

Ασκήσεις στη δεσμευμένη πιθανότητα, τις διακριτές τυχαίες μεταβλητές και τις διακριτές κατανομές Bernoulli, Διωνυμική και Γεωμετρική.

93. Το δοχείο I περιέχει 3 κόκκινες και 2 μπλε σφαίρες, ενώ το δοχείο II περιέχει 2 κόκκινες και 8 μπλε σφαίρες. Για να επιλέξει κάποιος από ποιο δοχείο θα επιλέξει σφαίρα, ρίχνει ένα νόμισμα και αν είναι κορώνα (Κ) τότε επιλέγει από το δοχείο I, αλλιώς από το δοχείο II. Έστω ότι κάποιος ρίχνει ένα νόμισμα και χωρίς να αποκαλύψει το αποτέλεσμα του, επιλέγει από ένα από τα δύο δοχεία μια σφαίρα και αποκαλύπτει ότι είναι κόκκινη. Ποια η πιθανότητα να έχει έρθει κορώνα;
94. Μια ειδική εξέταση για ένα συγκεκριμένο είδος πάθησης έχει ακρίβεια 95% είτε το αποτέλεσμα του τεστ είναι θετικό και ο άτομο που το κάνει είναι ασθενής είτε είναι αρνητικό και το άτομο που κάνει το τεστ είναι υγιής. Ένα άτομο υποβάλλεται στην εξέταση και το αποτέλεσμα είναι θετικό. Το άτομο αυτό προέρχεται από πληθυσμό 100.000 ατόμων, 2.000 εκ των οποίων υποφέρουν από τη νόσο. Ποια η πιθανότητα να υποφέρει από την πάθηση δεδομένου ότι η εξέταση είχε θετικό αποτέλεσμα;
95. Η πιθανότητα πάθησης σε έναν πληθυσμό είναι 1 στους 1000. Ένα άτομο υποβάλλονται στο τεστ για να ελέγξει αν έχει την πάθηση. Αν κάποιος έχει την ασθένεια τότε το τεστ θα βγει θετικό 99 στις 100 φορές ενώ αν είναι υγιής τότε θα βγει ψευδώς θετικό 2 στις 100 φορές. Ποια η πιθανότητα το τεστ να είναι θετικό και το άτομο να νοσεί και ποια η πιθανότητα το τεστ να είναι θετικό και το άτομο να μη νοσεί;
96. Από 5.000 μηνύματα που φθάνουν σε ένα ηλεκτρονικό ταχυδρομείο τα 3.000 είναι ανεπιθύμητα. Σε 50 από τα 2000 μηνύματα τα οποία δεν είναι ανεπιθύμητα εμφανίζεται η λέξη X, ενώ εντοπίστηκε και σε 300 από τα ανεπιθύμητα μηνύματα. Ποια η πιθανότητα ένα μήνυμα το οποίο περιέχει την λέξη X να είναι ανεπιθύμητο;
97. Σε μια δίκη για φόνο ένας άνθρωπος κατηγορείται με αποδεικτικό στοιχείο την ταύτιση γενετικού υλικού που βρέθηκε στο χώρο του εγκλήματος. Υπάρχουν επιστημονικά δεδομένα που εκτιμούν ότι η πιθανότητα εσφαλμένης ταύτισης ενός αθώου ατόμου μέσω του τεστ του γενετικού υλικού είναι $1/1000$, ενώ η πιθανότητα ταύτισης μέσω του τεστ του γενετικού υλικού για κάποιον που είναι ένοχος είναι $99/100$. Ο κατηγορος ζητά την καταδίκη του κατηγορούμενου δεδομένου ότι $99/100$ των περιπτώσεων ενοχής το τεστ του γενετικού υλικού είναι θετικό. Δεδομένου ότι υπάρχουν 10.000 πολίτες στην πόλη να

βρεθεί πιθανότητα αν υπάρχει ταύτιση του γενετικού υλικού ο κατηγορούμενος να είναι πράγματι ένοχος.

98. Έστω η παρακάτω αθροιστική συνάρτηση κατανομής. Να υπολογιστούν i) $P(\mathbf{X}=2)$, ii) $P(\mathbf{X}<2)$, iii) $P(1 \leq \mathbf{X} \leq 3)$, iv) $P(-2 \leq \mathbf{X} \leq 0)$.

$$F_{\mathbf{X}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < -2 \\ 0.20, & \text{αν } -2 \leq x < -1 \\ 0.45, & \text{αν } -1 \leq x < 0 \\ 0.60, & \text{αν } 0 \leq x < 2 \\ 0.90, & \text{αν } 2 \leq x < 3 \\ 1, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$$

99. Γίνεται ρίψη ενός ζαριού. Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή της μεταβλητής \mathbf{X} της ένδειξης της ρίψης;

100. Έστω η συνάρτηση πιθανότητας $P(\mathbf{X}=x) = c \cdot x^2$ ($x = 1, 2, 3$) μιας διακριτής μεταβλητής \mathbf{X} .

- i. Να υπολογισθεί το c .
- ii. Να υπολογισθεί το $P(\mathbf{X}=3)$.
- iii. Να υπολογιστεί η μέση τιμή.

101. Έστω τυχαία μεταβλητή \mathbf{X} με συνάρτηση πιθανότητας $P(\mathbf{X}=x_i)$ με $i = 1, 2, 3, 4$ όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x_i	0	1	2	3
$P(\mathbf{X}=x_i)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - 1$. Να υπολογιστεί η μέση τιμή της συνάρτησης.

