Ένας συνδυασμός με επανάληψη των

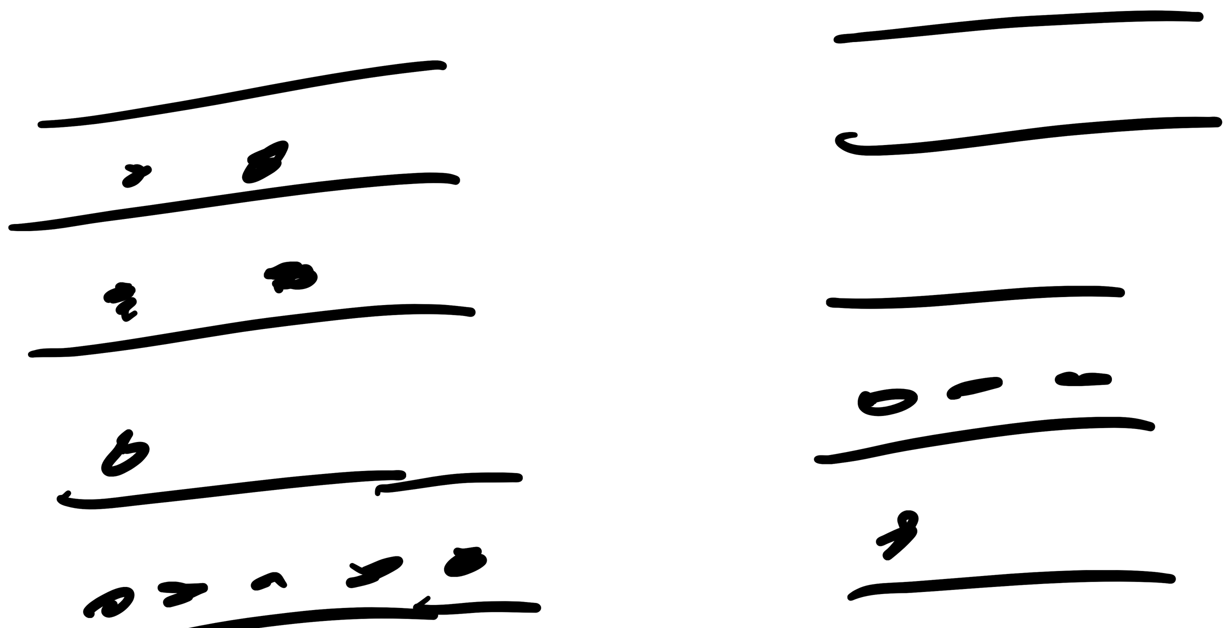
{Α, Β, Γ, , Ω} $n=24$

ανά 6 είναι ο εξής $k=6$

{Α, Λ, Ρ, Σ, Α, Τ}

= {Α, Α, Λ, Ρ, Σ, Τ}

<u>Άσκηση</u> Σε βιβλιοθήκη με 5 ράφια τοποθετούμε 10 βιβλία. Πόσοι οι διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης αν το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι πόσα βιβλία έχει κάθε ράφι. Κάθε ράφι μπορεί να έχει από 0 ως 10 βιβλία.



Λύση

$n=10$

$k=5$

n^k

$(n)_k$

$\binom{n}{k}$ ( )

