Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Φυσικής
Χειμερινό εξάμηνο 2024-2025

<u>3η εργασία στη Μηχανική Ι</u>

---

1. Σώμα $m = 1$ εκτελεί γραμμική εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση. Η δυνάμεις επαναφοράς, απόσβεσης και διέγερσης είναι $-\dfrac{11}{3}x$, $-2\dot{x}$ και $\dfrac{100}{3}\cos t$, αντίστοιχα.
(α) Αν αρχικά ($t = 0$) είναι $x = 14$ και $\dot{x} = 0$, ποια η θέση σε κάθε χρόνο;
(β) Μετά από πόσο χρόνο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κίνηση είναι αρμονική ταλάντωση;
Ποιο είναι το πλάτος της και ποια η διαφορά φάσης της ταχύτητας με την διέγερση;

---

2. Έστω δένουμε σημειακό σώμα σε κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο μέσα σε ομογενή βαρύτητα g. Στο σώμα ασκείται το βάρος, η δύναμη ελατηρίου και αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας, που αντιστοιχεί σε κρίσιμη απόσβεση. Αν αρχικά το σώμα είναι ακίνητο και το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, ενώ τελικά το σώμα σταματά σε απόσταση x_0 από την αρχική του θέση, ποια η θέση σε κάθε χρόνο;
(Δεδομένα είναι μόνο τα g και x_0.)

3.[1] Ένας ταλαντωτής με μάζα $m = 1$ και ιδιοσυχνότητα $\omega_0 = 1$ και συντελεστή γραμμικής αντίστασης $\gamma = 0.1$ διεγείρεται από αρμονική δύναμη της μορφής $F(t) = \cos(\omega t)$. Αφότου έχει αποκατασταθεί η διεγειρόμενη αρμονική ταλάντωση (έχουν αποσβεστεί οι αρχικές συνθήκες) να υπολογιστεί (α) το έργο W_F της δύναμης για μια περίοδο της διεγείρουσας δύναμης και (β) το έργο της αντίστασης W_T στο ίδιο διάστημα. (γ) Είναι ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρεται η ενέργεια dW_F/dt από την εξωτερική δύναμη ίδια κατ' απόλυτη τιμή με τον ρυθμό dW_T/dt που καταναλώνει η αντίσταση ενέργεια ανά πάσα χρονική στιγμή; (δ) Η ενέργεια του ταλαντωτή (κινητική+δυναμική) είναι σταθερή;

4.[1] Μια μάζα $m = 1$ βρίσκεται πάνω σε μια οριζόντια αεροτροχιά και μπορεί να κινείται με συντελεστή γραμμικής αντίστασης γ. Η μάζα βρίσκεται στο άκρο ιδανικού ελατηρίου με συντελεστή σκληρότητας $k = 1$ και φυσικό μήκος $l_0 = 0.5$ και το οποίο έχει αμελητέες διαστάσεις οπότε μπορεί να συμπιεστεί μέχρι να φτάσει σε μηδενικό μήκος. Το άλλο άκρο του ελατηρίου βρίσκεται σε κινητό Α αμελητέων διαστάσεων που μέσω μηχανισμού εκτελεί την κίνηση $x_A(t) = 0.1[1 - \cos(\omega t)]$. Το σημείο $x = 0$ είναι το ένα άκρο της αεροτροχιάς που βρίσκεται το κινητό Α τη χρονική στιγμή 0. Το άλλο άκρο Β της αεροτροχιάς βρίσκεται στη θέση $x_B = 1$.
(α) Να γραφεί η εξίσωση κίνησης της μάζας (μετά την αποκατάσταση της διεγειρόμενης ταλάντωσης).
(β) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του γ, ώστε η μάζα να μην μπορεί να φύγει ποτέ εκτός της αεροτροχιάς, για οποιαδήποτε επιλογή της ω.
(γ) Η ελάχιστη τιμή του γ που οριακά αποφεύγει να «ρίξει» τη μάζα εκτός αεροτροχιάς, μήπως οδηγεί σε αφύσικη θεώρηση ως προς το ότι αναγκάζει το ελατήριο να λαμβάνει αρνητικό μήκος στην εξίσωση κίνησης;
[Θεωρήστε, όπου χρειάζεται, ότι $\gamma << \omega_0 = \sqrt{k/m}$.]

