Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Φυσικής
Χειμερινό εξάμηνο 2024-2025

6η εργασία στη Μηχανική Ι

---

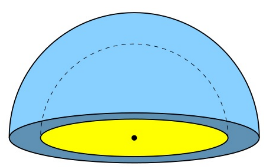
1. Να υπολογιστεί το βαρυτικό πεδίο στο εσωτερικό μιας σφαιρικής κοιλότητας ακτίνας r_1 που βρίσκεται εξολοκλήρου στο εσωτερικό μιας ομογενούς σφαιρικής κατανομής ύλης με ακτίνα $r_2 > r_1$. Υποθέστε ότι η θέση του κέντρου της κοιλότητας σε σχέση με το κέντρο της μεγάλης σφαίρας βρίσκεται σε απόσταση r_0.

---

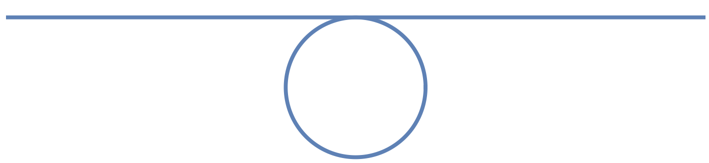
2. Μια ομογενής πλάκα με πυκνότητα ρ έχει πάχος $2L$ και άπειρες τις άλλες δύο διαστάσεις. Θεωρήστε ότι καταλαμβάνει την περιοχή $-L < z < L$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$.
(α) Ποιο είναι το βαρυτικό πεδίο που δημιουργεί;
(β) Ποια είναι η περίοδος των ταλαντώσεων που εκτελούν σώματα στο εσωτερικό της πλάκας υπό την επίδραση του βαρυτικού της πεδίου;

---

3. Έστω ημισφαιρικός ομογενής φλοιός με εσωτερική ακτίνα r_1 και εξωτερική r_2. Ποια η κατεύθυνση της έντασης του βαρυτικού πεδίου στα διάφορα σημεία του ισημερινού του επιπέδου που φαίνονται με κίτρινο στο σχήμα (δηλ. εντός του κύκλου ακτίνας r_1);



4.[1] Έστω το βαρυτικό πεδίο που δημιουργεί ένα φύλλο μάζας απείρων διαστάσεων με επιφανειακή πυκνότητα σ μαζί με ένα ομογενή φλοιό ακτίνας R με επιφανειακή πυκνότητα μάζας επίσης σ, που εφάπτεται στο φύλλο.



(α) Υπάρχουν σημεία στα οποία η ένταση του πεδίου είναι παράλληλη στο φύλλο;
(β) Μια σημειακή μάζα βρίσκεται αρχικά ακίνητη στο πιο απομακρυσμένο σημείο του φλοιού ως προς το φύλλο, δηλ. σε απόσταση $2R$ από το φύλλο. Βρείτε τα άκρα της τροχιάς που θα εκτελέσει.
Θεωρήστε ότι ο φλοιός και το φύλλο δεν προβάλλουν κάποια αντίσταση όταν η μάζα περνά εντός τους.

---

[1] Τα προβλήματα σε έγχρωμο κείμενο είναι αυξημένης δυσκολίας, απαντάτε προαιρετικά.

Λύσεις

1. Το βαρυτικό πεδίο στο εσωτερικό μιας ομογενούς σφαίρας είναι $\vec{g} = -\hat{r}\frac{GM(r)}{r^2} = -\hat{r}\frac{GMr^3}{R^3}\frac{1}{r^2} = -\vec{r}\frac{GM}{R^3}$. Το πεδίο αυτό θα προέκυπτε αν δημιουργούσαμε την επαλληλία του ζητούμενου πεδίου $\vec{g'}$ και αυτό μιας ομογενούς σφαίρας (ίδιας πυκνότητας με τη μεγάλη) που θα γέμιζε την κοιλότητα. Έτσι θα είχαμε (για το εσωτερικό της κοιλότητας)

$$-\vec{r}\frac{GM}{R^3} = \vec{g'} - \vec{r'}\frac{GM}{R^3} \, ,$$

με $\vec{r'}$ το διάνυσμα της θέσης που ζητάμε το πεδίο ως προς το κέντρο της κοιλότητας. Ο συντελεστής $\frac{GM}{R^3}$ στο πεδίο της σφαίρας που θα κάλυπτε την κοιλότητα είναι ο ίδιος με την μεγάλη σφαίρα αφού ισούται με $\frac{4\pi G\rho}{3}$, όπου ρ η πυκνότητα της σφαίρας. Από την τελευταία σχέση βρίσκουμε

$$\vec{g'} = -(\vec{r} - \vec{r'})\frac{4\pi G\rho}{3} = -\vec{a}\frac{4\pi G\rho}{3} \, .$$

όπου $\vec{a}$ η θέση του κέντρου της κοιλότητας ως προς το κέντρο της μεγάλης σφαίρας. Το πεδίο είναι ομογενές στο εσωτερικό της κοιλότητας.