5 5 5 5^{10}

1 5 2

$\frac{10!}{10!} = 1$ $11!$

P1 P2 P3 P4 P5

1, 2, 10 11, 3, 4, 9, 8, 7, 5, 6

$n = 5$

$k = 10$

$\{P1, P3, P1, \ldots, P3\}$

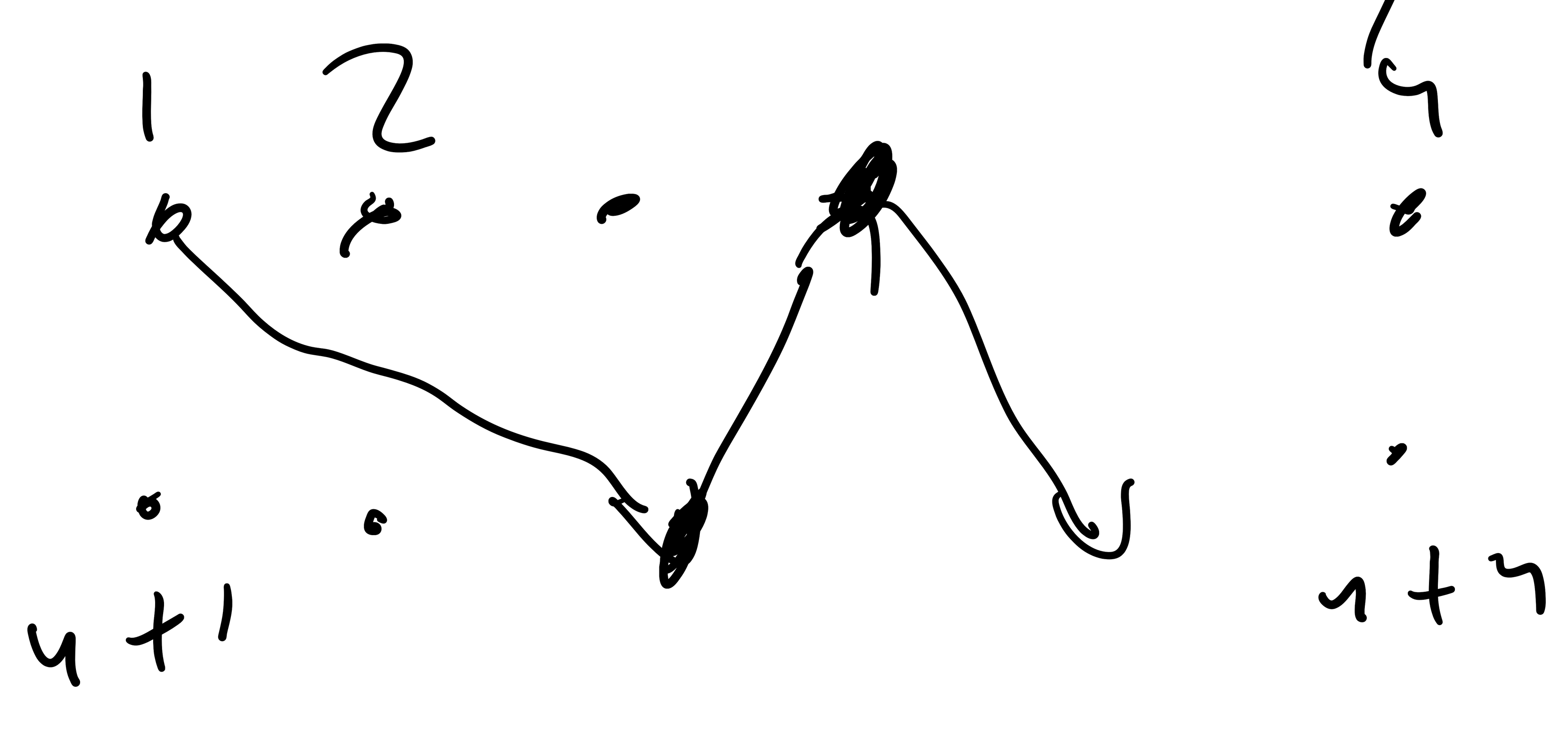
λίστα 10 συμβόλων

από τα P1, ..., P5

$$\left[\begin{matrix} 5 \\ 10 \end{matrix} \right\} = \binom{5+10-1}{10} = \binom{14}{10}$$

Θέμα 1. [15 Βαθμοί] Σε μιά πόλη $2n$ κατοίκων $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, οι $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι άνδρες (έχουν πλήθος n) και οι υπόλοιποι n είναι γυναίκες. Ο a_1 επιλέγει τυχαία μία γυναίκα από τις n και της λέει μια φημολογία. Έπειτα εκείνη επιλέγει τυχαία έναν άνδρα από τους n και κάνει το ίδιο, και η διαδικασία συνεχίζεται όμοια. Δηλαδή κάθε άτομο επιλέγει στην τύχη ένα άτομο του αντίθετου φύλου και του λέει την φημολογία. Να βρεθεί η πιθανότητα η φημολογία να ειπωθεί $2k+1$ φορές χωρίς να ακουστεί ξανά από κάποιο άτομο που την έχει μεταφέρει σε κάποιο προηγούμενο βήμα. Υποθέτουμε ότι $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

