

Διόδια Αττικής Οδού

Η προβληματική του σεναρίου

Οι σύγχρονοι άνθρωποι βρίσκονται συχνά στην ανάγκη να αποφασίσουν σχετικά με το ποια μπορεί να είναι η συμφέρουσα για τους ίδιους προσφορά σε διάφορες κοινωνικο-οικονομικές δραστηριότητες της καθημερινής ζωής όπως για παράδειγμα οι προσφορές αγορών σε καταστήματα, τα πακέτων διακοπών ή οι μηνιαίες δόσεις αγορών. Συνήθως οι προσφορές αυτές σχετίζονται με παραμέτρους όπως το συνολικό ύψος των αγορών, το ύψος του επιτοκίου, ο αριθμός των συμμετεχόντων σε ένα ταξίδι ή η χρονική του διάρκεια. Έτσι, ο ενδιαφερόμενος καλείται να μαθηματικοποιήσει τις αντίστοιχες πληροφορίες, να τις επεξεργαστεί και να επιλέξει τη συμφέρουσα με βάση συγκεκριμένους – προσωπικούς ή συλλογικούς- περιορισμούς, ανάγκες ή περιστάσεις. Καθώς ένα πλήθος μαθηματικών εννοιών διέπει τις σχετικές δραστηριότητες η προβληματική του παρόντος σεναρίου εκκινεί από τη παιδαγωγική τους αξιοποίηση στο πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών με τη χρήση ειδικά σχεδιασμένων υπολογιστικών εργαλείων.

Το προτεινόμενο σενάριο έχει σκοπό να εμπλέξει τους μαθητές σε διερευνητικές δραστηριότητες μαθηματικής επεξεργασίας του προβλήματος της επιλογής κατάλληλου προγράμματος συνδρομής σχετικά με τη διέλευση από τα διόδια της Αττικής Οδού με βάση το είδος του οχήματος και τον αριθμό των διελύσεων ανά μήνα. Η εφαρμογή του σεναρίου και γενικότερα η επεξεργασία του από τους μαθητές θα βασιστεί στα πραγματικά δεδομένα που αφορούν τα προσφερόμενα πακέτα συνδρομής όπως προσφέρονται από την ιστοσελίδα της Αττικής Οδού (<http://www.aodos.gr>).

Το πρόβλημα

Η Αττική Οδός προσφέρει τα τελευταία χρόνια τη δυνατότητα πληρωμής διοδίων με ηλεκτρονικά μέσα (πέραν της πληρωμής με μετρητά) με δύο τρόπους: (α) με πομποδέκτη e-PASS που τοποθετείται στο παρμπρίζ του οχήματος επιτρέποντας τη διέλευση από τις αποκλειστικές ηλεκτρονικές λωρίδες διοδίων, την αναγνώρισή του από το σύστημα διοδίων και την αυτόματη ενεργοποίηση της διαδικασίας ηλεκτρονικής συναλλαγής. (β) με Ειδική Κάρτα Λογαριασμού, μέσω της οποίας οι κάτοχοι μοτοσυκλέτας, φορτηγού οχήματος ή λεωφορείου μπορούν να πληρώνουν τα διόδια απλά επιδεικνύοντας την κάρτα σε κάποιον από τους εισπράκτορες διοδίων αποφεύγοντας τη συναλλαγή με μετρητά. Και οι δύο δυνατότητες εξόφλησης, πέρα από το κέρδος του χρόνου κατά τη συναλλαγή, συνοδεύονται από προσφορές εκπτώσεων πακέτων συνδρομής με βάση το είδος του οχήματος και τον αριθμό των μηνιαίων διελύσεων. Κάθε διέλευση που εξοφλείται μετρητοίς κοστίζει 2.70 ευρώ για τα επιβατικά και ελαφρά εμπορικά οχήματα, 1.30 ευρώ για τα δίκυκλα, 6.70 ευρώ για τα λεωφορεία και τα φορτηγά και 10.80 ευρώ για τα μεγαλύτερα οχήματα (νταλίκες κ.λπ). Ενδεικτικά, αναφέρουμε τα τρία προσφερόμενα προγράμματα συνδρομής για τα επιβατικά αυτοκίνητα και το μοναδικό για τα δίκυκλα.

1. Το Express, παρέχει που παρέχει σταθερή έκπτωση από την πρώτη κιόλας διέλευση, ανεξάρτητα από τον αριθμό των διελύσεων που πραγματοποιούνται από το συνδρομητή και το χρόνο πραγματοποίησής τους. Κάθε διέλευση κοστίζει 2.35 ευρώ.





2. Το Bonus, παρέχει την 31^η έως και την 45^η διέλευση, μέσα σε ένα ημερολογιακό μήνα, δωρεάν. Όλες οι υπόλοιπες κοστίζουν 2.70 ευρώ η καθεμιά.

3. Το Friendly, παρέχει αυξανόμενη κλιμακωτή έκπτωση ανάλογα με τον αριθμό των διελύσεων σε μηνιαία βάση με σταθερό πάγιο συσκευής e-pass 3.54 ευρώ. Πιο συγκεκριμένα: οι 30 πρώτες διελύσεις κοστίζουν 2.35 ευρώ η καθεμιά, οι επόμενες 20 διελύσεις (31η έως και 50^η) κοστίζουν 2 ευρώ η καθεμιά ενώ πέραν των 50 διελύσεων το κόστος είναι 1.70 ευρώ για κάθε διέλευση.

4. Το Moto, αφορά τα δίκυκλα και παρέχει σταθερή έκπτωση από την πρώτη κιόλας διέλευση, ανεξάρτητα από τον αριθμό των διελύσεων που πραγματοποιούνται από το συνδρομητή και το χρόνο πραγματοποίησής τους. Κάθε διέλευση κοστίζει 1.10 ευρώ.

Το πρόβλημα αφορά την επιλογή του συμφερότερου πακέτου συνδρομής για κατόχους διαφορετικών οχημάτων με βάση τον αριθμό των μηνιαίων διελύσεων τους από τα διόδια της Αττικής Οδού.

Στην ακόλουθη εικόνα φαίνεται η περιγραφή του κόστους ανά κατηγορία οχήματος και αριθμό διελύσεων (ανά 5 μέρες) για σύνολο 85 διελύσεων (βλ. <http://www.aodos.gr/article.asp?catid=9880>).

