



Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών  
Τμήμα Φυσικής  
Χειμερινό εξάμηνο 2024-2025  
5η εργασία στη Μηχανική Ι

1. Σώμα μάζας  $m = 1$  κινείται στο πεδίο κεντρικής δύναμης  $V(r) = Ar^4$ , σε κατάλληλες μονάδες, με  $A$  σταθερά. Αρχικά βρίσκεται στη θέση  $\vec{r}_i = \hat{x}$ , έχει ταχύτητα κάθετη στην ακτίνα και στροφορμή  $\vec{L} = \hat{z}$ .
- (α) Βρείτε την αρχική ταχύτητα. Σχεδιάστε τα διανύσματα αρχικής θέσης και αρχικής ταχύτητας στο επίπεδο της κίνησης.
- (β) Βρείτε την ενεργό δυναμική ενέργεια και σχεδιάστε το γράφημά της.
- (γ) Ποια είναι η τιμή της  $A$  αν γνωρίζετε ότι το σώμα κινείται κυκλικά;
- (δ) Ποια είναι η τιμή της  $A$  αν γνωρίζετε ότι η κίνηση περιορίζεται μεταξύ των αψίδων  $r = 1$  και  $r = 2$ ;
- (ε) Για την κίνηση του ερωτήματος (δ) σε πόσο χρόνο  $\Delta t$  το σώμα μεταβαίνει από την αψίδα  $r = 1$  στην  $r = 2$ ; Βρείτε την μεταβολή της γωνίας  $\Delta\phi$  σε αυτό το διάστημα.  
(Εκφράστε τα αποτελέσματα σε μορφή ορισμένων ολοκληρωμάτων, δεν χρειάζεται να τα υπολογίσετε.)
- (στ) Για την κίνηση του ερωτήματος (δ) ποια είναι η εξίσωση τροχιάς;  
(Βρείτε την διαφορική εξίσωση που συνδέει τις  $u = 1/r$  και  $\phi$ , δεν χρειάζεται να την λύσετε.)
- (ζ) Έστω το σώμα κινείται κυκλικά στην ακτίνα  $r = 1$ , όπως στο ερώτημα (γ). Κάποια στιγμή  $t = 0$  δίνουμε στο σώμα μια μικρή ακτινική ταχύτητα  $v_r = 0.01$ . Πως θα εξελιχθεί η ακτινική κίνηση;  
(Αρκεί διαταρακτική επίλυση.)

2.<sup>1</sup> Στο μάθημα δείχθηκε ότι αν το πεδίο είναι κεντρικό η στροφορμή είναι σταθερή και η κίνηση εξελίσσεται σε ένα επίπεδο. Ισχύει το αντίστροφο; Ελέγξτε τις ακόλουθες περιπτώσεις: (α)  $\vec{F} = \hat{r}f(r) + \vec{v}g(v)$ , όπου  $\vec{v}$  η ταχύτητα του σωματιδίου και  $g$  κάποια τυχαία συνάρτηση, (β)  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  όπου  $\vec{F}_i = f(|\vec{r} - \vec{r}_i|)(\vec{r} - \vec{r}_i)$ , όπου  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  δύο σταθερά διανύσματα και  $f$  κάποια συνάρτηση.

3.<sup>1</sup> Έστω μια απολύτως σκληρή σφαίρα ακτίνας  $R$  η οποία είναι πακτωμένη με το κέντρο της στην αρχή των αξόνων. Η δυναμική ενέργεια «διέλευσης» ενός κατά τα άλλα ελεύθερου σωματιδίου από το εσωτερικό της σφαίρας έχει τη μορφή

$$V(r) = \begin{cases} +\infty & \text{για } r < R \\ 0 & \text{για } r \geq R \end{cases}$$

Ελέγξτε αν πρόκειται για κεντρικό πεδίο δύναμης, φτιάξτε την ενεργό δυναμική ενέργεια ποιοτικά. Ένα σωματίδιο έρχεται από το άπειρο με ταχύτητα  $v$  κατευθυνόμενο προς ένα σημείο που βρίσκεται σε απόσταση  $R/\sqrt{2}$  μακριά από το κέντρο της σφαίρας. Υπολογίστε την ενεργή δυναμική του ενέργεια και το επίπεδο της ενέργειας στο αντίστοιχο διάγραμμα. Υπολογίστε πώς θα κινείται το σωματίδιο μετά την κρούση του με τη σφαίρα και τη γωνία στροφής ερχόμενο από το άπειρο μέχρι απομακρυνόμενο στο άπειρο.

<sup>1</sup> Τα προβλήματα σε έγχρωμο κείμενο είναι αυξημένης δυσκολίας, απαντάτε προαιρετικά.

## Λύσεις

1. (α)  $L = mrv_\phi$ , άρα αρχικά  $v_\phi = \frac{L}{mr} = 1$  και  $v_r = 0$  αφού δίνεται ότι αρχικά  $\vec{v} \perp \vec{r}$ .

(β)  $V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{1}{2r^2} + Ar^4$ .

