ΠΡΑΚΤΙΚΑ

7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ.)

Μαθηματική Γνώση και Διδακτικές Πρακτικές

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

1, 2 & 3 Δεκεμβρίου 2017

- Ένωση Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ.)
- Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ
- Διαπανεπιστημιακό-Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών "Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών", ΕΚΠΑ

Επιμέλεια:
Θ. Ζαχαριάδης, Δ. Πόταρη, Γ. Ψυχάρης

ΕΠΙΠΕΔΑ ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΩΣ ΣΥΜΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΜΑΘΗΣΙΑΚΩΝ ΤΡΟΧΙΩΝ

Καφετζόπουλος Γεώργιος – Ιγνάτιος, Ψυχάρης Γιώργος

Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

gkafetzo@math.uoa.gr, gpsych@math.uoa.gr

Πρόσφατες έρευνες δίνουν έμφαση στη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής. Στόχος του άρθρου είναι η διερεύνηση σύνδεσης δύο συμμεταβαλλόμενων μεγεθών από μαθητές Β΄ Λυκείου στο πλαίσιο της μοντελοποίησης ρεαλιστικών προβλημάτων. Με τη χρήση των μαθησιακών τροχιών προσδιορίζονται τα επίπεδα ανάπτυξης της συνάρτησης ως συμμεταβολής που προέκυψαν κατά την εμπλοκή των μαθητών με μία σειρά από δραστηριότητες μοντελοποίησης στο λογισμικό Casyopée.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήσαμε το λογισμικό Casyopée για να μελετήσουμε τις διαδικασίες νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής από μαθητές Β΄ Λυκείου. Μας ενδιέφερε ο εντοπισμός των επιπέδων νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής όταν οι μαθητές εμπλέκονται σε ρεαλιστικά προβλήματα μοντελοποίησης που περιλαμβάνουν το χειρισμό συμμεταβαλλόμενων μεγεθών στο γεωμετρικό πλαίσιο, τη διερεύνηση των μεταξύ τους σχέσεων και τη μετάβαση στο αλγεβρικό πλαίσιο για τη μελέτη των αντίστοιχων συναρτήσεων.

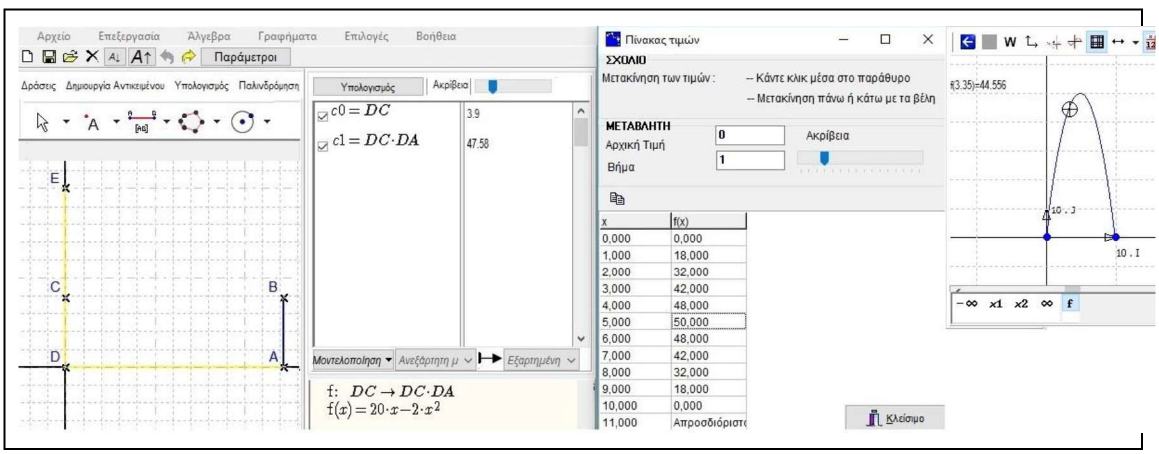
Η συνάρτηση κατέχει κυρίαρχο ρόλο στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και προσεγγίζεται με δύο τρόπους: ως αντιστοιχία δύο μεταβλητών και ως συμμεταβολή, όπου μεταβάλλοντας τις τιμές της μίας μεταβλητής μεταβάλλονται οι τιμές της άλλης (Carlson et al., 2002). Η προσέγγιση της συμμεταβολής συνδέεται στην έννοια του ρυθμού μεταβολής και αναδεικνύεται ως ουσιώδης για την κατανόηση θεμελιωδών εννοιών των προχωρημένων μαθηματικών. Οι Carlson et al. (2002) μελέτησαν την ανάπτυξη της σκέψης φοιτητών σχετικά με τη συμμεταβολή ποσοτήτων σε δυναμικές καταστάσεις όπως το γέμισμα φιάλης με νερό. Τα ερευνητικά τους αποτελέσματα οδήγησαν στην διαμόρφωση ενός πλαισίου πέντε επιπέδων συμμεταβολής που περιγράφηκαν με βάση τις αντίστοιχες νοητικές διεργασίες: *Εξάρτηση* (παρατήρηση των αλλαγών στις δύο μεταβλητές), *Κατεύθυνση μεταβολής* (συσχέτιση της μεταβολής μίας μεταβλητής - αύξηση ή μείωση – με αλλαγές της άλλης), *Ποσοτική συσχέτιση* (συσχέτιση του ποσού της αλλαγής μίας μεταβλητής με αλλαγές της άλλης), *Μέσος ρυθμός* (συσχέτιση του μέσου ρυθμού μεταβολής με ομοιόμορφες αυξήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής) και *Στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής* (συσχέτιση του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής με συνεχείς αυξήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής). Επομένως, η συμμεταβολή διασυνδέει τις συναρτησιακές σχέσεις με τον ρυθμό μεταβολής και άρα, η αναζήτηση πεδίων νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής αποτελεί κρίσιμη παράμετρο στη μελέτη της εξέλιξης της συναρτησιακής σκέψης των μαθητών και των φοιτητών.