Κατ. Οχήμ.	1		2, 3, 4				5			6		
Αριθμός Μηνιαίων Διελεύσεων												
	Μετρ.	Moto	Μετρ.	Express	Bonus	Friendly	Μετρ.	Friendly	Express Truck	Μετρ.	Friendly	Express Truck
1	1,30	1,10	2,70	2,35	2,70	5,89	6,70	9,37	5,83	10,80	12,94	9,40
5	6,50	5,50	13,50	11,75	13,50	15,29	33,50	32,69	29,15	54,00	50,54	47,00
10	13,00	11,00	27,00	23,50	27,00	27,04	67,00	61,84	58,30	108,00	97,54	94,00
15	19,50	16,50	40,50	35,25	40,50	38,79	100,50	90,99	87,45	162,00	144,54	141,00
20	26,00	22,00	54,00	47,00	54,00	50,54	134,00	120,14	116,60	216,00	191,54	188,00
25	32,50	27,50	67,50	58,75	67,50	62,29	167,50	149,29	145,75	270,00	238,54	235,00
30	39,00	33,00	81,00	70,50	81,00	74,04	201,00	178,44	174,90	324,00	285,54	282,00
35	45,50	38,50	94,50	82,25	94,50	84,04	234,50	203,24	204,05	378,00	325,54	329,00
40	52,00	44,00	108,00	94,00	108,00	94,04	268,00	228,04	233,20	432,00	365,54	376,00
45	58,50	49,50	121,50	105,75	121,50	104,04	301,50	252,84	262,35	486,00	405,54	423,00
50	65,00	55,00	135,00	117,50	135,00	114,04	335,00	277,64	291,50	540,00	445,54	470,00
55	71,50	60,50	148,50	129,25	148,50	122,54	368,50	298,74	320,65	594,00	479,54	517,00
60	78,00	66,00	162,00	141,00	162,00	131,04	402,00	319,84	349,80	648,00	513,54	564,00
65	84,50	71,50	175,50	152,75	175,50	139,54	435,50	340,94	378,95	702,00	547,54	611,00
70	91,00	77,00	189,00	164,50	189,00	148,04	469,00	362,04	408,10	756,00	581,54	658,00
75	97,50	82,50	202,50	176,25	202,50	156,54	502,50	383,14	437,25	810,00	615,54	705,00
80	104,00	88,00	216,00	188,00	216,00	165,04	536,00	404,24	466,40	864,00	649,54	752,00
85	110,50	93,50	229,50	199,75	229,50	173,54	569,50	425,34	495,55	918,00	683,54	799,00

Εικόνα 1.

Σχόλιο προς τους επιμορφωτές

Τα δεδομένα του παρόντος σεναρίου οριοθετούν την αφετηρία της μελέτης μιας σειράς προβλημάτων που αφορούν τη συγκρότηση και γενικότερα την επεξεργασία συναρτησιακών σχέσεων που σχετίζονται με τη επιλογή κατάλληλου πακέτου συνδρομής για διελεύσεις από τη Αττική Οδό. Το πεδίο 'Προγράμματα συνδρομής της Αττικής Οδού' προτείνεται να θεωρηθεί ως ένα πλαίσιο δημιουργικής εμπλοκής των εκπαιδευτικών στο σχεδιασμό μιας ποικιλίας διαφορετικών εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων που θα εμπλέκουν τους μαθητές στη διερεύνηση μιας ποικιλίας εννοιών του αναλυτικού προγράμματος που σχετίζονται με τη μελέτη των συναρτήσεων. Οι μαθητές μπορεί να κληθούν να απαντήσουν σε προβλήματα περαιτέρω επέκτασης του παραπάνω πίνακα σε μεγαλύτερο εύρος τιμών, σε προβλήματα μοντελοποίησης των αντίστοιχων μεταβολών, μελέτης και εξαγωγής συμπερασμάτων. Για παράδειγμα, κάποιοι εκπαιδευτικοί μπορεί να χρησιμοποιήσουν το πλαίσιο αυτό για τη μελέτη συγκεκριμένων συναρτήσεων που θα επιλέξουν και να περιγράψουν με διαφορετικό τρόπο τις μεταβολές των εμπλεκόμενων μεγεθών ανά πακέτο συνδρομής χωρίς να ακολουθήσουν 'κατά γράμμα' τα πραγματικά δεδομένα. Στην παρούσα μορφή του σεναρίου θα δώσουμε ενδεικτικές μορφές αξιοποίησης των πραγματικών δεδομένων υποδεικνύοντας παράλληλα και εναλλακτικές δυνατότητες διδακτικής αξιοποίησης χωρίς όμως αυστηρή καθοδήγηση που θα περιόριζε τη δημιουργικότητα των εκπαιδευτικών.

1.1. Σύντομη ανασκόπηση του σεναρίου

1.1.1. Η ιδέα που διέπει το σενάριο

Με το προτεινόμενο σενάριο, οι μαθητές καλούνται:

1. Να εισαγάγουν μεταβλητές και να ορίσουν σχέσεις που περιγράφουν τα δεδομένα σχετικά με το κόστος διέλευσης από τα διόδια της Αττικής Οδού για διαφορετικά είδη οχημάτων και προσφερόμενων πακέτων συνδρομής.
2. Να χρησιμοποιήσουν τα προσφερόμενα υπολογιστικά εργαλεία για την αναπαράσταση των μεταβλητών και των αντίστοιχων τιμών τους σε μορφή πίνακα.
3. Να χρησιμοποιήσουν τα προσφερόμενα υπολογιστικά εργαλεία για την γραφική αναπαράσταση σχέσεων μεταξύ μεταβλητών και ακολούθως να βγάλουν συμπεράσματα σχετικά με τις περισσότερο συμφέρουσες επιλογές συνδρομής στα πακέτα προσφοράς της Αττικής Οδού.
4. Να γενικεύουν συναρτησιακές σχέσεις μέσα από τη δημιουργία κουμπιών αυτόματης εύρεσης του κόστους των μηνιαίων διελύσεων ανά πακέτο συνδρομής.
5. Να διερευνήσουν τις σχέσεις συμμεταβολής δύο ή περισσότερων μεταβαλλόμενων μεγεθών και να τις χρησιμοποιήσουν ως εργαλεία ανάλυσης για την περιγραφή της μεταβολής του κόστους επιλογής συγκεκριμένων πακέτων συνδρομής.

1.1.2. Τάξη εφαρμογής

Το σενάριο προτείνεται να εφαρμοστεί στην Α΄ Λυκείου.

1.1.3. Τεχνολογικά εργαλεία

Για την αποτελεσματική διεκπεραίωση των προτεινόμενων δραστηριοτήτων προτείνεται η χρήση του λογισμικού Function Probe.

1.1.4. Χρήση συμπληρωματικού υλικού

Για τους μαθητές:

Τετράδιο (για να κρατούν σημειώσεις για την πορεία της διερεύνησης και να καταγράφουν τα συμπεράσματά τους).

Φύλλα εργασίας τα οποία δίνονται από τον καθηγητή και έχουν ως στόχο να καθοδηγούν τους μαθητές στη διερεύνηση των διαφόρων ερωτημάτων.

Οδηγίες χρήσης του χρησιμοποιούμενου λογισμικού που θα δοθούν από τον εκπαιδευτικό.

Για τον διδάσκοντα:

Οδηγίες σχετικά με τους εκπαιδευτικούς στόχους της προτεινόμενης δραστηριότητας στο πλαίσιο της διδασκαλίας συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών του αναλυτικού προγράμματος με εστίαση στα χαρακτηριστικά και τους περιορισμούς του λογισμικού καθώς και στους αντικειμενικούς στόχους χρήσης και ενσωμάτωσής του στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών (π.χ. πολλαπλές διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις συναρτησιακών σχέσεων).