λύση



~~$2(n-1)+1$~~

~~$= 2n-1$~~

$$q_1 = M_1 \to M_2 \to M_3 \to \qquad \to M_{2k+2}$$

$$(M_2, M_3, \qquad , M_{2k+2}) \leftarrow 2k+1 \text{ άτομα}$$

δυνατών περιπτώσεων

$$= n \cdot n \cdots n = n^{2k+1}$$

ευνοϊκών $= n(n-1)(n-1)(n-2)(n-2)$

A Γ A Γ A

$$\cdots (n-k)(n-k) = n\,(n-1)_k\,(n-1)_k$$

A

$$P = \frac{n\left((n-1)_k\right)^2}{n^{2k+1}} = \frac{\left((n-1)_k\right)^2}{n^{2k}}$$

Θέμα 2. [20 Βαθμοί] Μία κάλπη περιέχει 100 νομίσματα. Από αυτά, τα 50 φέρνουν "Γράμματα" με πιθανότητα 1/2, τα 30 με πιθανότητα 1/6, και τα υπόλοιπα 20 με πιθανότητα 1/5. Επιλέγουμε ένα νόμισμα από αυτά στην τύχη και το ρίχνουμε. Ποιά η πιθανότητα να φέρει "Γράμματα";

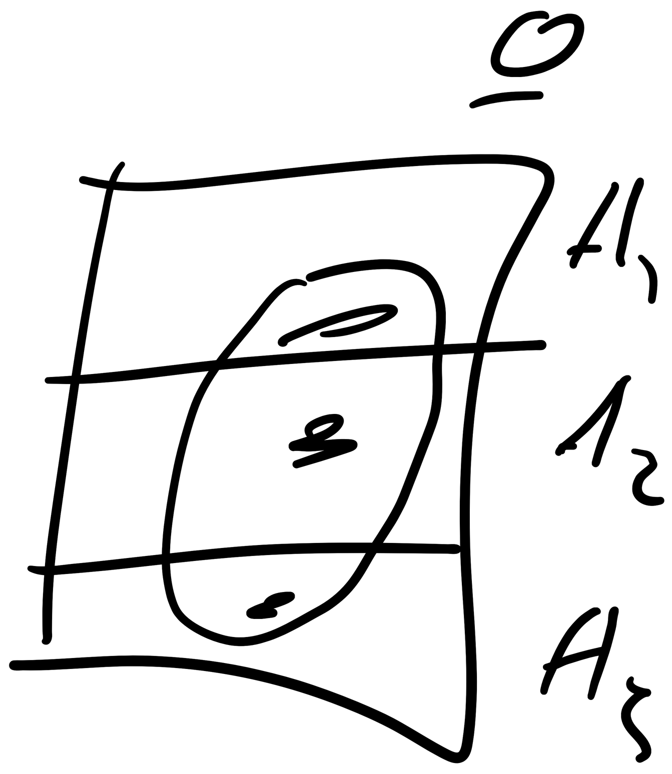
N_1, N_2, N_3

Λύση

$A_i = \{$ επιλέγω νόμισμα είδους $i \}$

$i = 1, 2, 3$

$p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = \frac{1}{6} \quad p_3 = \frac{1}{5}$



$B = \{$ έρχονται "Γράμματα" $\}$

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)$$

$$= P(A_1) P(B|A_1) + P(A_2) P(B|A_2) + P(A_3) P(B|A_3)$$

$$= \frac{50}{100} \frac{1}{2} + \frac{30}{100} \cdot \frac{1}{6} + \frac{20}{100} \frac{1}{5}$$

$$\underline{\Omega} = \{1, 2, \quad , 100\} \times \{K, \Gamma\}$$

$\uparrow$

$$\underline{\tilde{\Omega}} = \{N_1, N_2, N_3\} \times \{K, \Gamma\}$$

<u>Ερώτημα</u> δεδομένου ότι ήρθαν Γράμματα

ποια η πιθ. να είχαμε επιλέξει νόμισμα

Λύση 3.