---

[1] Τα προβλήματα σε έγχρωμο κείμενο είναι αυξημένης δυσκολίας, απαντάτε προαιρετικά.

<u>Λύσεις</u>

---

1. Η εξίσωση κίνησης είναι $\ddot{x}+2\dot{x}+\dfrac{11}{3}x=\dfrac{100}{3}\cos t$.

Η λύση της ομογενούς είναι $e^{\lambda t}$ με $\lambda^2+2\lambda+\dfrac{11}{3}=0 \Leftrightarrow \lambda=-1\pm i\sqrt{\dfrac{8}{3}}$, δηλ. είναι $C_1e^{-t}\cos{(\omega t)}+C_2e^{-t}\sin{(\omega t)}$ με $\omega=\sqrt{\dfrac{8}{3}}$.

Για να βρούμε μια μερική λύση, ένας τρόπος είναι χρησιμοποιώντας μιγαδικούς να σκεφτούμε την εξίσωση κίνησης σαν $\ddot{\zeta}+2\dot{\zeta}+\dfrac{11}{3}\zeta=\dfrac{100}{3}e^{it}$ με $x=\Re\zeta$. Η μερική λύση είναι $\zeta=De^{it}$ με την αντικατάσταση να δίνει $D=\dfrac{100}{8+6i}=8-6i$, δηλ. η μερική λύση είναι $x=\Re\left[(8-6i)e^{it}\right]=8\cos t+6\sin t$.

Επομένως η γενική λύση είναι $x=C_1e^{-t}\cos{(\omega t)}+C_2e^{-t}\sin{(\omega t)}+8\cos t+6\sin t$.

(α) Αν αρχικά ($t=0$) είναι $x=14$ και $\dot{x}=0$ είναι $C_1=6$ και $C_2=0$, δηλ. η θέση σε κάθε χρόνο είναι $x=6e^{-t}\cos{(\omega t)}+6\sin t+8\cos t$.

(β) Για $t\gtrsim 5$ το εκθετικό είναι αμελητέο και η κίνηση είναι αρμονική ταλάντωση $x=6\sin t+8\cos t$.

Η θέση μπορεί να γραφεί σαν $x=D\cos\phi\sin t+D\sin\phi\cos t=D\sin(t+\phi)$, με $D\cos\phi=6$ και $D\sin\phi=8$, δηλ. με $D=\sqrt{6^2+8^2}=10$ και ϕ κοινή λύση των $\cos\phi=\dfrac{3}{5}$ και $\sin\phi=\dfrac{4}{5}$.

Στην μορφή αυτή φαίνεται ότι το πλάτος της ταλάντωσης είναι $D=10$.

Η διαφορά φάσης της ταχύτητας $v=\dot{x}=10\cos(t+\phi)$ με την διέγερση είναι ϕ (η ταχύτητα προηγείται).

---

2. Αν $m\omega^2$ είναι η σταθερά του ελατηρίου η εξίσωση κίνησης είναι $m\ddot{x}=mg-2m\gamma\dot{x}-m\omega^2x \Leftrightarrow \ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega^2x=g$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της ομογενούς έχει διπλή λύση αφού η απόσβεση είναι κρίσιμη. Άρα $\gamma=\omega$ και οι λύσεις της ομογενούς είναι $e^{-\omega t}$ και $te^{-\omega t}$. Μια μερική λύση είναι σταθερή και ίση με $\dfrac{g}{\omega^2}$ (η οποία είναι η θέση ισορροπίας του σώματος), οπότε η γενική λύση είναι $x=\dfrac{g}{\omega^2}+(C_1+C_2t)\,e^{-\omega t}$, $\dot{x}=(C_2-\omega C_1-\omega C_2t)\,e^{-\omega t}$.