1.1.5. Προσδοκώμενες παιδαγωγικές και μαθησιακές κατακτήσεις

Από την πλευρά του γνωστικού αντικειμένου, οι προτεινόμενες δραστηριότητες καθώς και η προτεινόμενη διδακτική ατζέντα που περιγράφονται παρακάτω έχουν ως στόχο να παρέχουν στους μαθητές δυνατότητες:

να συσχετίσουν ένα πραγματικό πρόβλημα με μαθηματικές έννοιες όπως η έννοια της μεταβλητής και της συσχέτισης

να χρησιμοποιήσουν τις μαθηματικές έννοιες της μεταβλητής, της συσχέτισης μεταξύ μεταβλητών και της συμμεταβολής τους στην μελέτη πραγματικών προβλημάτων

να κατανοήσουν τις έννοιες της εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής για την περιγραφή μιας συναρτησιακής σχέσης

να κατανοήσουν τους πολλαπλούς τρόπους αναπαράστασης (συμβολικής, γραφικής και σε μορφή πίνακα) των δεδομένων που αφορούν τη μεταβολή και τη συσχέτιση μεταβαλλόμενων μεγεθών

να διερευνήσουν τις σχέσεις συμμεταβολής δύο ή περισσότερων μεταβαλλόμενων μεγεθών και να τις χρησιμοποιήσουν ως εργαλεία ανάλυσης για την περιγραφή της μεταβολής συγκεκριμένων μεγεθών (π.χ. του κόστους επιλογής συγκεκριμένων πακέτων συνδρομής διέλευσης στην Αττική Οδό)

να διερευνήσουν το ρόλο της αλλαγής κλίμακας στην αρίθμηση των αξόνων στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης

να συζητήσουν πότε η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης αποτελείται από μεμονωμένα σημεία.

Από την παιδαγωγική πλευρά, οι προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν ως στόχο να παρέχουν στους μαθητές δυνατότητες:

να μάθουν να συλλέγουν και να παρουσιάζουν δεδομένα στο Function Probe και να τα αναλύουν χρησιμοποιώντας διαφορετικές μορφές μαθηματικών αναπαραστάσεων

να μάθουν να διερευνούν τη συσχέτιση δεδομένων που αφορούν πραγματικά προβλήματα και να εξάγουν χρήσιμα συμπεράσματα διαπιστώνοντας σε αυτό το πλαίσιο τη χρησιμότητα των μαθηματικών

να μάθουν να συνεργάζονται με τα άλλα μέλη της ομάδας σε όλα τα στάδια της συλλογής και της επεξεργασίας των δεδομένων εμπλεκόμενοι σε διαδικασίες σταδιακής μαθηματοποίησης που περιλαμβάνουν την οργάνωση των δεδομένων, την επεξεργασία τους με βάση μαθηματικές αναπαραστάσεις, την εξαγωγή συμπερασμάτων και την εύρεση λύσεων σε πραγματικά προβλήματα και τέλος την παρουσίαση της εργασίας τους σε άλλες ομάδες

να αναπτύξουν διαλογικές και επιχειρηματολογικές πρακτικές επικοινωνίας με τους συνεργάτες τους ώστε να γίνονται αντιληπτοί από τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας αλλά και από το σύνολο των συμμετεχόντων στην τάξη.

1.2. Ο ρόλος των προς χρήση εργαλείων

Το προτεινόμενο λογισμικό επελέγη με κριτήριο την συμβατότητα των ζητούμενων στις προτεινόμενες εκπαιδευτικές δραστηριότητες με τις λειτουργικότητες και τα χαρακτηριστικά του Function Probe. Η παιδαγωγική αφετηρία του σχεδιασμού τέτοιων υπολογιστικών εργαλείων είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την προβληματική της δημιουργίας ευκαιριών εμπλοκής των μαθητών σε διαδικασίες αυτενεργούς κατασκευής μαθηματικών νοημάτων. Στην προσέγγιση αυτή ο υπολογιστής χρησιμοποιείται ως εργαλείο με την έννοια ότι διαθέτει ένα σύνολο από λειτουργικότητες που δεν απαντώνται με τον ίδιο τρόπο και στα στατικά μέσα. Στην περίπτωση του παρόντος σεναρίου η οπτική αυτή υλοποιείται μέσα από δύο λειτουργικότητες του Function Probe (α) τη δυναμική διασύνδεση πολλαπλών αναπαραστάσεων της ίδιας έννοιας και (β) τη δυνατότητα χειρισμού τους.

Πιο συγκεκριμένα, το Function Probe δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές:

- Να χρησιμοποιήσουν και να συνδέσουν όλες τις δυνατές μορφές αναπαράστασης των μεταβαλλόμενων δύο μεταβλητών μεγεθών (αλγεβρικός τύπος, πίνακας τιμών, σύνολο σημείων, γραφική αναπαράσταση)
- Να διερευνήσουν τη διασύνδεση μεταξύ των συγκεκριμένων μορφών αναπαράστασης με τη μαθηματοποίηση και τη διερεύνηση πραγματικών προβλημάτων
- Να αξιοποιήσουν τις γνώσεις τους από το μάθημα των μαθηματικών στην παραδοσιακή τάξη σε ένα νέο πλαίσιο με συγκεκριμένα καινοτομικά χαρακτηριστικά (διερευνητικός χαρακτήρας των προτεινόμενων εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων, εργασία των μαθητών σε ομάδες κ.λπ).
- Να γενικεύσουν και να εκφράσουν τα συμπεράσματά τους μέσα από τη συνδυασμένη χρήση των υπολογιστικών εργαλείων και την εμπλοκή τους σε συνεργατικές, επικοινωνιακές και αναστοχαστικές πρακτικές.

1.3. Προσδοκώμενα μαθησιακά οφέλη

Στη διδασκαλία των σχετικών θεμάτων με παραδοσιακά μέσα δεν δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να κάνουν πειράματα με διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας μαθηματικής έννοιας (π.χ. της μεταβολής μεγεθών) και να χρησιμοποιήσουν τις ενδείξεις από την αλληλεπίδρασή τους με αυτές στην μαθηματοποίηση πραγματικών προβλημάτων και τη διερεύνηση μαθηματικών εννοιών.

Η έρευνα έχει δείξει ότι η εμπλοκή των μαθητών με ένα ανοιχτό πρόβλημα που εκπορεύεται από μια κατάσταση της καθημερινής ζωής ευνοεί την ανάπτυξη δραστηριοτήτων διερεύνησης, ανάπτυξης εικασιών και ελέγχου τους, διατύπωσης κανόνων και γενικεύσεων. Το πρόβλημα που ζητείται να μελετηθεί στο πλαίσιο του παρόντος σεναρίου απαιτεί τη συλλογή δεδομένων και την εγγραφή τους σε πίνακα, την επιλογή των μεταβλητών για την ονομασία των αντίστοιχων μεγεθών, τη συγκρότηση σχέσεων μεταξύ των μεταβλητών, την γραφική και συμβολική αναπαράσταση των δεδομένων με

τρόπους που θα ευνοήσουν τη συσχέτισή τους προκειμένου να εξαχθούν κατάλληλα συμπεράσματα. Οι διαδικασίες αυτές απαιτούν την εμπλοκή των μαθητών σε διαδικασίες πειραματισμού και συνοδεύονται από την αξιοποίηση ενός μεγάλου εύρους και ποικιλίας γνώσεων τόσο από το μάθημα των μαθηματικών στην παραδοσιακή τάξη όσο και από τις διαισθητικές εμπειρίες των παιδιών που αναμένεται να έρθουν στην επιφάνεια κατά την αλληλεπίδρασή τους με τις διαθέσιμες μαθηματικές αναπαραστάσεις του Function Probe. Η χρήση λογισμικών όπως το Function Probe, δίνει τη δυνατότητα στον μαθητή να έχει επιλέγει από ένα πλήθος εργαλείων και δυνατοτήτων προκειμένου να εξάγει συμπεράσματα από την επεξεργασία σχέσεων μεταξύ μεταβαλλόμενων μεγεθών που διέπουν την περιγραφή ενός προβλήματος. Καθώς το πρόβλημα υπολογισμού του παρόντος σεναρίου απαιτεί την επιλογή κατάλληλου πακέτου συνδρομής διέλευσης από τη Αττική Οδό με πολλαπλότητα μέσων και αναπαραστάσεων οι παραπάνω διαδικασίες αναμένεται να ενισχύσουν διερευνητικές στάσεις κατά την αντιμετώπιση ανάλογων προβλημάτων από τους μαθητές.