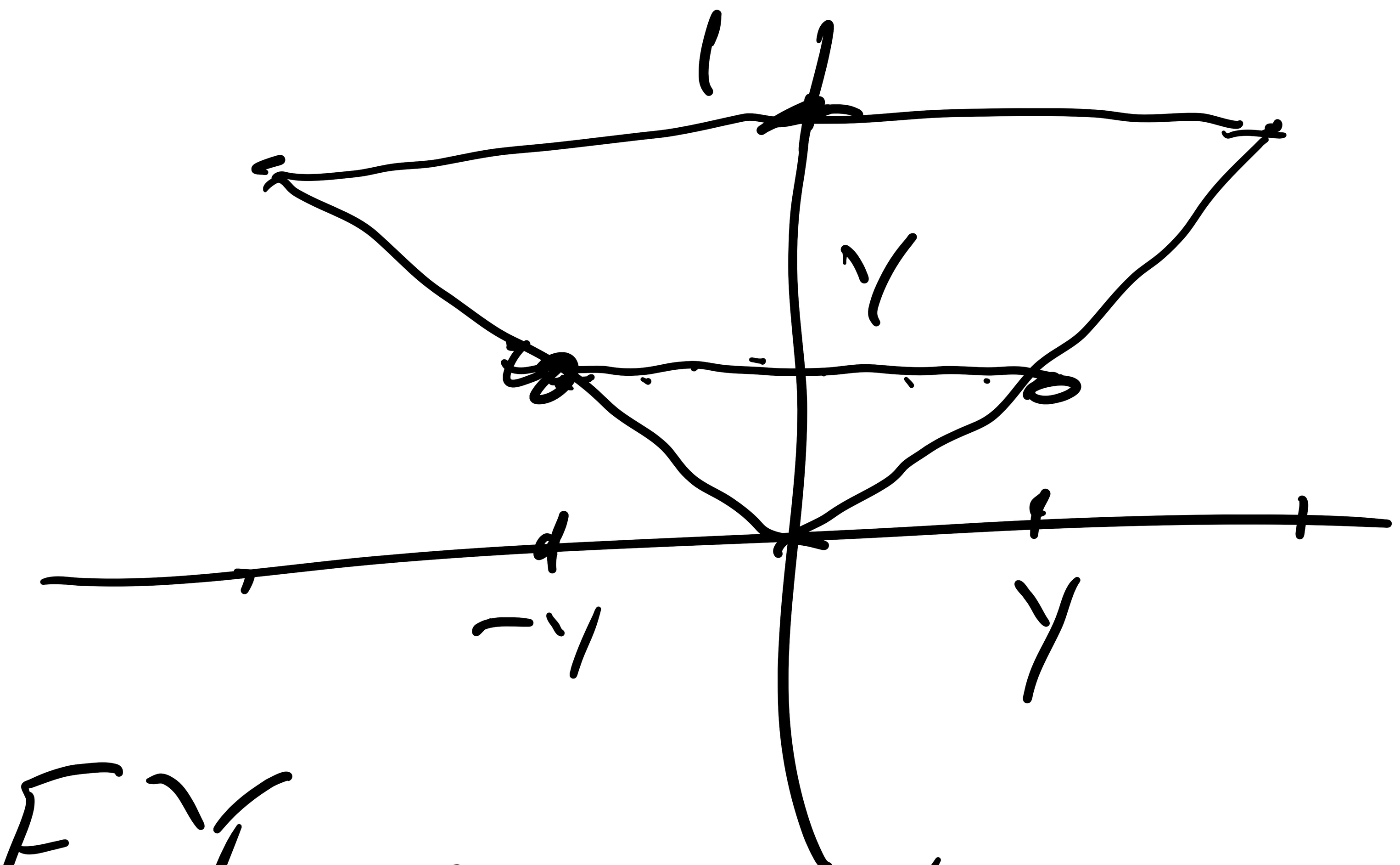
$$P(A_3 \mid B) = \frac{P(A_3 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_3)P(B \mid A_3)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{20}{500} \cdot \frac{1}{5}}{\ldots} = .$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } |x| \leq y < 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

X, Y ασυσχ. αλλά όχι ανεξάρτητες

(x, y)
$|x| \leq y$



$$E(XY) = EX\,EY \iff cov(X,Y) = 0$$

$$E(h(X,Y)) = \iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y) f(x,y)\,dx\,dy$$

$$EX = \iint x f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{-y}^{y} x \cdot 1\,dx\,dy$$

$= 0$

$$EY = \int_0^1 \int_{-y}^{y} y \cdot 1 \, dx \, dy = \int_0^1 y \, 2y \, dy$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$E(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy \, f(x,y) \, dx\, dy =$$