---

2. (α) Λόγω συμμετρίας $\vec{g} = g(z)\hat{z}$ και η συνάρτηση $g(z)$ είναι περιττή. Σε μια γκαουσιανή κυλινδρική επιφάνεια με βάσεις εμβαδού A στα z και $-z$ η ροή του πεδίου είναι $2g(z)A$ και η έγκλειστη μάζα είναι $M_{\varepsilon\gamma\kappa} = \rho A2z$ αν $z < L$ και $\rho A2L$ αν $z > L$. Έτσι εφαρμόζοντας ολοκληρωτικό Gauss $\oiint \vec{g}\cdot d\vec{a} = -4\pi G M_{\varepsilon\gamma\kappa}$ βρίσκουμε

$$\vec{g} = \begin{cases} -4\pi G\rho L\hat{z} \, , z > L \, , \\ -4\pi G\rho z\hat{z} \, , -L < z < L \, , \\ +4\pi G\rho L\hat{z} \, , z < -L \, . \end{cases}$$

Έξω από την πλάκα το πεδίο είναι ίδιο με πεδίο φύλλου μάζας με επιφανειακή πυκνότητα $\sigma = 2L\rho$.

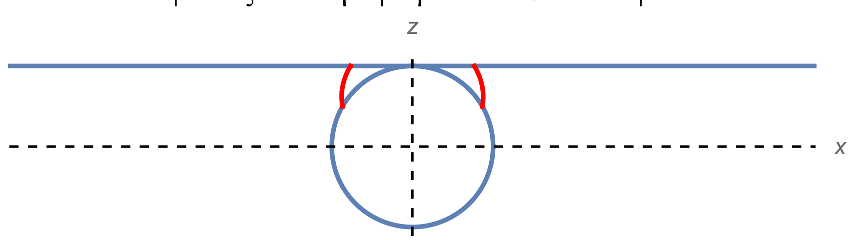
(β) Αν η κίνηση περιορίζεται στο εσωτερικό της πλάκας στην z κατεύθυνση είναι αρμονική ταλάντωση $\ddot{z} = -4\pi G\rho z$, δηλ. $\omega = \sqrt{4\pi G\rho}$ και $T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{\pi}{G\rho}}$. (Στις άλλες δύο κατευθύνσεις η κίνηση είναι ισοταχής.)

---

3. Κάθε λεπτός ημισφαιρικός φλοιός, αν συμπληρωθεί με τον υπόλοιπο ημισφαιρικό φλοιό θα προκαλέσει μηδενικό βαρυτικό πεδίο στο εσωτερικό του. Επομένως δεν μπορεί παρά το πεδίο στο ισημερινό επίπεδο (εντός των χειλών του φλοιού) να είναι κάθετο στο επίπεδο αυτό και με φορά προφανώς προς την πλευρά του επιπέδου που βρίσκεται ο φλοιός. Σε διαφορετική περίπτωση (αν υπήρχε και συνιστώσα παράλληλη με το επίπεδο), η επαλληλία με το υπόλοιπο (κατοπτρικό) ημισφαίριο θα δημιουργούσε ένα πεδίο παράλληλο στο επίπεδο και όχι μηδενικό. Τώρα, η συνισταμένη των βαρυτικών πεδίων πολλών τέτοιων ημισφαιρικών λεπτών φλοιών θα δημιουργούσε και πάλι ένα πεδίο κάθετο στο ισημερινό επίπεδο (από την πρόσθεση των πεδίων των λεπτών ημισφαιρικών φλοιών).

---

4. (α) Έστω σύστημα στο οποίο ο φλοιός είναι η σφαίρα $r = R$ και το φύλλο είναι το επίπεδο $z = R$.

