

Τμήμα Φυσικής
Μάθημα: Θεωρία Πιθανοτήτων
Περίοδος: Φεβρουάριος 2022

Θέμα 1.[20 μον]: Σε μια τάξη 21 ατόμων, τα 10 είναι αγόρια και τα 11 κορίτσια.

(α) Πρόκειται να επιλεγούν στην τύχη 5 άτομα από την τάξη για να παρακολουθήσουν ένα θερινό σχολείο Φυσικής. Ποια είναι η πιθανότητα και τα 5 άτομα να είναι κορίτσια;

(β) Πρόκειται να επιλεγούν στην τύχη 5 άτομα για τους ρόλους πρόεδρος, γραμματέας, ταμίας, υπεύθυνος τύπου, υπεύθυνος εργαστηρίου υπολογιστών. Ποια η πιθανότητα ο πρόεδρος και ο ταμίας να είναι κορίτσι ενώ οι υπόλοιποι τρεις ρόλοι να καταληφθούν από αγόρια;

(γ) Πρόκειται να επιλεγούν στην τύχη 5 άτομα. Ένα θα πάρει 1000 ευρώ, άλλο 500 ευρώ, ενώ τα υπόλοιπα τρία θα πάρουν από 300 ευρώ το καθένα. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να γίνει η κατανομή αυτών των 5 ποσών με βάση αυτούς τους όρους;

Θέμα 2.[20 μον]: Ένας φίλος μας κάνει το εξής πείραμα. Ρίχνει ένα αμερόληπτο νόμισμα. Αν το νόμισμα έρθει «Κεφαλή», ρίχνει δύο αμερόληπτα ζάρια. Αν έρθει «Γράμματα», ρίχνει τρία αμερόληπτα ζάρια. Έστω S το άθροισμα των ενδείξεων όσων ζαριών ρίξει (δύο ή τριών).

(α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(S = 3)$.

(β) Αν, από όλη τη διαδικασία, μας ανακοινώνεται μόνο ότι προέκυψε $S = 3$, να υπολογιστεί η πιθανότητα το νόμισμα να έφερε «Γράμματα».

Θέμα 3.[25 μον] Έστω διδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή (τμ) (X, Y) με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σππ)

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} cx^2y & \text{αν } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Να υπολογιστεί η σταθερά c .

(β) Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ των τμ X και Y . Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

(γ) Να υπολογιστεί η $E(X)$.

Θέμα 4.[25 μον] Ένα εργοστάσιο παράγει λαμπτήρες η διάρκεια ζωής καθενός εκ των οποίων (σε ώρες λειτουργίας) είναι μια τυχαία μεταβλητή, έστω X , που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 1000$.

(α) Να δοθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X και να υπολογιστεί η συνάρτηση κατανομής της.

(β) Ποια η πιθανότητα μια λάμπα να ζήσει περισσότερο από 100 ώρες;

(γ) Ποια η πιθανότητα μια λάμπα να ζήσει περισσότερο από 150 ώρες δεδομένου ότι λειτουργεί ήδη για 120 ώρες;

(δ) Ποια η πιθανότητα μια λάμπα να ζήσει μεταξύ 350 και 450 ωρών;

(ε) Επιλέγουμε 5 λάμπες από την παραγωγή. Ποια η πιθανότητα τουλάχιστον 4 λάμπες να ζήσουν τουλάχιστον 100 ώρες; Θεωρούμε ότι οι διάρκειες ζωής διαφορετικών λαμπών είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Θέμα 5.[20 μον] Η τυχαία μεταβλητή X έχει μέση τιμή 20 και διασπορά 5, ενώ η τυχαία μεταβλητή Y έχει μέση τιμή 30 και διασπορά 10. Επιπλέον, έχουμε $\rho(X, Y) = -0.8$.

(α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της τ.μ. $X + Y$.

(β) Να υπολογίσετε τον $\rho(X - 2Y + 3, 3X + Y - 1)$.

Οι απαντήσεις να είναι πλήρως αιτιολογημένες
Άριστα είναι το 100