Σε μεγάλους χρόνους $x_0=g/\omega^2 \Leftrightarrow \omega=\sqrt{g/x_0}$.

Από αρχικές συνθήκες $x=0$, $\dot{x}=0$ βρίσκουμε $C_1=-x_0$, $C_2=-\omega x_0$ και άρα σε κάθε χρόνο $x=x_0\left[1-(1+\omega t)\,e^{-\omega t}\right]$ με $\omega=\sqrt{g/x_0}$.

---

3. (α) Το έργο της F είναι

$$W_F=\int_0^T F(t)ds=\int_0^T F(t)v(t)dt$$

και αντικαθιστώντας $F(t)=\cos(\omega t)$, $x(t)=A\cos(\omega t-\phi)$, $v(t)=-A\omega\sin(\omega t-\phi)$, με

$$A=\frac{1}{\sqrt{(-\omega^2+\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}=\frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2+0.04\omega^2}}$$

και $\phi=\tan^{-1}(2\gamma\omega/(\omega_0^2-\omega^2))=\tan^{-1}(0.2\omega/(1-\omega^2))$. Οπότε

$$\begin{aligned} W_F &= (1/\omega)\int_0^{2\pi/\omega}\cos(\omega t)(-A\omega)\sin(\omega t-\phi)d(\omega t) \\ &= -A\int_0^{2\pi}\cos x(\cancel{\sin x}\cos\phi-\sin\phi\cos x)dx \\ &= A\frac{1}{2}\sin\phi \end{aligned}$$

Ο όρος διαγράφηκε εξαιτίας μηδενισμού του αντίστοιχου ολοκληρώματος.
(β) Το έργο της αντίστασης είναι

$$W_T = \int_0^T (-2\gamma v(t))ds = -2\gamma \int_0^T v(t)^2 dt.$$

Εκτελώντας τις πράξεις βρίσκουμε

$$\begin{aligned} W_T &= -2\gamma(1/\omega)(A^2\omega^2) \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(\omega t - \phi) d(\omega t) \\ &= -2\gamma\omega A^2 \frac{1}{2} \\ &= -A(A\omega\gamma) \end{aligned}$$

Η ποσότητα $\sin\phi = \tan\phi/\sqrt{1+\tan^2\phi} = 2\gamma\omega/\sqrt{(-\omega^2+\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega^2} = 2A\gamma\omega$ εξασφαλίζει ότι $W_T = -W_F$ (όση ενέργεια προσφέρεται από την F καταναλώνεται από την αντίσταση).
(γ) Η στιγμιαία ισχύς της F είναι

$$\frac{dW_F}{dt} = Fv = \cos(\omega t)(-A\omega)\sin(\omega t - \phi)$$

ενώ αυτή της T

$$\frac{dW_T}{dt} = (-2\gamma v)v = -2\gamma(-A\omega)^2 \sin^2(\omega t - \phi)$$

Προφανώς αυτές οι δύο εκφράσεις δεν είναι η μία αντίθετη της άλλης (αφού η πρώτη γίνεται και θετική και αρνητική ενώ ή δεύτερη είναι καθαρά αρνητική), αλλά είναι κατά μέσον όρο αντίθετες.
(δ) Το γεγονός ότι οι ισχείς δεν εξισορροπούνται κάθε χρονική στιγμή καθιστά τελικά την ενέργεια του ταλαντωτή ταλαντούμενη γύρω από μια μέση σταθερή τιμή:

$$\begin{aligned} E &= = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m(v^2 + \omega_0^2 x^2) \\ &= \frac{1}{2}mA^2(\omega^2 \sin^2(\omega t - \phi) + \omega_0^2 \cos^2(\omega t - \phi) \\ &= \frac{1}{2}mA^2 \left(\frac{\omega^2+\omega_0^2}{2} - \frac{\omega^2-\omega_0^2}{2} \cos 2(\omega t - \phi) \right) \end{aligned} \quad (1)$$