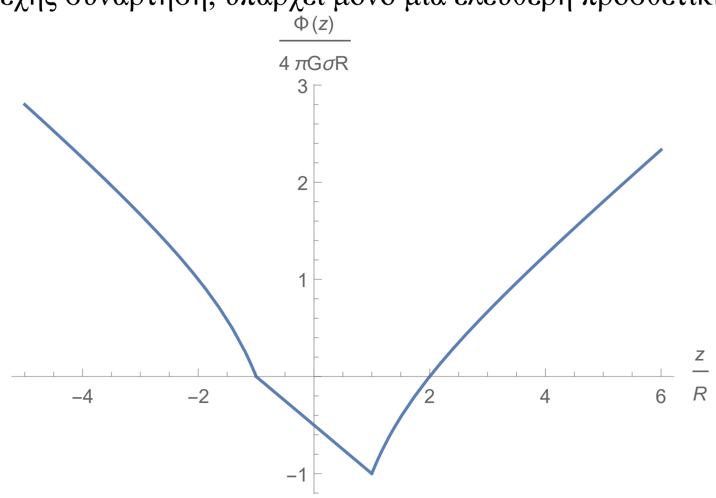


Το πεδίο του φλοιού είναι $\vec{g}_{\varphi\lambda o\iota o\acute{\upsilon}} = -\frac{G4\pi R^2\sigma}{r^2}\hat{r}$ για $r > R$ και μηδέν για $r < R$. Σε καρτεσιανές γράφεται

$\vec{g}_{\text{φλοιού}} = -\dfrac{G4\pi R^2\sigma(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z})}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ για $r > R$.
Το πεδίο του φύλλου είναι $\vec{g}_{\text{φύλλου}} = -2\pi G\sigma\hat{z}$ για $z > R$ και $\vec{g}_{\text{φύλλου}} = +2\pi G\sigma\hat{z}$ για $z < R$.
Για να μηδενίζεται η $\hat{z}$ συνιστώσα του συνολικού πεδίου πρέπει οι $\hat{z}$ συνιστώσες των $\vec{g}_{\text{φλοιού}}$ και $\vec{g}_{\text{φύλλου}}$ να είναι αντίθετες. Αυτό μπορεί να είναι δυνατόν μόνο έξω από το φλοιό, στο χώρο $0 < z < R$. Συγκεκριμένα σε σημεία όπου $g_{\text{φλοιού}}\cos\theta = g_{\text{φύλλου}} \Leftrightarrow r^2 = 2R^2\cos\theta$ σε σφαιρικές, ή ισοδύναμα $(x^2+y^2+z^2)^{3/2} = 2R^2 z$ σε καρτεσιανές.

(β) Πάνω στον άξονα z το πεδίο είναι $\vec{g} = \begin{cases} -\dfrac{G4\pi R^2\sigma}{z^2}\hat{z} - 2\pi G\sigma\hat{z}\,, z > R\,, \\ 2\pi G\sigma\hat{z}\,, -R < z < R\,, \\ +\dfrac{G4\pi R^2\sigma}{z^2}\hat{z} + 2\pi G\sigma\hat{z}\,, z < -R\,. \end{cases}$
(προσθέτοντας τις συνεισφορές από φλοιό και φύλλο).

Το αντίστοιχο δυναμικό είναι $\Phi = -\displaystyle\int \vec{g}\cdot d\vec{r} = \begin{cases} -\dfrac{G4\pi R^2\sigma}{z} + 2\pi G\sigma(z-R)\,, z > R\,, \\ -\dfrac{G4\pi R^2\sigma}{R} - 2\pi G\sigma(z-R)\,, -R < z < R\,, \\ \dfrac{G4\pi R^2\sigma}{z} - 2\pi G\sigma(z-R)\,, z < -R\,. \end{cases}$
(προσέχοντας να είναι συνεχής συνάρτηση, υπάρχει μόνο μία ελεύθερη προσθετική σταθερά).



Για την κίνηση της μάζας το ολοκλήρωμα ενέργειας (ανά μάζα) είναι $\dfrac{v^2}{2} + \Phi = E$ με $E = 0$ από αρχικές συνθήκες. Το σώμα επιταχύνεται προς το φύλλο όσο βρίσκεται σε $-R < z < R$, περνά στην περιοχή $z > R$ όπου επιβραδύνεται και σταματά στο σημείο όπου $\Phi(z) = E \Leftrightarrow z^2 - Rz - 2R^2 = 0 \Leftrightarrow z = 2R$.
Στην επιστροφή το σώμα θα φτάσει μέχρι το αρχικό σημείο και θα εκτελεί ταλάντωση μεταξύ $-R \le z \le 2R$.