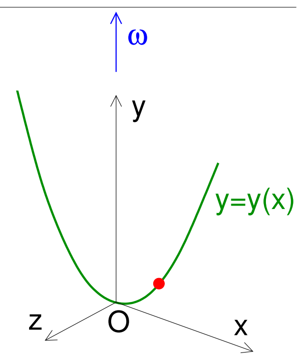
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Φυσικής
Χειμερινό εξάμηνο 2024-2025

4η εργασία στη Μηχανική Ι

1. Έστω πλάγια βολή προς βορρά από κάποιο τόπο της Γης. Η αρχική ταχύτητα έχει οριζόντια συνιστώσα v_{0y} (προς βορρά) και κατακόρυφη v_{0z}. Λόγω της ιδιοπεριστροφής της Γης η τροχιά αποκλίνει λίγο στη διεύθυνση ανατολή-δύση. Αν ω η γωνιακή ταχύτητα ιδιοπεριστροφής της Γης, φ το γεωγραφικό πλάτος του τόπου, g η (σταθερή) επιτάχυνση βαρύτητας και $z_{\max}$ το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα, δείξτε ότι το σημείο πτώσης του σώματος αποκλίνει προς την ανατολή (αλγεβρικά) κατά $x = 8\sqrt{2}\left(\dfrac{v_{0y}}{v_{0z}}\sin\varphi - \dfrac{1}{3}\cos\varphi\right)\dfrac{\omega z_{\max}^{3/2}}{g^{1/2}}$. Εξηγήστε ποιοτικά γιατί η απόκλιση είναι προς την ανατολή για σημεία βολής κοντά στον Βόρειο Πόλο και προς τη δύση για σημεία κοντά στον Ισημερινό και σε όλο το νότιο ημισφαίριο.

2. Κατακόρυφο λείο σύρμα έχει σχήμα $y = y(x)$, βρίσκεται μέσα σε βαρυτικό πεδίο $\vec{g} = -\hat{y}$ και περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα $\hat{y}$ με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \omega\hat{y}$. Δαχτυλίδι είναι περασμένο στο σύρμα και η κίνησή του περιγράφεται από το ολοκλήρωμα $\dfrac{(1+4x^6)\dot{x}^2}{2} + \dfrac{x^4 - 8x^2}{2} =$ σταθερά.



(α) Ποιο το σχήμα $y = y(x)$ και ποια η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω;
(β) Ποιες είναι οι ευσταθείς θέσεις ισορροπίας του δαχτυλιδιού ως προς το σύρμα;
(γ)[1] Σε ποια θέση $x_i > 0$ πρέπει να αφήσουμε το δαχτυλίδι ώστε να πλησιάζει επ' άπειρον την κατώτερη θέση;

3.[1] Σε μια περιστρεφόμενη ευθύγραμμη ράβδο AB είναι περασμένη μια χάντρα μάζας m η οποία είναι στερεωμένη στο άκρο αβαρούς ελατηρίου σταθεράς k, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στο άκρο της ράβδου A γύρω από το οποίο περιστρέφεται αυτή. Η χάντρα ακουμπά στη ράβδο με τέτοιο τρόπο ώστε να εμφανίζεται τριβή ολίσθησης με αυτήν με συντελεστή μ. Αν το φυσικό μήκος του ελατηρίου είναι l_0 και η ράβδος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω (με $\Omega^2 < k/m$) να βρεθεί η εξίσωση κίνησης της χάντρας πάνω στη ράβδο. Αρχικά το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος και η χάντρα δεν κινείται σε σχέση με την ράβδο. Πώς πρέπει να επιλέξετε τη σταθερά μ ώστε να πετύχετε τη μέγιστη δυνατή επιμήκυνση του ελατηρίου. Θα συμβεί αυτό άπαξ ή πολλές φορές; [Αγνοήστε το βαρυτικό πεδίο.]

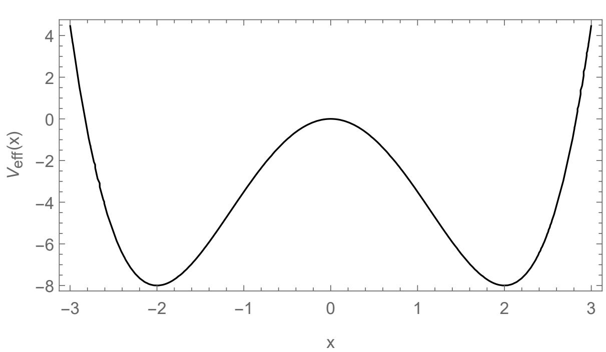
[1] Τα προβλήματα σε έγχρωμο κείμενο είναι αυξημένης δυσκολίας, απαντάτε προαιρετικά.