(γ) Πρέπει η ακτίνα  $r_i = 1$  να αντιστοιχεί σε θέση ελαχίστου της  $V_{\text{eff}}(r)$ , δηλ. πρέπει να είναι  $V'_{\text{eff}}(1) = 0 \Leftrightarrow A = 1/4$ .

(δ) Πρέπει  $V_{\text{eff}}(r) = E$  στα άκρα της ακτινικής κίνησης, δηλ.  $V_{\text{eff}}(1) = V_{\text{eff}}(2) \Leftrightarrow A = 1/40$ .

(ε) Η ενέργεια είναι  $E = V_{\text{eff}}(1) = \frac{21}{40}$  και το ολοκλήρωμα ενέργειας  $\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{1}{2r^2} + \frac{r^4}{40} = \frac{21}{40}$ . Η ακτινική

ταχύτητα είναι  $\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{21}{20} - \frac{1}{r^2} - \frac{r^4}{20}}$ . Για την κίνηση από  $r = 1$  σε  $r = 2$  επιλέγουμε το θετικό πρόσημο και

ο ζητούμενος χρόνος είναι  $\Delta t = \int_{r=1}^{r=2} dt = \int_1^2 \frac{dr}{\dot{r}} = \int_1^2 \frac{dr}{\sqrt{\frac{21}{20} - \frac{1}{r^2} - \frac{r^4}{20}}}$ . (Αυτή είναι η μισή περίοδος της

ακτινικής κίνησης.)

Από διατήρηση της στροφορμής  $\dot{\phi} = \frac{1}{r^2}$ . Η ζητούμενη μεταβολή της γωνίας είναι  $\Delta\phi = \int_{r=1}^{r=2} d\phi =$

$$\int_1^2 \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}} dr = \int_1^2 \frac{\frac{1}{r^2} dr}{\sqrt{\frac{21}{20} - \frac{1}{r^2} - \frac{r^4}{20}}}$$

(στ) Η διαφορική που δίνει την  $u = 1/r$  σαν συνάρτηση του  $\phi$  είναι  $u'' + u = -\frac{m}{L^2 u^2} f$  με  $f = -V' = -\frac{r^3}{10}$

και  $L = 1$ , δηλ.  $u'' + u = \frac{1}{10u^5}$ .

Ισοδύναμη έκφραση προκύπτει από το ολοκλήρωμα ενέργειας  $\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{1}{2r^2} + \frac{r^4}{40} = \frac{21}{40}$  θέτοντας  $\dot{r} = \dot{\phi} \frac{dr}{d\phi} =$

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi}. \text{ Έτσι βρίσκουμε } \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{2r^2} + \frac{r^4}{40} = \frac{21}{40} \Leftrightarrow \frac{u'^2}{2} + \frac{u^2}{2} + \frac{1}{40u^4} = \frac{21}{40}.$$

(ζ) Η στροφορμή παραμένει  $L = 1$ , αλλά η ενέργεια αυξάνεται κατά  $mv_r^2/2$ . Η μικρή αυτή αύξηση οδηγεί

διαταραχή της κυκλικής τροχιάς. Η εξίσωση της ακτινικής κίνησης  $\frac{m\dot{r}^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) = E$ , με  $r = 1 + q$  και μικρό

$q$ , οπότε  $V_{\text{eff}} \approx V_{\text{eff}}(1) + V'_{\text{eff}}(1)q + \frac{1}{2}V''_{\text{eff}}(1)q^2 = 3/4 + 3q^2$ , γίνεται  $\frac{\dot{q}^2}{2} + 3q^2 = \text{σταθερά}$ , ή παραγωγίζοντας,

$\ddot{q} + 6q = 0$ . Προέκυψε αρμονική ταλάντωση με γενική λύση  $q = C_1 \sin(\sqrt{6}t) + C_2 \cos(\sqrt{6}t)$ . Επειδή αρχικά

$q = 0$  και  $\dot{q} = v_r = 0.01$ , η λύση στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι  $q = \frac{0.01}{\sqrt{6}} \sin(\sqrt{6}t)$ . Επομένως η ακτίνα

αλλάζει με το χρόνο σύμφωνα με  $r = 1 + \frac{0.01}{\sqrt{6}} \sin(\sqrt{6}t)$ .

2. (α)  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{r} f(r) + \vec{r} \times \vec{v} g(v) = \frac{\vec{L}}{m} g(v)$ .

Αφού η μεταβολή που συμβαίνει στη στροφορμή είναι κατά μήκος αυτής, αλλάζει το μέτρο της στροφορμής αλλά όχι η διεύθυνση αυτής. Επομένως και πάλι η τροχιά παραμένει επίπεδη (στο επίπεδο που ορίζουν αρχικά η θέση και η ταχύτητα για  $t = 0$ ). Αν αυτά τα διανύσματα είναι αρχικά συγγραμμικά, η στροφορμή είναι μηδενική και δεν θα αλλάξει ( $d0/dt = 0$ ), οπότε το σωματίδιο θα συνεχίσει να κινείται επί της διεύθυνσης της αρχικής ταχύτητας.