---

4. [*Σημείωση: η ανάλυση που ακολουθεί έχει μακροσκελείς αριθμητικές πράξεις και εδώ παρουσιάζονται τα αποτελέσματα και η λογική αυτών με παράλειψη κάποιων βημάτων.*]

Η μάζα δέχεται τις ακόλουθες δυνάμεις: τη δύναμη από το ελατήριο $-k(x - x_A(t) - l_0) = -(x - 0.1 + 0.1\cos(\omega t) - 0.5)$, τη δύναμη της τριβής, $-2\gamma m\dot{x} = -2\gamma\dot{x}$. Έτσι η εξίσωση κίνησής της θα είναι

$$\ddot{x} = -(x - 0.6 + 0.1\cos(\omega t)) - 2\gamma\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x = 0.6 - 0.1\cos(\omega t) \quad (2)$$

που με την αλλαγή μεταβλητής $\xi = x - 0.6$ μετατρέπεται στην

$$\ddot{\xi} + 2\gamma\dot{\xi} + \xi = -0.1\cos(\omega t).$$

Αυτή είναι η κλασσική εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση (με αρνητικό πρόσημο δύναμης), οπότε η τελική κατάσταση θα είναι

$$\xi(t) = -\frac{0.1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{2\gamma\omega}{1-\omega^2}\right)$$

Από την έκφραση για την ταλάντωση αυτή μπορούμε να βρούμε τα όρια της κίνησης που θέλουμε να είναι τέτοια ώστε

$$x_A(t) \leq x(t) \leq 1$$

δηλαδή

$$x_A(t) - 0.6 \leq \xi(t) \leq 0.4.$$

Η δεξιά ανισότητα (χρονοανεξάρτητη) απαιτεί

$$\frac{0.1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \leq 0.4.$$

Λύνοντας την παραπάνω ανισότητα ως προς γ, αφού πρώτα δείξουμε ότι η υπόρριζη ποσότητα γράφεται $(1-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2 = (\omega^2 - 1 + 2\gamma^2)^2 + 1 - (1-2\gamma^2)^2$ και άρα ελαχιστοποιείται για $\omega^2 = 1 - 2\gamma^2$, βρίσκουμε

$$\gamma \geq \sqrt{\frac{1 - \sqrt{15}/4}{2}} \simeq 0.126.$$

Αρκεί στη συνέχεια να ελέγξουμε κατά πόσο ισχύει και η αριστερή (χρονοεξαρτώμενη ανισότητα) για την ελάχιστη τιμή του γ που εγγυάται τη δεξιά ανισότητα. Θέλουμε λοιπόν να ελέγξουμε κατά πόσον

$$0.1(1 - \cos(\omega t)) - 0.6 \leq \frac{-0.1}{\sqrt{1 - (1 - 2\gamma^2)^2}} \cos(\omega t - \tan^{-1} \frac{2\gamma\sqrt{1-2\gamma^2}}{2\gamma^2})$$

Μετά από πράξεις η παραπάνω ανισότητα μεταφράζεται στην

$$-5 \leq \cos\omega t - 4\cos(\omega t - \phi))$$

με ω την χαρακτηριστική τιμή που ελαχιστοποιεί την υπόρριζη ποσότητα, $\sqrt{1-2\gamma^2}$ και ο παράγοντας 4 να προκύπτει από το πλάτος $1/\sqrt{1-(1-2\gamma^2)^2}$ με την τιμή του γ που βρήκαμε παραπάνω. Το πλάτος της ημιτονοειδούς έκφρασης που εμφανίστηκε στο δεξιό μέλος προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα των δύο περιστρεφόμενων διανυσμάτων που αντιπροσωπεύουν τους δύο συνημιτονοειδείς όρους, και έχουν μέτρο 1 και 4 αντίστοιχα και διαφορά φάσης ϕ. Το μέτρο λοιπόν του αθροίσματος των δύο διανυσμάτων είναι

$$\left(1 + 4^2 - 2 \cdot 4\cos\phi\right)^{1/2} = \sqrt{17 - 8/(1 + \tan^2\phi)^{1/2}} = \ldots \sqrt{17 - 64\gamma^2} = 3.998$$

