\boldsymbol{\tau}|^2\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{m}_2 - 3(\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{\tau})(\boldsymbol{m}_2\cdot\boldsymbol{\tau})}{|\boldsymbol{\tau}|^5}\,,\ \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2\,.$$

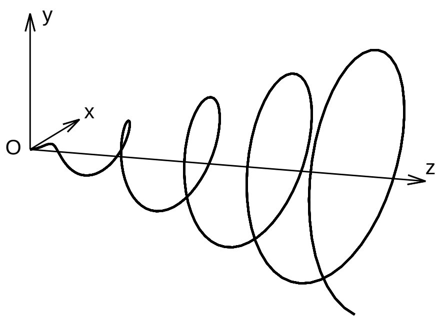
Δείξτε ότι για τα συγκεκριμένα δίπολα του προβλήματος η ολική ενέργεια είναι $\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) = E$, όπου η δυναμική ενέργεια είναι $V(x) = -\frac{3\mu_0 m_1 m_2 b}{4\pi}\frac{x}{(x^2+b^2)^{5/2}}$ και το γράφημά της το ακόλουθο:





(β) Ποια είναι τα σημεία ισορροπίας του δίπολου $\boldsymbol{m}_1$; Υπάρχει ευσταθές σημείο ισορροπίας; Αν ναι ποια είναι η περίοδος μικρών ταλαντώσεων γύρω από το σημείο αυτό;
(γ) Έστω αρχικά το δίπολο $\boldsymbol{m}_1$ βρίσκεται στο $x=0$ και έχει ταχύτητα $\dot{x}_0 < 0$. Διερευνήστε που θα καταλήξει σε μεγάλους χρόνους ανάλογα με την τιμή της $\dot{x}_0$.
Για να απλοποιηθούν οι πράξεις μπορείτε να θέσετε $m=1$, $b=2$, $\mu_0 m_1 m_2 = 32\pi/3$ (σε όλα τα ερωτήματα).

5.5.2 Σώμα μάζας $m=1$ κινείται χωρίς τριβές πάνω στην «κωνική» έλικα με εξίσωση σε κυλινδρικές συντεταγμένες $\varpi = z$, $\phi = z$ (με $z \geq 0$), υπό την επίδραση πεδίου βαρύτητας $\boldsymbol{g} = -\hat{y}$.



(α) Βρείτε την κινητική και δυναμική ενέργεια του σώματος σαν συνάρτηση της $z(t)$ και γράψτε το ολοκλήρωμα ενέργειας που αποτελεί και την εξίσωση κίνησης.
(β) Έστω αρχικά το σώμα εκτοξεύεται από την θέση $z = 0$ με ταχύτητα v_0 και φτάνει σε μέγιστο $z_{\max} = 0.07$. Ποια η αρχική ταχύτητα v_0; Σε πόσο χρόνο θα γυρίσει στην αρχική θέση;
Υπόδειξη: Δείξτε ότι για μικρά $z \ll 1$ η εξίσωση κίνησης γίνεται $\dot{z}^2 + z^2 = E \Leftrightarrow \ddot{z} + z = 0$.

5.5.3 Σώμα μάζας $m = 1$ κινείται σε ευθεία υπό την επίδραση πεδίου δύναμης

$$\boldsymbol{F} = \begin{cases} \left(\dfrac{4}{x^3} - \dfrac{1}{x^2}\right)\hat{x}\,, & \text{αν } |x| > 1 \\ 0\,, & \text{αν } |x| < 1 \end{cases}$$

(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας είναι

$$V = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x} + C\,, & \text{αν } x \geq 1 \\ 1 + C\,, & \text{αν } -1 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x} - 2 + C\,, & \text{αν } x \leq -1 \end{cases}$$

όπου C αυθαίρετη σταθερά (την οποία και μηδενίζουμε για ευκολία).
(β) Αρχικά το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας $x = 4$ και έχει ταχύτητα $v_0 < 0$.
(β_1) Περιγράψτε την κίνηση για διάφορες τιμές της αρχικής ταχύτητας. Για ποιες τιμές η κίνηση είναι ταλάντωση, για ποιες το σώμα φτάνει στο $x = -\infty$ και για ποιες το σώμα φτάνει στο $x = +\infty$;
(β_2) Βρείτε την περίοδο των μικρών ταλαντώσεων για $v_0 \approx 0$.
(β_3) Βρείτε τα άκρα της κίνησης και την περίοδο για $v_0 = -1/6$.
(γ) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης για το δοσμένο πεδίο δύναμης.
Δίνεται $\displaystyle\int_a^b \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{(\xi - a)(b - \xi)}} = \frac{\pi(a + b)}{2}$.

5.5.4 Φορτίο q κινείται κοντά σε ευθύγραμμο αγωγό απείρου μήκους ο οποίος έχει φορτίο ανά μήκος λ και διαρρέεται από ρεύμα I. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες με τον αγωγό στον άξονα z το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ο αγωγός είναι $\boldsymbol{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varpi}\hat{\varpi}$ και $\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\varpi}\hat{\phi}$.
(α) Δείξτε ότι οι $\hat{\phi}$ και $\hat{z}$ συνιστώσες του νόμου Νεύτωνα $m\boldsymbol{a} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ δίνουν τα ολοκληρώματα $m\varpi^2\dot{\phi} = L\,, \quad m\dot{z} - \dfrac{\mu_0 I q}{2\pi}\ln\varpi = p_z$.
(β) Χρησιμοποιώντας τα ολοκληρώματα αυτά γράψτε την $\hat{\varpi}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα σαν $m\ddot{\varpi} = f(\varpi)$ (η κίνηση ανάγεται σε «μονοδιάστατη»). Βρείτε το ολοκλήρωμα της ενέργειας για αυτή την κίνηση και σχολιάστε τη φυσική του σημασία.
(γ) Δείξτε ότι λόγω του μαγνητικού πεδίου το φορτίο είναι υποχρεωμένο να κινείται κοντά στον αγωγό (δηλ. η απόσταση ϖ δεν μπορεί να γίνει μεγαλύτερη κάποιας μέγιστης $\varpi_{\max}$), ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες, ακόμα και στην περίπτωση που το φορτίο είναι ομόσημο με το φορτίο του αγωγού ($\lambda q > 0$). Δείξτε επίσης ότι το φορτίο δεν μπορεί να συγκρουστεί με τον αγωγό, ακόμα και αν είναι ετερόσημο του φορτίου του ($\lambda q < 0$).