Οι δραστηριότητες μοντελοποίησης με ψηφιακά εργαλεία έχουν υποδειχτεί ως πεδίο ευκαιριών για την εμπλοκή των μαθητών με τη συναρτησιακή σκέψη και κατ’ επέκταση για τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής (Lagrange & Psycharis, 2014; Psycharis, 2015). Ο Lagrange (2014) περιέγραψε τη διαδικασία μοντελοποίησης ενός προβλήματος στο ψηφιακό περιβάλλον Casyopée μέσω του «κύκλου μοντελοποίησης», ο οποίος περιλαμβάνει τέσσερα πεδία: (α) ένα φυσικό αντικείμενο (π.χ. χαρτί), το οποίο επιτρέπει στους μαθητές να πειραματιστούν εμπειρικά με εξαρτήσεις ποσοτήτων (π.χ. μήκος πλευράς και εμβαδόν ορθογωνίου), (β) το δυναμικό σχήμα που προκύπτει από τη μοντελοποίηση των εξαρτήσεων σε ένα ψηφιακό εργαλείο (π.χ. ένα δυναμικό ορθογώνιο στο παράθυρο Δυναμικής Γεωμετρίας), (γ) τα μεγέθη (π.χ. πλευρά - επιφάνεια) ανεξάρτητα από τις μονάδες μέτρησης και (δ) τις αλγεβρικές συναρτήσεις που απαντούν στο πρόβλημα. Σε μια τέτοια προσέγγιση, η μετάβαση των μαθητών από τον πειραματισμό με το φυσικό αντικείμενο (ποσότητες) προς την έννοια της συνάρτησης (μεταβλητές) διαμεσολαβείται από την εργασία με τα συμμεταβαλλόμενα μεγέθη και τις μετρήσεις, μέσω της χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων όπως αλγεβρικών τύπων, γραφικών παραστάσεων και πινάκων (Lagrange, 2014). Στην παρούσα έρευνα, χρησιμοποιούμε ρεαλιστικά προβλήματα και ειδικά σχεδιασμένα ψηφιακά εργαλεία για τον σχεδιασμό δραστηριοτήτων μοντελοποίησης ώστε να ενθαρρύνουμε τις μεταβάσεις των μαθητών στα πεδία του κύκλου μοντελοποίησης.