(β) Η καθεμία από τις δύο δυνάμεις είναι κεντρική με κέντρο το πέρας του διανύσματος  $\vec{r}_i$ . Έτσι

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times f(|\vec{r} - \vec{r}_1|)(\vec{r} - \vec{r}_1) + \vec{r} \times f(|\vec{r} - \vec{r}_2|)(\vec{r} - \vec{r}_2) = -\vec{r} \times (\vec{r}_1 f_1 + \vec{r}_2 f_2)$$

Το  $(\vec{r}_1 f_1 + \vec{r}_2 f_2)$  είναι ένα διάνυσμα στο επίπεδο των  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ . Έτσι αν το  $\vec{r}$  βρίσκεται και αυτό στο ίδιο επίπεδο το εξωτερικό γινόμενο είναι κάθετο στο επίπεδο αυτό. Αν και η αρχική ταχύτητα είναι στο ίδιο επίπεδο τότε και η αρχική στροφορμή είναι κάθετη στο επίπεδο αυτό. Όπως και στο (α), σε αυτή την περίπτωση η στροφορμή μπορεί να αλλάζει μέτρο αλλά όχι και διεύθυνση, οπότε η τροχιά είναι επίπεδη. Απαραίτητη προϋπόθεση για να συμβαίνει αυτό είναι  $\vec{v}(0), \vec{r}(0), \vec{r}_1, \vec{r}_2$  να είναι συνεπίπεδα.

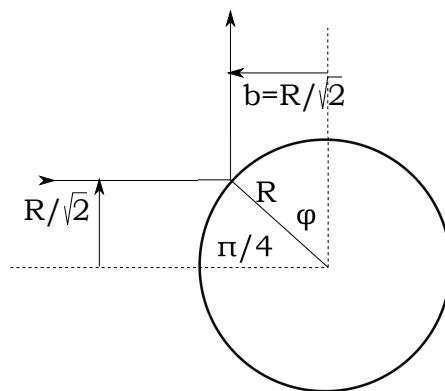
Μια άλλη περίπτωση επίπεδης τροχιάς θα έχουμε αν αρχικά η κίνηση συμβαίνει στο μεσοκάθετο επίπεδο του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα δύο κέντρα, αφού τότε  $f_1 = f_2$  και  $\vec{r} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2 + \vec{r}_\perp$ , με  $\vec{r}_\perp$  διάνυσμα κάθετο στο  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . Ορίζοντας ως αρχή των αξόνων το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τα δύο κέντρα η ποσότητα  $(\vec{r}_1 f_1 + \vec{r}_2 f_2)$  μηδενίζεται, οπότε  $d\vec{L}/dt = 0$  και η στροφορμή διατηρείται, οπότε η κίνηση είναι και πάλι επίπεδη.

3. Είναι κεντρικό αφού η συνάρτηση, αν και σταθερή κατά διαστήματα, εξαρτάται αποκλειστικά από το  $r$ . Η  $V_{\text{ev}}(r)$  έχει τη μορφή του φυγοκεντρικού δυναμικού  $L^2/(2mr^2)$  για  $r \geq R$  και είναι άπειρη για  $r < R$ . Ερχόμενο το σωματίδιο από το άπειρο έχει ενεργό δυναμική ενέργεια  $V_{\text{ev}}(r \rightarrow \infty) = 0$  και κινητική ενέργεια  $mv^2/2$ . Αυτό θα είναι και το επίπεδο της διατηρούμενης ενέργειας στο διάγραμμα της ενεργού δυναμικής ενέργειας. Αφού το σωματίδιο φτάνει μέχρι το  $r = R$  θα πρέπει

$$E = \frac{1}{2}mv^2 > V_{\text{ev}}(R^+) = \frac{L^2}{2mR^2} = \frac{[m(R/\sqrt{2})v]^2}{2mR^2} = \frac{mv^2}{4}$$

που ισχύει, αυτομάτως, ως συνέπεια του ότι αρχικά κινείται σε ευθεία (λόγω μηδενικής δύναμης έξω από τη σφαίρα) που τέμνει την επιφάνεια της σφαίρας. Από τη διατήρηση της στροφορμής (κεντρικό πεδίο) θα πρέπει να στρίψει μετά την κρούση η τροχιά έτσι ώστε  $L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}}$ , δηλαδή

$$m(R/\sqrt{2})v = mbv_{\text{τελ}}$$



όπου  $b$  η απόσταση της διεύθυνσης της τελικής ταχύτητας από το κέντρο της σφαίρας. Επειδή το πεδίο είναι και συντηρητικό ( $V(r)$ ) θα διατηρείται και το μέτρο της ταχύτητας μετά την κρούση  $v = v_{\text{τελ}}$ , οπότε καταλήγουμε ότι  $b = R/\sqrt{2}$ , με αποτέλεσμα  $\phi = \pi/4$  (βλ. Σχήμα). Όπως φαίνεται και στο σχήμα η τροχιά του σωματιδίου θα στρίψει κατά  $\pi/2$  και θα κινείται μετά την κρούση, ευθύγραμμα και ομαλά με την αρχική ταχύτητα  $v$  (κατά μέτρο).