1.4. Διδακτική διαδικασία

Ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων μπορεί να χωριστεί σε τρεις φάσεις:

❖ Α' Φάση: Εισαγωγική

Η πρώτη φάση αφορά

- στην ενημέρωση των μαθητών για τις γενικές γραμμές του σεναρίου και του προβληματισμού που πρόκειται να τους απασχολήσει,
- στην κατασκευή ενός πίνακα δεδομένων στο FP σχετικά με το κόστος διέλευσης από τα διόδια της Αττικής Οδού για διαφορετικά είδη οχημάτων και προσφερόμενων συνδρομητικών πακέτων.

❖ Β' Φάση: Αναπαράσταση και επεξεργασία των δεδομένων με χρήση των υπολογιστικών εργαλείων

Η δεύτερη φάση αφορά στην αναπαράσταση των δεδομένων με στόχο την επεξεργασία τους με χρήση των προσφερόμενων υπολογιστικών εργαλείων Πίνακας, Αριθμομηχανή και Γράφημα και πιο συγκεκριμένα:

- στην συγκρότηση μεταβλητών και σχέσεων μεταξύ των δεδομένων σχετικά με το κόστος διέλευσης από τα διόδια της Αττικής Οδού για διαφορετικά είδη οχημάτων και προσφερόμενων πακέτων συνδρομής,
- στην δημιουργία κουμπιών αυτόματης εύρεσης του κόστους των μηνιαίων διελεύσεων ανά πακέτο συνδρομής,
- στη γραφική αναπαράσταση των συναρτησιακών σχέσεων κόστους και αναμενόμενων κερδών με βάση τον αριθμό των διελεύσεων και το πακέτο συνδρομής
- στην εξαγωγή συμπερασμάτων για τον τρόπο συμμεταβολής των δυο μεγεθών και τα κριτήρια επιλογής ενός πακέτου συνδρομής.

❖ Γ' Φάση: Επέκταση του σεναρίου

Η τρίτη φάση αφορά στην επέκταση του σεναρίου που μπορεί να προκύψει με τη διερεύνηση του προβλήματος για διαφορετικούς τύπους οχημάτων και συνδυασμό παραμέτρων με βάση τις οποίες θα πρέπει να αποφασίσει κάποιος να επιλέξει ένα συγκεκριμένο πακέτο συνδρομής (π.χ. η συνδυαστική χρήση δύο πακέτων δικύκλου και άλλου οχήματος από δύο μέλη μιας οικογένειας).

1.5. Δραστηριότητες

1.5.1. Α' Φάση

Η εφαρμογή θα γίνει στο εργαστήριο δεδομένου ότι οι δραστηριότητες απαιτούν Η/Υ. Οι μαθητές θα ασχοληθούν με φύλλο εργασίας εργαζόμενοι σε ομάδες.

Συνοδευτικό υλικό

Τετράδιο (για να κρατούν σημειώσεις για την πορεία της διερεύνησης και να καταγράφουν τα συμπεράσματά τους).

Φύλλα εργασίας τα οποία δίνονται από τον καθηγητή και έχουν ως στόχο να καθοδηγούν τους μαθητές στη διερεύνηση των διαφόρων ερωτημάτων.

Οδηγίες χρήσης του χρησιμοποιούμενου λογισμικού που θα δοθούν από τον εκπαιδευτικό.

Προτεινόμενη διδακτική διαδικασία

Η πρώτη φάση αφορά τη γίνει γενική περιγραφή του πλαισίου και των ζητημάτων που ανακύπτουν μέσα από τη συγκεκριμένη δραστηριότητα.

Προτείνεται οι μαθητές :

- Να συζητήσουν σχετικά με τα διόδια και το κόστος ενός ταξιδιού. Ακόμη και μαθητές που δεν έχουν διέλθει από την Αττική Οδό αναμένεται να έχουν εμπειρία χρήσης διοδίων σε κάποια μετακίνησή τους στο εθνικό οδικό δίκτυο.
- Να επισκεφτούν την ιστοσελίδα της Αττικής Οδού (<http://www.aodos.gr>) και να μάθουν περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τα προσφερόμενα προγράμματα συνδρομής και το κόστος διέλευσης με βάση το είδος του οχήματος και τον αριθμό των διελεύσεων.
- Κάποιοι εκπαιδευτικοί μπορούν να ζητήσουν από τους μαθητές τη συλλογή πληροφοριών από τους υπάρχοντες πίνακες της ιστοσελίδας (βλ. Εικόνα 1) και σε αυτούς να βασίσουν την περαιτέρω εξέλιξη της εφαρμογής του σεναρίου στην τάξη αφού προηγηθεί η καταγραφή των σχετικών δεδομένων από τους μαθητές στο παράθυρο Πίνακας του FP.

Στη συνέχεια οι μαθητές συζητούν σχετικά με τη διαφοροποίηση των τιμών ανά πακέτο και αριθμό διελεύσεων.

1.5.2. Β΄ Φάση

Η εφαρμογή θα γίνει στο εργαστήριο δεδομένου ότι οι δραστηριότητες απαιτούν Η/Υ. Οι μαθητές θα ασχοληθούν με το ίδιο φύλλο εργασίας.

Συνοδευτικό υλικό

Φύλλο εργασίας.

Προτεινόμενη διδακτική διαδικασία

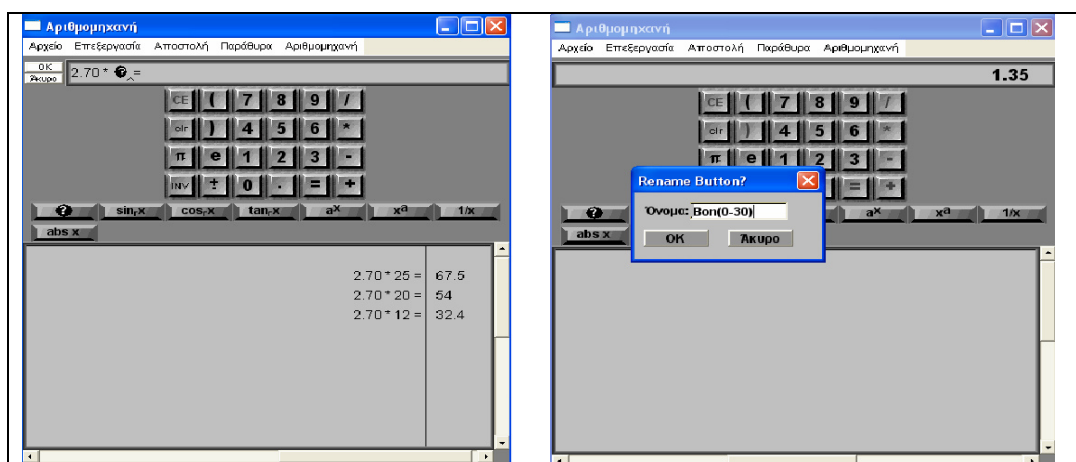
Η δεύτερη φάση περιλαμβάνει την αναπαράσταση των δεδομένων και την περαιτέρω επεξεργασία τους με χρήση των προσφερόμενων υπολογιστικών εργαλείων. Προτείνεται οι μαθητές να εμπλακούν στις ακόλουθες δραστηριότητες:

- Καθορισμός μεταβλητών και συγκρότηση συμβολικών εκφράσεων στο παράθυρο Πίνακας για την περιγραφή των γραμμικών συναρτήσεων που αντιστοιχούν στο κόστος πληρωμής διέλευσης επιβατικών οχημάτων με Μετρητά και με το πακέτο Express.
- Αναπαράσταση των δεδομένων του πακέτου Bonus στο παράθυρο Πίνακας. Η συνάρτηση που ορίζεται από τις μεταβολές των τιμών στο πακέτο Bonus είναι κλιμακωτή και έτσι μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να γεμίσουν τον Πίνακα με την εντολή Γέμισμα και τις επιλογές κατάλληλων τρόπων συμπλήρωσης με βάση τη θέση στον Πίνακα. Το κόστος της 31^{ης} έως και της 45^{ης} διέλευσης θα είναι ίσο με το κόστος των 30 διελεύσεων ενώ ακολούθως θα αυξάνονται κανονικά κατά 2.70 ευρώ ανά διέλευση.

Πίνακας					
Αρχείο Επεξεργασία Αποστολή Παράθυρο Πίνακας					
x	y=2.70*x	r=2.35*x	b	u=y-r	z=y-b
Αριθμός μηνιαίων διελεύσεων	Μετρητά	Express	Bonus		
0	0	0	0	0	0
1	2.7	2.35	2.7	0.35	0
2	5.4	4.7	5.4	0.7	0
3	8.1	7.05	8.1	1.05	0
4	10.8	9.4	10.8	1.4	0
5	13.5	11.75	13.5	1.75	0
6	16.2	14.1	16.2	2.1	0
7	18.9	16.45	18.9	2.45	0
8	21.6	18.8	21.6	2.8	0
9	24.3	21.15	24.3	3.15	0
10	27	23.5	27	3.5	0
11	29.7	25.85	29.7	3.85	0
12	32.4	28.2	32.4	4.2	0
13	35.1	30.55	35.1	4.55	0
14	37.8	32.9	37.8	4.9	0
15	40.5	35.25	40.5	5.25	0
16	43.2	37.6	43.2	5.6	0
17	45.9	39.95	45.9	5.95	0
18	48.6	42.3	48.6	6.3	0
19	51.3	44.65	51.3	6.65	0
20	54	47	54	7	0
21	56.7	49.35	56.7	7.35	0
22	59.4	51.7	59.4	7.7	0
23	62.1	54.05	62.1	8.05	0
24	64.8	56.4	64.8	8.4	0
25	67.5	58.75	67.5	8.75	0
26	70.2	61.1	70.2	9.1	0
27	72.9	63.45	72.9	9.45	0
28	75.6	65.8	75.6	9.8	0
29	78.3	68.15	78.3	10.15	0
30	81	70.5	81	10.5	0
31	83.7	72.85	81	10.85	2.7

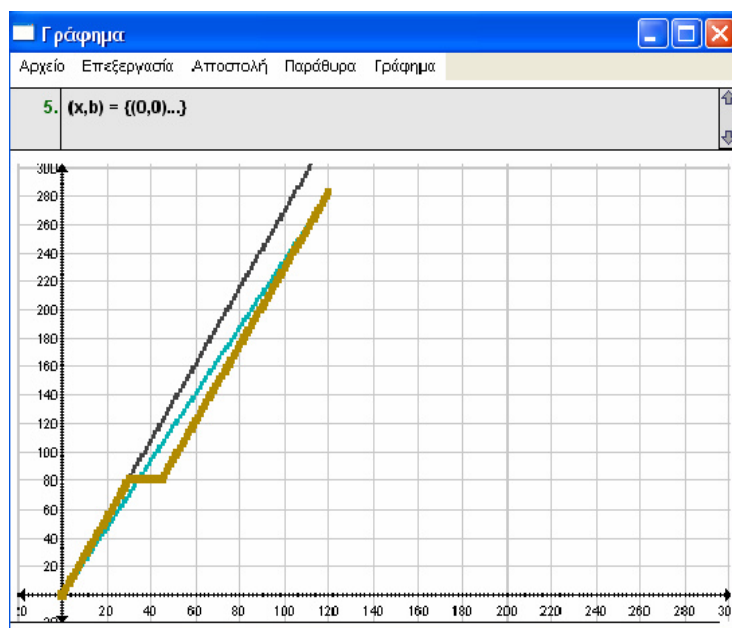
Εικόνα 2.

- Κατασκευή κουμπιών για τη εύρεση του κόστους διέλευσης επιβατικών οχημάτων ανά πακέτο. Για την εύρεση των τιμών του πακέτου Bonus που αντιστοιχεί σε κλαδωτή συνάρτηση οι μαθητές μπορεί να φτιάξουν 3 κουμπιά για την εύρεση των αντίστοιχων τιμών κόστους ονομάζοντάς τα κατάλληλα: για παράδειγμα το πρώτο θα μπορούσε να ονομαστεί Bonus (0-30) και να αντιστοιχεί στη συνάρτηση $2,70^x$ (βλ. Εικόνα 3), το δεύτερο (30-45) και να αντιστοιχεί στη σταθερή τιμή 81 και το τρίτο Bonus (>46) και να αντιστοιχεί στη συνάρτηση $81+2,70^x$.



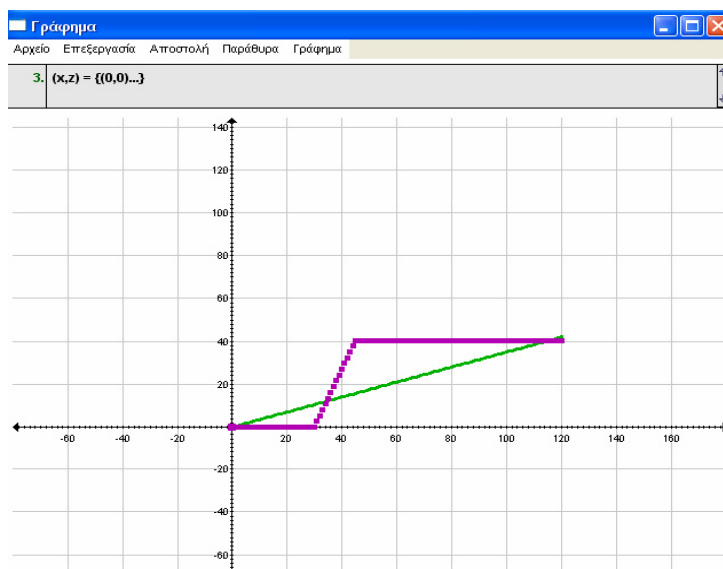
Εικόνα 3.