102. Να αποδειχθούν οι ιδιότητες: i) $\text{Var}(\mathbf{X}) = E(\mathbf{X}^2) - E^2(\mathbf{X}) = E(\mathbf{X}^2) - \mu^2$ και ii) $\text{Var}(a\mathbf{X}+\beta) = a^2 \cdot \text{Var}(\mathbf{X})$

103. Να δείχθεί ότι η μέση τιμή της ομοιόμορφης κατανομής είναι $E(\mathbf{X}) = \frac{v+1}{2}$ και η διασπορά είναι $\text{Var}(\mathbf{X}) = \frac{v^2-1}{12}$.

104. Γίνεται η ρίψη ενός ζαριού. i) Να βρεθούν και να σχεδιαστούν η συνάρτηση πιθανότητας και η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας. ii) Να βρεθεί η μέση τιμή και η διακύμανση.

105. Ένα εργοστάσιο παράγει ένα προϊόν και υπάρχει πιθανότητα 0.261 να είναι ελαττωματικό. Τα προϊόντα συσκευάζονται σε πακέτα των 20.
- Τι αντιπροσωπεύει η επιλογή και ο έλεγχος καθενός προϊόντος;
 - Τι κατανομή ακολουθούν ελαττωματικά προϊόντα σε κάθε πακέτο;
 - Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων σε κάθε ένα από τα πακέτα;
 - Ποια η διασπορά και ποια η τυπική απόκλιση της παραπάνω τιμής; Ποια η πιθανότητα να περιέχει το πακέτο 7 ελαττωματικά προϊόντα;
 - Ποια η πιθανότητα ένα πακέτο να μην περιέχει περισσότερα από 3 ελαττωματικά προϊόντα;
 - Ποια η πιθανότητα το πακέτο να περιέχει τουλάχιστον 2 ελαττωματικά προϊόντα;
106. Κάθε δείγμα από το νερό ενός συγκεκριμένου ποταμού έχει 10% πιθανότητα να είναι μολυσμένο.
- Ποια είναι η πιθανότητα αν ληφθούν 18 δείγματα τα 2 να είναι μολυσμένα;
 - Ποια είναι η πιθανότητα αν ληφθούν 18 δείγματα τουλάχιστον τα 4 δείγματα να είναι μολυσμένα;
 - Ποια είναι η πιθανότητα αν ληφθούν 18 δείγματα να βρεθούν τουλάχιστον 4 μολυσμένα δείγματα αλλά όχι περισσότερα από 6;
107. Ρίχνουμε ένα κέρμα 4 φορές. Το νόμισμα δεν είναι δίκαιο και έχει πιθανότητα να έρθει κορώνα 0.6. Ποια η πιθανότητα:
- Να έρθουν 3 κορώνες;
 - Να έρθει τουλάχιστον μία κορώνα;
 - Να έρθουν το πολύ 2 κορώνες;
 - Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός κορωνών;
108. Να δειχθεί ότι $P(\mathbf{X} > x + y \mid \mathbf{X} > y) = P(\mathbf{X} > x)$.
109. Μια εταιρία κατασκευάζει υπολογιστές και κάθε 100 υπολογιστές ένας είναι ελαττωματικός. Ποια η πιθανότητα εξετάζοντας διαδοχικά τους υπολογιστές ο 5^{ος} που θα ελεγχθεί να είναι ελαττωματικός;

110. Ρίχνουμε ένα νόμισμα.

- i) Ποια η πιθανότητα να έρθουν γράμματα για πρώτη φορά στην 4^η ρίψη;
- ii) Πόσες ρίψεις χρειάζονται κατά μέσο όρο ώστε να έρθουν γράμματα για πρώτη φορά και ποια η διασπορά της τιμής αυτής;
- iii) Ποια η πιθανότητα να χρειαστούν τουλάχιστον 3 ρίψεις για να έρθουν γράμματα για πρώτη φορά; Ποια η πιθανότητα να χρειαστούν περισσότερες από 6 ρίψεις δεδομένου ότι χρειάστηκαν ήδη πάνω από 4 ρίψεις για να έρθει πρώτη φορά γράμματα;
- iv) Ποιος είναι ο αριθμός ρίψεων με τη μεγαλύτερη πιθανότητα ώστε να έρθει για πρώτη φορά γράμματα;

Βιβλιογραφία-Αναφορές

1. *S. Ross. Βασικές αρχές θεωρίας πιθανοτήτων. Εκδόσεις Κλειδάριθμος.*
2. *Γ. Κοντογιάννης, Σ. Τουμπής (2015) - Στοιχεία πιθανοτήτων.*
3. *Hoel, Port, Stone. Εισαγωγή στη θεωρία πιθανοτήτων. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.*
4. *Χ. Δαμιανού, Ν. Παπαδάτος, Χ. Χαραλαμπίδης - Εισαγωγή στις Πιθανότητες και τη Στατιστική.*
5. *Μπερτσεκά, Δ. και Τσιτσικλή, Γ. Εισαγωγή στις Πιθανότητες. Εκδόσεις Τζιόλα.*
6. *ΠΑΠΟΥΛΗΣ, PILLAI - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ.*
7. *Χ. Χαραλαμπίδης. Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές. Εκδόσεις Συμμετρία.*
8. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Probability and Statistic.*
9. *Ο. Χρυσ αφινού, Α. Μπουρνέτας, Ε. Βαγγελάτου – Σημειώσεις Πιθανοτήτων – Στατιστικής.*
10. *Κούτρα, Μ. Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές. Εκδόσεις Σταμουλής.*