Προκειμένου να περιγράψουμε την εξέλιξη της νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής από τους μαθητές επιλέγουμε τη χρήση των μαθησιακών τροχιών (learning trajectories, Clements & Sarama, 2009). Μια μαθησιακή τροχιά περιλαμβάνει τρία στοιχεία: (α) μαθηματικούς στόχους, (β) εκπαιδευτικές δραστηριότητες για την επίτευξη των στόχων και (γ) περιγραφή της ανάπτυξης της σκέψης των μαθητών καθώς εμπλέκονται με τις δραστηριότητες. Οι τροχιές ορίζουν επίπεδα νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής από απλές σε πιο σύνθετες μορφές. Ωστόσο, τα επίπεδα αυτά δεν υποδεικνύουν μια ακολουθία σταδίων από τα οποία διέρχονται με τον ίδιο τρόπο όλοι οι μαθητές. Οι μαθητές μπορούν να μεταβαίνουν σε διαφορετικά επίπεδα και προς τις δύο κατευθύνσεις στο πλαίσιο μιας δραστηριότητας ανάλογα με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν (Clements & Sarama, 2014). Στην παρούσα έρευνα, θεωρήσαμε τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής σε κάθε επίπεδο αλλά και κατά τις μεταβάσεις μεταξύ των επιπέδων ως αφαιρετική διαδικασία. Προκειμένου να μελετήσουμε τον ρόλο του πλαισίου και των διαθέσιμων μέσων στην μαθησιακή διαδικασία, χρησιμοποιούμε τη θεωρία Αφαίρεση εντός Πλαισίου (ΑεΠ) (Abstraction in Context, Hershkowitz et al., 2001). Με βάση την ΑεΠ, η οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο λαμβάνει χώρα μέσα από τρεις επιστημικές δράσεις: (α) την *αναγνώριση* μιας προηγούμενης κατασκευής ως σχετικής με μια προβληματική κατάσταση, (β) την *επαναδόμηση* της υπάρχουσας γνώσης για την επίτευξη ενός στόχου (π.χ. λύση ενός προβλήματος) και (γ) την *παραγωγή μιας νέας κατασκευής* μέσα από την ενσωμάτωση και ενοποίηση προηγούμενων κατασκευών. Συνεπώς, στην παρούσα έρευνα εστιάσαμε στον προσδιορισμό των επιπέδων νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής με τη χρήση των μαθησιακών τροχιών και την περιγραφή της κατασκευής των νοημάτων των μαθητών με τη βοήθεια της ΑεΠ.

ΤΟ ΨΗΦΙΑΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ CASYOPÉE

Το Casyopée διαθέτει ένα παράθυρο Άλγεβρας και ένα παράθυρο Δυναμικής Γεωμετρίας, τα οποία αλληλοσυνδέονται. Οι μαθητές μπορούν να δημιουργούν στο Casyopée ελεύθερα και εξαρτώμενα γεωμετρικά αντικείμενα και να ορίζουν ανεξάρτητα και εξαρτημένα μεγέθη ως αντικείμενα (c0, c1, c2,…).



Σχήμα 1: Τα παράθυρα γεωμετρίας, γεωμετρικών υπολογισμών, πίνακα τιμών και γραφικών παραστάσεων στο Casyopée.

Επιπλέον, μέσω της λειτουργίας της «αυτόματης μοντελοποίησης» οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να ελέγξουν αν μπορεί να οριστεί συνάρτηση μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων μεγεθών (σχ. 1). Σε περίπτωση που μπορεί να οριστεί συνάρτηση, εξάγεται αυτόματα ο αλγεβρικός τύπος της στο παράθυρο της Άλγεβρας, διαφορετικά παρέχεται κατάλληλη πληροφόρηση. Τέλος, μία συνάρτηση μπορεί να μελετηθεί με τη χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων, όπως πίνακα τιμών και γραφικής παράστασης.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Μέθοδος, πλαίσιο, δραστηριότητες και συλλογή δεδομένων

Στην έρευνα συμμετείχε ένα τμήμα Β΄ Λυκείου από ένα Πειραματικό Λύκειο της Αθήνας. Οι 23 μαθητές εργάστηκαν σε 8 ομάδες των 3 για 14 ώρες (45λ.) στη διάρκεια 4 μηνών. Συμμετείχε ο εκπαιδευτικός της τάξης ως ερευνητής και ένας ερευνητής ως συμμετοχικός παρατηρητής. Η παρούσα έρευνα χαρακτηρίζεται ως έρευνα σχεδιασμού (Cobb et al., 2003; Prediger et al., 2015) καθώς: (α) βασίζεται σε καινοτόμες διδακτικές εφαρμογές στο σχολικό πλαίσιο, (β) στοχεύει στη δημιουργία θεωρίας λαμβάνοντας υπόψη τη διδακτική πράξη και τα μέσα που την υποστηρίζουν, (γ) είναι αναστοχαστική, με την έννοια ότι ο σχεδιασμός ενημερώνεται από τη θεωρία και (δ) είναι προσανατολισμένη στην καθημερινή σχολική πρακτική.