Λύσεις

1. Στις διαλέξεις έχουμε δείξει ότι για κινήσεις κοντά στην επιφάνεια της Γης η διαταρακτική επίλυση της $\vec{a} = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}$ δίνει θέση σε κάθε χρόνο $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 - \vec{\omega} \times \vec{v}_0 t^2 - \frac{1}{3}\vec{\omega} \times \vec{g}t^3$. Σε ένα σύστημα αναφοράς με αρχή το σημείο βολής ($\vec{r}_0 = 0$), άξονα $\hat{x}$ προς ανατολάς, $\hat{y}$ προς βορρά και $\hat{z}$ προς το ζενίθ του τόπου, είναι $\vec{g} = -g\hat{z}$, $\vec{\omega} = \omega\cos\varphi\hat{y} + \omega\sin\varphi\hat{z}$, $\vec{v}_0 = v_{0y}\hat{y} + v_{0z}\hat{z}$ και η παραπάνω σχέση δίνει $x = (v_{0y}\sin\varphi - v_{0z}\cos\varphi)\omega t^2 + \frac{1}{3}\omega\cos\varphi\, g t^3$, $y = v_{0y}t$, $z = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2$.
Στο ανώτερο σημείο $\dot{z} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{v_{0z}}{g}$ και άρα $z_{\text{max}} = \frac{v_{0z}^2}{2g} \Leftrightarrow v_{0z} = \sqrt{2gz_{\text{max}}}$.
Στο σημείο πτώσης $z = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2v_{0z}}{g}$ και άρα $x = (v_{0y}\sin\varphi - v_{0z}\cos\varphi)\omega\left(\frac{2v_{0z}}{g}\right)^2 + \frac{1}{3}\omega\cos\varphi\, g\left(\frac{2v_{0z}}{g}\right)^3$.
Αντικαθιστώντας $v_{0z} = \sqrt{2gz_{\text{max}}}$ βρίσκουμε την ζητούμενη έκφραση της απόκλισης (αν προκύψει θετική ή αρνητική σημαίνει απόκλιση προς την ανατολή ή τη δύση, αντίστοιχα).
Για την ποιοτική εξήγηση του αποτελέσματος δείτε άσκηση 7.8 (ερώτημα β).

---

2. (α) Στο περιστρεφόμενο σύστημα του σύρματος υπάρχει ολοκλήρωμα «ενέργειας» $\frac{mv^2}{2} + my - \frac{m\omega^2 r_\perp^2}{2} =$ σταθερά (λαμβάνοντας υπόψη την δυναμική ενέργεια του βάρους και της φυγόκεντρου). Είναι $r_\perp = |x|$ και $\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} = \dot{x}\hat{x} + y'\dot{x}\hat{y}$, όπου $y' = \frac{dy}{dx}$, οπότε το ολοκλήρωμα είναι $\frac{\dot{x}^2(1+y'^2)}{2} + y - \frac{\omega^2 x^2}{2} =$ σταθερά.
Συγκρίνοντας με την δοσμένη έκφραση πρέπει να ισχύει $y'^2 = 4x^6$ και $y - \frac{\omega^2 x^2}{2} = \frac{x^4 - 8x^2}{2} +$ σταθερά. Η πρώτη δίνει $y' = \pm 2x^3 \Leftrightarrow y = y_0 \pm \frac{x^4}{2}$ (όπου y_0 σταθερά). Η αντικατάσταση στη δεύτερη δίνει $\pm\frac{x^4}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2} = \frac{x^4 - 8x^2}{2} +$ σταθερά. Για να ισχύει η τελευταία για κάθε x δεκτό είναι μόνο το πάνω πρόσημο, δηλ. $y = y_0 + \frac{x^4}{2}$ και για την γωνιακή ταχύτητα είναι $\omega^2 = 8 \Leftrightarrow \omega = \pm\sqrt{8}$.
(β) Η εξίσωση κίνησης είναι $\frac{(1+4x^6)\dot{x}^2}{2} + V_{\text{eff}}(x) = E$ όπου $V_{\text{eff}}(x) = \frac{x^4 - 8x^2}{2} = \frac{(x^2-4)^2}{2} - 8$. Τα όρια της τροχιάς βρίσκονται από $V_{\text{eff}}(x) \leq E$, επομένως τα ευσταθή σημεία ισορροπίας (στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς) αντιστοιχούν στα ελάχιστα της $V_{\text{eff}}(x)$ (το γράφημά της φαίνεται παρακάτω) και είναι τα $V'_{\text{eff}}(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$ (η τρίτη λύση $x = 0$ αντιστοιχεί σε μέγιστο, δηλ. ασταθές σημείο ισορροπίας).