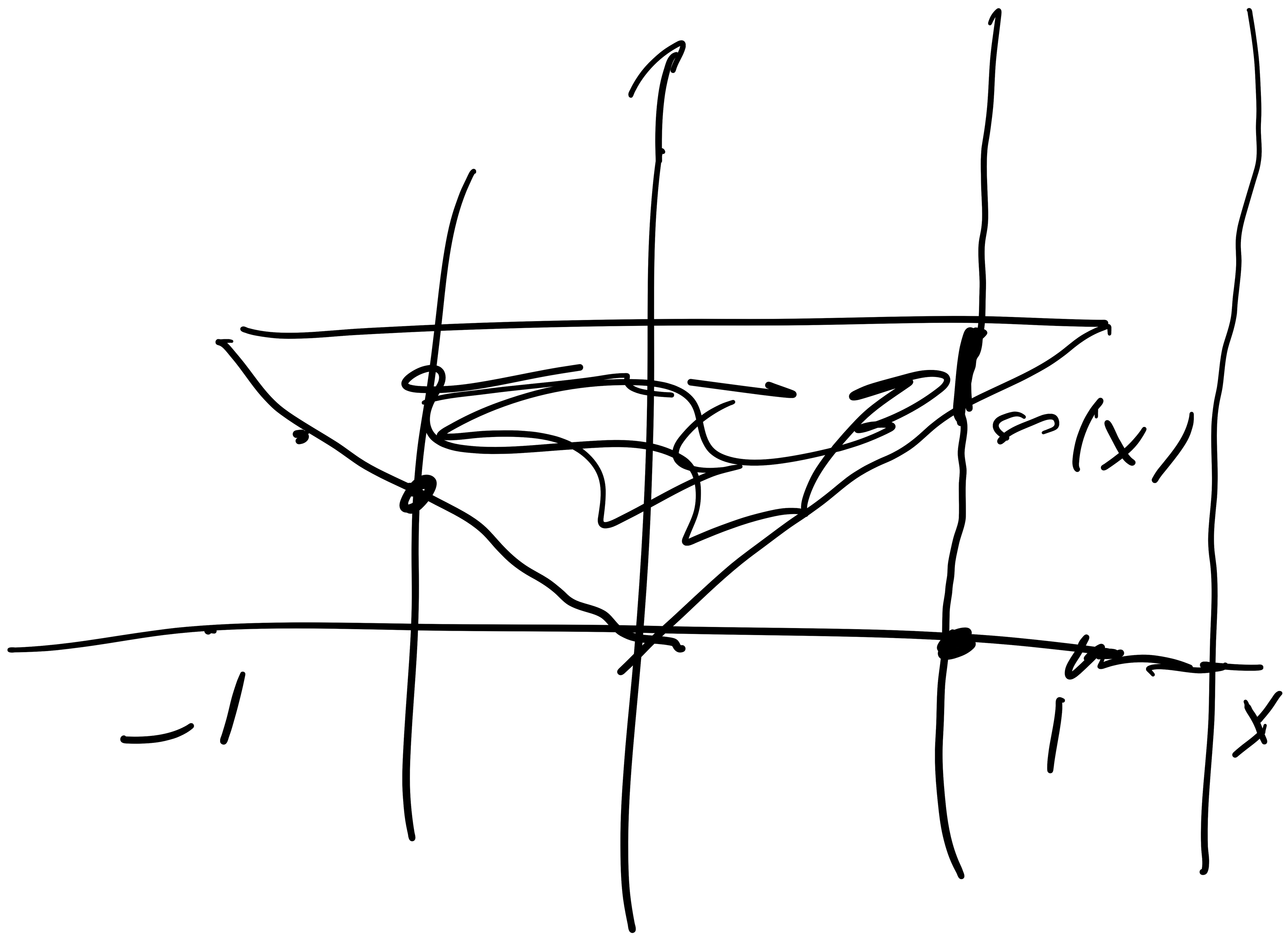
$$= \int_0^1 \int_{-y}^{y} xy \cdot 1 \, dx \, dy = \int_0^1 y \underbrace{\int_{-y}^{y} x \, dx}_{=0} \, dy$$

$$= 0$$

$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \Leftarrow X, Y$ unabhängig