- Κατασκευή συναρτήσεων κέρδους με βάση τα διαφορετικά πακέτα στο παράθυρο Πίνακας. Εδώ ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει την αναπαράσταση της συνάρτησης κέρδους αν κάποιος επιλέξει το πακέτο Express έναντι των μετρητών. Για τον ίδιο λόγο μπορεί να ζητηθεί η κατασκευή ενός κουμπιού που να δίνει για κάθε αριθμό μηνιαίων διελεύσεων το αντίστοιχο κέρδος. Τα δεδομένα επίσης μπορεί να αναπαρασταθούν και γραφικά και να συζητηθεί το είδος της συνάρτησης.
- Γραφική αναπαράσταση των συναρτήσεων αριθμού διελεύσεων και κόστους με πληρωμή μετρητοίς και ανά πακέτο συνδρομής (βλ. Εικόνα 4). Εδώ οι μαθητές αναμένεται να πειραματιστούν με την αλλαγή κλίμακας στο Γράφημα προκειμένου να πετύχουν την αναπαράστασή του στο αντίστοιχο παράθυρο. Οι μαθητές ακολούθως θα κληθούν να σχολιάσουν τις μεταβολές και να βγάλουν συμπεράσματα για τις περισσότερο συμφέρουσες επιλογές πακέτων συνδρομής με βάση τον αναμενόμενο αριθμό διελεύσεων.



Εικόνα 4.

Ένας ακόμη τρόπος εισαγωγής των μαθητών σε διαδικασίες εξαγωγής συμπερασμάτων με βάση συναρτησιακές συμμεταβολές μπορεί να γίνει μέσα από τη γραφική αναπαράσταση των συναρτήσεων κέρδους μεταξύ της επιλογής μετρητών και διαφόρων πακέτων συνδρομής. Στην Εικόνα 5, για παράδειγμα, φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις κέρδους μεταξύ μετρητών-Express και μετρητών-Bonus αντίστοιχα για 120 διελεύσεις.



Εικόνα 5.

Οι μαθητές προτείνεται να εμπλακούν στη ερμηνεία των γραφικών αναπαραστάσεων, στη χρήση των υπολογιστικών εργαλείων (π.χ. αλλαγής κλίμακας, μεγέθυνσης μερών του γραφήματος) ώστε να εντοπίσουν τα σημεία τομής των γραφημάτων και να εξάγουν συμπεράσματα για τον τρόπο μεταβολής του αναμενόμενου κέρδους σε σχέση με την καταβολή μετρητοίς και με βάση τον αριθμό των διελεύσεων. Στο τέλος της κάθε φάσης, θεωρείται σκόπιμο, όλες οι ομάδες να κάνουν μία σύντομη παρουσίαση των συμπερασμάτων τους στο σύνολο της τάξης.

1.5.3. Γ΄ Φάση: Επέκταση της δραστηριότητας

Οι δυνατότητες επέκτασης του σεναρίου μπορεί να περιλαμβάνουν την ενσωμάτωση διαφορετικών τύπων οχημάτων για διαφορετικό αριθμό διελεύσεων όπως και περισσότερες παραμέτρους με βάση τις οποίες θα πρέπει να αποφασίσει κάποιος σχετικά με την επιλογή συνδρομής για διέλευση στην Αττική

Οδό. Για παράδειγμα, η συνδυαστική χρήση του πακέτου Moto –για κάποιον οδηγό που διαθέτει και δίκυκλο ή από δύο μέλη μιας οικογένειας- με ένα από τα πακέτα μετακίνησης επιβατικού οχήματος θα μπορούσε να οδηγήσει σε διερευνητικά ερωτήματα σχετικά με

- τον ελάχιστο αριθμό μετακινήσεων με το δίκυκλο ώστε να συμφέρει η συνδυαστική χρήση των δύο πακέτων
- το μέγιστο αριθμό μετακινήσεων ώστε το συνολικό ποσό δαπάνης να μην ξεπερνάει μια συγκεκριμένη τιμή κ.ο.κ.

Το πρόβλημα

Η Αττική Οδός προσφέρει τα τελευταία χρόνια τη δυνατότητα πληρωμής διοδίων με ηλεκτρονικά μέσα (πέραν της πληρωμής με μετρητά) με δύο τρόπους:

(α) με πομποδέκτη e-PASS που τοποθετείται στο παρμπρίζ του οχήματος επιτρέποντας τη διέλευση από τις αποκλειστικές ηλεκτρονικές λωρίδες διοδίων, την αναγνώρισή του από το σύστημα διοδίων και την αυτόματη ενεργοποίηση της διαδικασίας ηλεκτρονικής συναλλαγής.

(β) με Ειδική Κάρτα Λογαριασμού, μέσω της οποίας οι κάτοχοι μοτοσικλέτας, φορτηγού οχήματος ή λεωφορείου μπορούν να πληρώνουν τα διόδια απλά επιδεικνύοντας την κάρτα σε κάποιον από τους εισπράκτορες διοδίων αποφεύγοντας τη συναλλαγή με μετρητά.

Και οι δύο δυνατότητες εξόφλησης, πέρα από το κέρδος του χρόνου κατά τη συναλλαγή, συνοδεύονται από προσφορές εκπτώσεων πακέτων συνδρομής με βάση το είδος του οχήματος και τον αριθμό των μηνιαίων διελύσεων. Κάθε διέλευση που εξοφλείται μετρητοίς κοστίζει 2.70 ευρώ για τα επιβατικά και ελαφρά εμπορικά οχήματα, 1.30 ευρώ για τα δίκυκλα, 6.70 ευρώ για τα λεωφορεία και τα φορτηγά και 10.80 ευρώ για τα μεγαλύτερα οχήματα (νταλίκες κ.λπ). Ενδεικτικά, αναφέρουμε τα τρία προσφερόμενα προγράμματα συνδρομής για τα επιβατικά οχήματα και το μοναδικό πρόγραμμα για τα δίκυκλα.

(1) Το Express, παρέχει που παρέχει σταθερή έκπτωση από την πρώτη κιόλας διέλευση, ανεξάρτητα από τον αριθμό των διελύσεων και το χρόνο πραγματοποίησής τους.

(2) Το Bonus, παρέχει την 31^η έως και την 45^η διέλευση, μέσα σε ένα ημερολογιακό μήνα, δωρεάν. Όλες οι υπόλοιπες κοστίζουν 2.70 ευρώ η καθεμιά.

(3) Το Friendly, παρέχει αυξανόμενη κλιμακωτή έκπτωση ανάλογα με τον αριθμό των διελύσεων σε μηνιαία βάση με σταθερό πάγιο συσκευής e-pass 3.54 ευρώ. Πιο συγκεκριμένα:





- οι 30 πρώτες διελύσεις κοστίζουν 2.35 ευρώ η καθεμιά,
- οι επόμενες 20 διελύσεις (31η έως και 50^η) κοστίζουν 2 ευρώ η καθεμιά
- πέραν των 50 διελύσεων η καθεμιά κοστίζει 1.70 ευρώ.

(4) Το Moto, αφορά τα δίκυκλα και παρέχει σταθερή έκπτωση από την πρώτη κιόλας διέλευση, ανεξάρτητα από τον αριθμό των διελύσεων και το χρόνο πραγματοποίησής τους. Κάθε διέλευση κοστίζει 1.10 ευρώ.