(γ) Η κατώτερη θέση είναι η $x = 0$ στην οποία η $V_{\text{eff}}(x)$ έχει μέγιστο. Πρέπει $E = V_{\text{eff}}(0) = 0$ και αφού η αρχική ταχύτητα είναι μηδενική η αρχική θέση x_i αντιστοιχεί σε $V_{\text{eff}}(x_i) = 0 \Leftrightarrow x_i = \sqrt{8}$. (Από το γράφημα φαίνεται ότι αν η αρχική θέση είναι λίγο μετά το $\sqrt{8}$, δηλ. η ενέργεια $E = 0^+$, το σώμα θα περάσει την κατώτερη θέση $x = 0$ προς αρνητικά x, ενώ αν η αρχική θέση είναι λίγο πριν το $\sqrt{8}$, δηλ. η ενέργεια $E = 0^-$, το σώμα θα ανακλαστεί πριν την κατώτερη θέση $x = 0$.)

---

3. Στη ράβδο ασκούνται (στο σύστημα της ράβδου) η δύναμη του ελατηρίου $-k(r-l_0)$, όπου r η θέση του σωματιδίου από το κέντρο περιστροφής, η αντίδραση από τη ράβδο (η οποία ευθύνεται για την περιστροφή του σωματιδίου μαζί με τη ράβδο σε ένα αδρανειακό σύστημα) $\hat{\phi}N$, η δύναμη Coriolis $-2m\vec{\Omega}\times\vec{v} - = 2m\Omega\dot{r}\hat{\phi}$, η φυγόκεντρος $-m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}) = m\Omega^2\vec{r}$ και τέλος η τριβή $-\mu|N|\hat{v}$. όπου $\hat{v}$ το μοναδιαίο στην κατεύθυνση της ταχύτητας. Συνολικά λοιπόν θα είναι

$$N + 2m\Omega\dot{r} = 0$$

και

$$m\ddot{r} = -k(r-l_0) + m\Omega^2 r - \mu\frac{\dot{r}}{|\dot{r}|}N$$

αφού το σωματίδιο κινείται μόνο πάνω στη ράβδο και όχι κάθετα σε αυτή. Από την πρώτη σχέση βρίσκουμε $N = -2m\Omega\dot{r}$ οπότε η δεύτερη παίρνει τη μορφή

$$m\ddot{r} = -k(r-l_0) + m\Omega^2 r - \mu\frac{\dot{r}}{|\dot{r}|}|N| = -k(r-l_0) + m\Omega^2 r - 2\mu m\Omega\dot{r}$$

και διαιρώντας με m και θέτοντας $k/m = \omega'^2$

$$\ddot{r} = -\omega'^2(r-l_0) + \Omega^2 r - 2\mu\Omega\dot{r} \Rightarrow \tag{1}$$
$$\ddot{r} + 2\mu\Omega\dot{r} + \omega^2 r = \omega'^2 l_0, \tag{2}$$

με $\omega^2 = \omega'^2 - \Omega^2 > 0$. Με αλλαγή $\xi = r - (\omega'/\omega)^2 l_0$ καταλήγουμε στην ομογενή εξίσωση

$$\ddot{\xi} + 2\mu\Omega\dot{\xi} + \omega^2\xi = 0.$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι $\xi(0) = l_0[1-(\omega'/\omega)^2] < 0$ και $\dot{\xi}(0) = 0$. Η κίνηση είναι γενικά αποσβυνόμενη ταλάντωση (για $\mu^2\Omega^2 < \omega^2$) ή κρίσιμη απόσβεση (για $\mu^2\Omega^2 = \omega^2$) ή υπεραπόσβεση (για $\mu^2\Omega^2 > \omega^2$). Για να πετύχουμε τη μέγιστη απομάκρυνση (αφού αρχικά είχαμε αρνητική απομάκρυνση ξ και μηδενική ταχύτητα) θα πρέπει να έχουμε καθαρή (μη αποσβυνόμενη ταλάντωση) δηλαδή $\mu = 0$ (αλλιώς το πλάτος θα μειωνόταν και θα έφτανε σε κάποια θετική θέση μικρότερη από την απόλυτη τιμή της αρχικής). Η αρχική θέση θα είναι τότε το αντίθετο της μέγιστης:

$$\xi_{\max} = -\xi(0)$$

και για το r:

$$r_{\max} = -\xi(0) + \frac{\omega'^2}{\omega^2}l_0 = l_0\frac{k/m + \Omega^2}{k/m - \Omega^2}.$$