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy$$

$= 0$ für $x \notin (-1,1)$

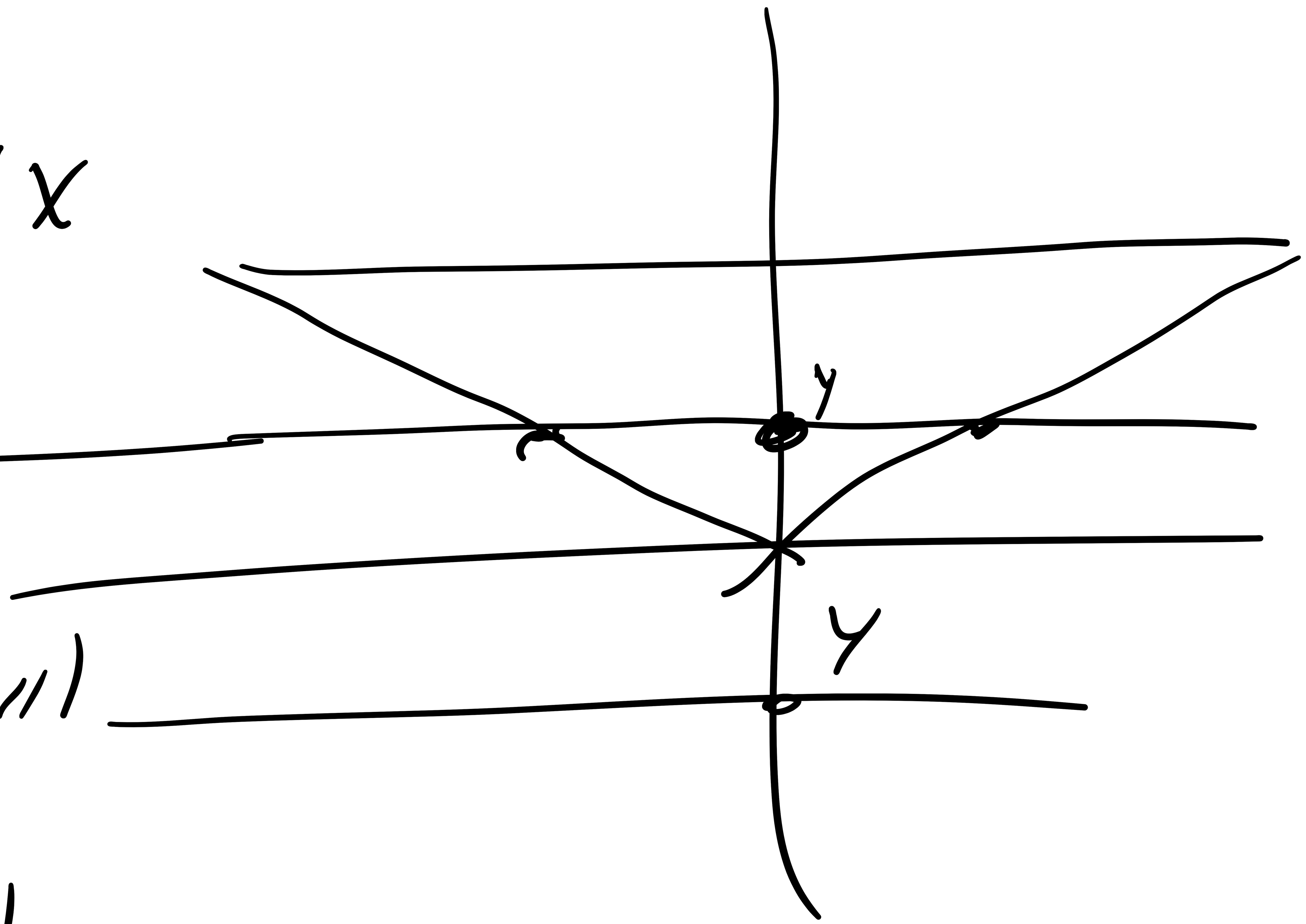


Für alle $x \in (-1,1)$

$$f_X(x) = \int_{|x|}^{1} 1 \, dy = 1 - |x|$$

Άρα $f_X(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{αν } |x|<1 \\ 0 & \text{αν } |x|\geq 1 \end{cases}$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$



$f_Y(y) = 0$ αν $y \notin (0,1)$

ενώ αν $y \in (0,1)$

$$f_Y(y) = \int_{-y}^{y} 1\,dx = 2y$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y & \text{αν } y \in (0,1) \\ 0 & \text{αν } y \notin (0,1) \end{cases}$$

$$f(x,y) = 1 \neq 2y\cdot(1-|x|) = f_X(x) f_Y(y)$$

αν (x,y) είναι στο τρίγωνο. (δηλ.

$|x| < y < 1$

$$\int_0^1 \int_0^1 cxy$$