Το πρόβλημα αφορά την επιλογή του συμφερότερου πακέτου συνδρομής για κατόχους διαφορετικών οχημάτων με βάση τον αριθμό των μηνιαίων διελύσεων τους από τα διόδια της Αττικής Οδού.

Για τη Φάση Α'

- Συζητήστε στην τάξη σχετικά με την ύπαρξη των διοδίων σε συγκεκριμένους δρόμους.
- Επισκεφτείτε την ιστοσελίδα της Αττικής Οδού (<http://www.aodos.gr>) και πληροφορηθείτε για τα χαρακτηριστικά της συγκεκριμένης οδού, την πιθανή συχνότητα της διέλευσής της από διαφορετικού τύπου οχήματα, τους τρόπους πληρωμής των διοδίων και τα προσφερόμενα πακέτα συνδρομής για τη εξόφλησή τους

Κατ. Οχήμ.	1		2, 3, 4				5			6		
Αριθμός Μηνιαίων Διελεύσεων												
	Μετρ.	Moto	Μετρ.	Express	Bonus	Friendly	Μετρ.	Friendly	Express Truck	Μετρ.	Friendly	Express Truck
1	1,30	1,10	2,70	2,35	2,70	5,89	6,70	9,37	5,83	10,80	12,94	9,40
5	6,50	5,50	13,50	11,75	13,50	15,29	33,50	32,69	29,15	54,00	50,54	47,00
10	13,00	11,00	27,00	23,50	27,00	27,04	67,00	61,84	58,30	108,00	97,54	94,00
15	19,50	16,50	40,50	35,25	40,50	38,79	100,50	90,99	87,45	162,00	144,54	141,00
20	26,00	22,00	54,00	47,00	54,00	50,54	134,00	120,14	116,60	216,00	191,54	188,00
25	32,50	27,50	67,50	58,75	67,50	62,29	167,50	149,29	145,75	270,00	238,54	235,00
30	39,00	33,00	81,00	70,50	81,00	74,04	201,00	178,44	174,90	324,00	285,54	282,00
35	45,50	38,50	94,50	82,25	81,00	84,04	234,50	203,24	204,05	378,00	325,54	329,00
40	52,00	44,00	108,00	94,00	81,00	94,04	268,00	228,04	233,20	432,00	365,54	376,00
45	58,50	49,50	121,50	105,75	81,00	104,04	301,50	252,84	262,35	486,00	405,54	423,00
50	65,00	55,00	135,00	117,50	94,50	114,04	335,00	277,64	291,50	540,00	445,54	470,00
55	71,50	60,50	148,50	129,25	108,00	122,54	368,50	298,74	320,65	594,00	479,54	517,00
60	78,00	66,00	162,00	141,00	121,50	131,04	402,00	319,84	349,80	648,00	513,54	564,00
65	84,50	71,50	175,50	152,75	135,00	139,54	435,50	340,94	378,95	702,00	547,54	611,00
70	91,00	77,00	189,00	164,50	148,50	148,04	469,00	362,04	408,10	756,00	581,54	658,00
75	97,50	82,50	202,50	176,25	162,00	156,54	502,50	383,14	437,25	810,00	615,54	705,00
80	104,00	88,00	216,00	188,00	175,50	165,04	536,00	404,24	466,40	864,00	649,54	752,00
85	110,50	93,50	229,50	199,75	189,00	173,54	569,50	425,34	495,55	918,00	683,54	799,00

Εικόνα 6.

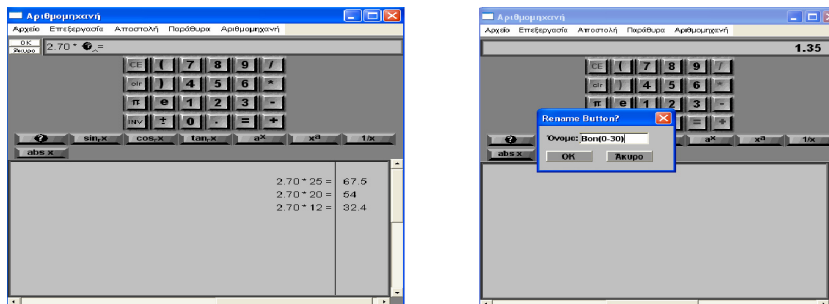
Για τη Φάση Β'

- Να αναπαραστήσετε στο παράθυρο Πίνακας τα δεδομένα για 100 διελύσεις (ανά 5 και ανά 1) με πληρωμή μετρητοίς και με πληρωμή μέσω των πακέτων Express, Bonus και Friendly, αντιστοιχίζοντας μεταβλητές τόσο στον αριθμό των διελύσεων όσο και στα δεδομένα κάθε διαφορετικού τύπου πληρωμής.
- Να χρησιμοποιήσετε συναρτησιακές σχέσεις για το αυτόματο γέμισμα της στήλης Μετρητά και της στήλης Express.

Εδώ οι μαθητές αναμένεται να χρησιμοποιήσουν τις συναρτησιακές σχέσεις $2.70x$ και $2.35x$ αντίστοιχα.

- Μπορείτε να βγάλετε κάποια συμπεράσματα από τη σύγκριση των τιμών μεταξύ της επιλογής Μετρητά και της επιλογής Express;
- Να γεμίσετε τη στήλη Bonus χρησιμοποιώντας τις δυνατότητες που προσφέρει η εντολή Γέμισμα. Ποιο θα είναι το κόστος της 35^{ης}, της 40^{ης}, 45^{ης} και της 50^{ης} διέλευσης; Μπορείτε να βγάλετε κάποια συμπεράσματα από τη σύγκριση των τιμών μεταξύ της επιλογής Μετρητά και της επιλογής Bonus;

- Κατασκευάστε κουμπιά στην Αριθμομηχανή που να υπολογίζουν το μηνιαίο κόστος διέλευσης με τις επιλογές Μετρητά, Express και Bonus. Τα κουμπιά που κατασκευάσατε σας λύνουν το πρόβλημα σχετικά με η επιλογή των πακέτων Express ή Bonus έναντι της επιλογής μετρητά;

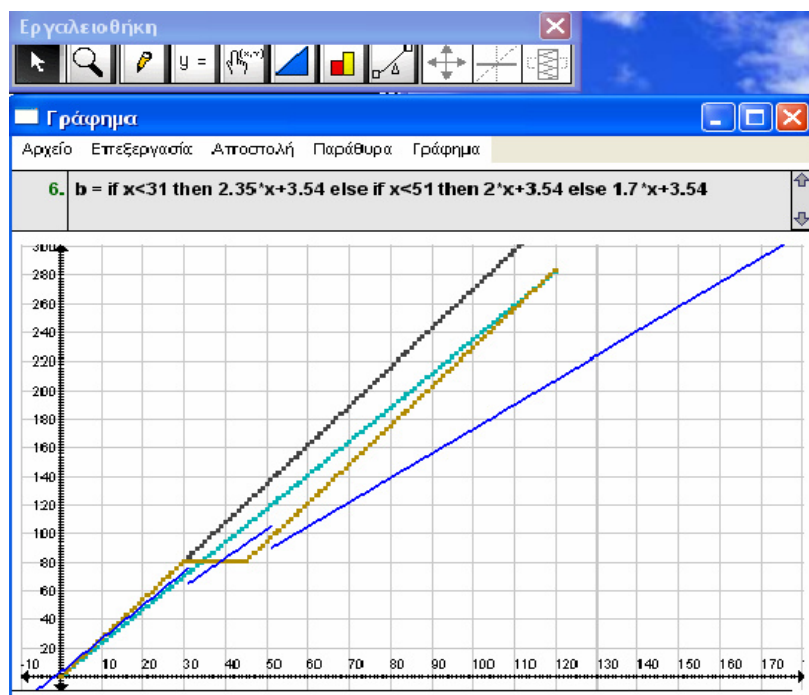


Εικόνα 7.