οπότε η ανισότητα ικανοποιείται.

Η ερώτηση είναι, όμως, αν το ίδιο εξακολουθεί να ισχύει αν $\gamma > 0.126$ και για οποιοδήποτε ω. Όπως είδαμε η διαφορά φάσης σε συνδυασμό με το πλάτος της ταλάντωσης παίζουν ρόλο στον καθορισμό του πλάτους του χρονοεξαρτώμενου μέρους. Θα μπορούσε, λοιπόν, κάποιος να ισχυριστεί ότι ακόμη και αν το πλάτος ήταν λίγο μικρότερο από το μέγιστο, η διαφορά φάσης θα μπορούσε να ρυθμιστεί έτσι ώστε να μεγαλώσει το εύρος ταλάντωσης του χρονοεξαρτώμενου όρου.

Ας ελέγξουμε αν ισχύει κάτι τέτοιο. Αυτό που θέλουμε να ελέγξουμε είναι ποιο είναι γενικά το εύρος της ταλάντωσης του όρου

$$\cos(\omega t) - A\cos(\omega t - \phi)$$

με $A = 1/\sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$ και $\phi = \tan^{-1}(2\gamma\omega/(1-\omega^2))$. Το εύρος θα δίνεται, όπως και πριν, από το διανυσματικό άθροισμα, δηλαδή από

$$C = \left(1 + A^2 - 2 \cdot A\cos\phi\right)^{1/2} = \left(1 + A^2 - 2 \cdot \frac{A}{\sqrt{1 + \tan^2\phi}}\right)^{1/2} = \ldots = \sqrt{1 + (2\omega^2 - 1)A^2}$$

Για δοσμένο γ, η παραπάνω ποσότητα μεγιστοποιείται όταν η ποσότητα

$$Z = \frac{2x-1}{(1-x)^2 + 4\gamma^2 x},$$

όπου x αντιπροσωπεύει την ποσότητα ω^2, μεγιστοποιείται. Με πράξεις βρίσκουμε ότι το Z καθίσταται ακρότατο όταν $x_{\pm} = (1 \pm \sqrt{1+8\gamma^2})/2$.[2] Το x_+ οδηγεί στη μεγαλύτερη τιμή της παράστασης Z και επομένως στο μέγιστο εύρος ταλάντωσης της προαναφερθείας χρονοεξαρτώμενης ποσότητας. Η C_{max}, λοιπόν, είναι

$$\sqrt{1 + \frac{2}{4\gamma^2 - 1 + \sqrt{1+8\gamma^2}}}$$

η οποία λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της (είναι φθίνουσα συνάρτηση του γ^2) στο μικρότερο δυνατό γ, δηλαδή για $\gamma = 0.126$. Η μέγιστη αυτή τιμή είναι 4.121 που και πάλι είναι μικρότερη του 5. Το γεγονός αυτό εξασφαλίζει ότι το ελατήριο θα απομείνει να έχει πάντα θετικό μήκος, όταν εξασφαλιστεί ότι το ταλαντούμενο σώμα δεν θα ξεπεράσει το εύρος της αεροτροχιάς.

---

[2] Όπως βλέπετε δεν εμφανίζεται στη συχνότητα συντονισμού $x_0 = 1 - 2\gamma^2$ το μέγιστο πλάτος και επομένως έχει νόημα η ανάλυση που κάνουμε.