Καθώς η μεταβολή στο πακέτο Bonus περιγράφεται με κλαδωτή συνάρτηση οι μαθητές μπορεί να κατασκευάσουν 3 κουμπιά για την εύρεση των αντίστοιχων τιμών κόστους ονομάζοντάς τα κατάλληλα: για παράδειγμα το πρώτο θα μπορούσε να ονομαστεί Bonus (0-30) και να αντιστοιχεί στη συνάρτηση $2,70 \cdot x$ (βλ. Εικόνα 3), το δεύτερο (30-45) και να αντιστοιχεί στη σταθερή τιμή 81 και το τρίτο Bonus (>46) και να αντιστοιχεί στη συνάρτηση $81 + 2,70 \cdot x$.

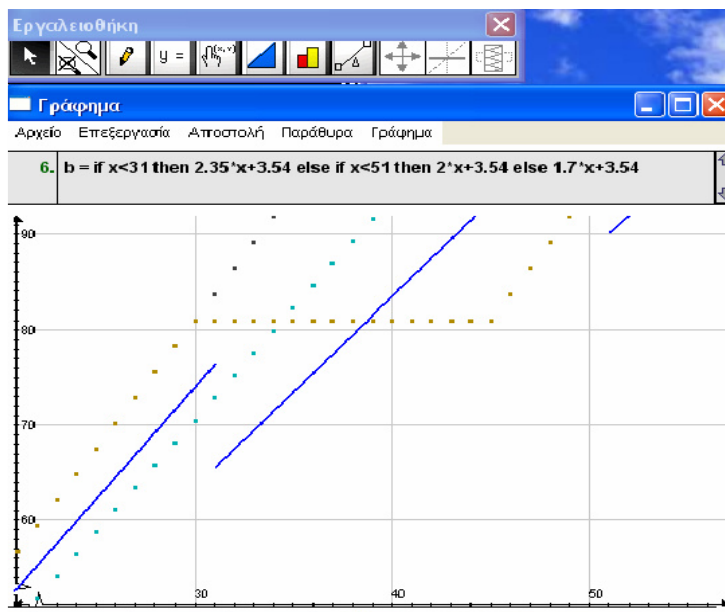
- Να παραστήσετε στο παράθυρο Γράφημα τη μεταβολή του κόστους διέλευσης ανά μηνιαίο αριθμό διελεύσεων μεταξύ των πακέτων Μετρητά, Express, Bonus και Friendly. Ποιο είναι σε κάθε περίπτωση το συμφερότερο πακέτο με βάση τις μεταβολές που παρατηρείτε;

Εδώ χρειάζεται προσοχή η αναπαράσταση του γραφήματος του πακέτου Friendly (μπλε γραμμή) που επειδή αντιστοιχεί σε συνάρτηση πολλαπλού τύπου θα πρέπει να πληκτρολογηθεί με έναν ειδικό τρόπο στο Πλαίσιο Τύπων και Ιστορικού του παραθύρου Γράφημα με χρήση του ειδικού εικονιδίου εισαγωγής τύπων της Εργαλειοθήκης (βλ. Εικόνα 8). Το γεγονός ότι με αυτό τον τρόπο κατασκευής η συγκεκριμένη γραφική παράσταση εμφανίζεται ως συνεχής γραμμή και όχι σύνολο σημείων μπορεί να αποτελέσει σημείο διδακτικής αξιοποίησης από την πλευρά του διδάσκοντα σχετικά με το ρόλο του πεδίου ορισμού στο είδος της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης. Επίσης, μπορεί να αξιοποιηθεί διδακτικά το πώς η συγκεκριμένη γραφική παράσταση θα 'διαβαστεί' σε σχέση με τις υπόλοιπες καθώς απαιτείται εστίαση μόνο στα σημεία που αντιστοιχούν σε ακέραιες τιμές του πεδίου ορισμού. Μπορεί τέλος το σημείο αυτό να αποτελέσει μια αφορμή με βάση την οποία θα μπορούσαν να διερευνηθούν όλοι οι διαθέσιμοι τρόποι κατασκευής γραφημάτων διαφορετικών τύπων συναρτήσεων στο Function Probe.



Εικόνα 8.

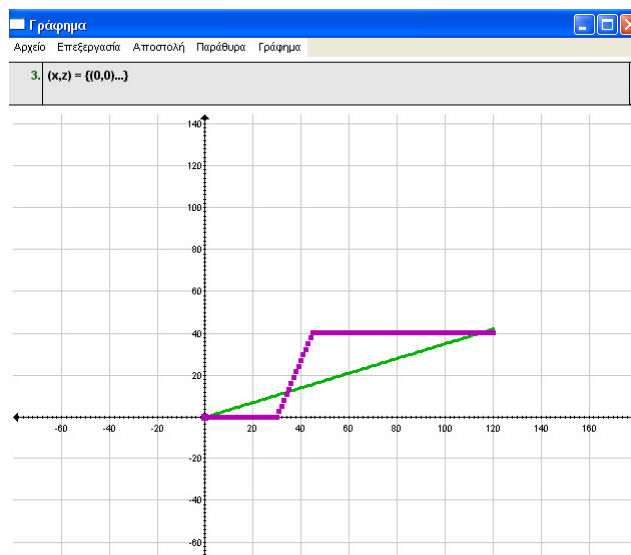
Οι μαθητές θα κληθούν να σχολιάσουν τις μεταβολές και να βγάλουν συμπεράσματα για τις περισσότερες συμφέρουσες επιλογές αναφορικά με τη επιλογή ή όχι ενός πακέτου συνδρομής με βάση τον αναμενόμενο αριθμό διελεύσεων. Αναμένεται οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν περαιτέρω τα προσφερόμενα εργαλεία του παραθύρου Γράφημα και της Εργαλειοθήκης (π.χ. μεγέθυνσης μερών του γραφήματος) ώστε να εντοπίσουν τα σημεία τομής των γραφημάτων και να εξάγουν συμπεράσματα για τις σχετικές συμφέρουσες επιλογές. Στην επόμενη εικόνα εμφανίζεται η μεγέθυνση μιας περιοχής των γραφημάτων της Εικόνας 8.



Εικόνα 9.

- Να εισαγάγετε στο παράθυρο Πίνακας δύο συναρτήσεις που να περιγράφουν το κέρδος μεταξύ της επιλογής μετρητών και των πακέτων Express και Bonus αντίστοιχα.

Οι συναρτήσεις αυτές προκύπτουν από τις διαφορές των μεταβλητών μετρητά-Express και μετρητά-Bonus. Στην επόμενη εικόνα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις κέρδους μεταξύ μετρητών-Express και μετρητών-Bonus αντίστοιχα για 120 διελεύσεις.



Εικόνα 10.

Για τη Φάση Γ'

- Να διερευνήσετε τα ερωτήματα της προηγούμενης φάσης για έναν κάτοχο φορτηγού αυτοκινήτου.