Οι δραστηριότητες που εφαρμόστηκαν (πρόβλημα *Υδρορροής, Πρόσοψης καταστήματος, Δεξαμενής πετρελαίου*) αναφέρονταν σε ρεαλιστικά προβλήματα μεγιστοποίησης και η αλληλουχία τους ήταν τέτοια ώστε η συμμεταβολή να εμφανίζεται από απλές σε περισσότερο σύνθετες καταστάσεις, σύμφωνα με τις μαθησιακές τροχιές που αναμένονταν. Στο πρόβλημα της *Υδρορροής* ζητήθηκε ο βέλτιστος σχεδιασμός μιας υδρορροής, ώστε να μεγιστοποιείται η ροή του νερού. Τα υποερωτήματα ακολουθούσαν τον κύκλο μοντελοποίησης και αφορούσαν: (1) πειραματισμό με τη δίπλωση ενός χαρτιού (10cm X 20cm), παρατήρηση των συμμεταβολών και έκφραση αλγεβρικής σχέσης με τη χρήση μίας μεταβλητής, (2) σχεδιασμό και διερεύνηση ενός δυναμικού σχήματος που μοντελοποιεί το πρόβλημα στο Casyopée, (3) δημιουργία της συνάρτησης που μοντελοποιεί το πρόβλημα και (4) επίλυση του προβλήματος μέσω των διαθέσιμων αναπαραστάσεων. Σε επίπεδο μαθηματικών στόχων, αναμενόταν η μετάβαση των μαθητών από τη διαισθητική προσέγγιση της συμμεταβολής μέσω της δίπλωσης του χαρτιού στη νοηματοδότησή της μέσα από τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων. Τα δεδομένα που συλλέχτηκαν αποτελούνται βιντεοσκοπήσεις (τάξης και δύο ομάδων εστίασης) και μαγνητοφωνήσεις (τεσσάρων ομάδων μαθητών). Τα δεδομένα απομαγνητοφωνήθηκαν για την ανάλυση. Στο παρόν άρθρο αναλύουμε τα δεδομένα από τις δύο ομάδες εστίασης (ομ2 – Μ1,Μ2 ομ4 – Μ4,Μ5) κατά την εφαρμογή της δραστηριότητας της *Υδρορροής* (διάρκειας 3 ωρών).

Μέθοδος ανάλυσης

Στην πρώτη φάση της ανάλυσης κωδικοποιήσαμε επεισόδια στα δεδομένα (ανοικτή κωδικοποίηση, Strauss & Corbin, 1998), στα οποία οι μαθητές αναφέρονταν σε συμμεταβαλλόμενα μεγέθη για κάθε διαφορετικό πεδίο του κύκλου μοντελοποίησης. Ακολούθως, αναλύθηκε η εμφάνιση ποιοτικών στοιχείων στη σκέψη των μαθητών για τη συνάρτηση ως συμμεταβολή λαμβάνοντας υπόψη υπάρχουσες κατηγοριοποιήσεις (π.χ. Carlson et al., 2002) και τις μαθησιακές τροχιές που θα μπορούσαν να προκύψουν από την ακολουθία δραστηριοτήτων της *Υδρορροής*. Με συνεχείς συγκρίσεις διαχωρίσαμε κάποιες αρχικές κατηγορίες, ανάλογα με ομοιότητες και διαφορές που εμφανίζονταν στα αντίστοιχα επεισόδια με αποτέλεσμα τον προσδιορισμό έξι διαφορετικών επιπέδων νοηματοδότησης της συμμεταβολής από διαισθητικές σε περισσότερο μαθηματικοποιημένες εκδοχές. Στην δεύτερη φάση της ανάλυσης, αναλύθηκαν γραμμή-γραμμή οι διάλογοι των μαθητών στα επιλεγμένα επεισόδια με τη βοήθεια της ΑεΠ (αναγνώριση-επαναδόμηση-νέα κατασκευή), προκειμένου να περιγραφεί η κατασκευή νοημάτων από τους μαθητές ως αφαιρετική διαδικασία.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Επίπεδο 1: Αναγνώριση των αλληλεξαρτήσεων

Στο επίπεδο 1 οι μαθητές αναγνώριζαν τις αλληλεξαρτήσεις των συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων που είναι απαραίτητες στη μοντελοποίηση του προβλήματος. (π.χ. το μήκος της πλευράς και το εμβαδό διατομής). Όλοι οι μαθητές στην πρώτη ώρα διερεύνησης πειραματίστηκαν με ένα μοντέλο από χαρτί και στη συνέχεια μοντελοποίησαν το πρόβλημα στο λογισμικό δημιουργώντας ένα δυναμικό ορθογώνιο που αναφέρεται στην διατομή της υδρορροής. Το επίπεδο 1 εμφανίστηκε κατά την πρώτη ώρα πειραματισμού των μαθητών (α) με τη βοήθεια του μοντέλου από χαρτί (φυσικό αντικείμενο) και (β) με το δυναμικό ορθογώνιο που κατασκεύασαν στο Casyopée, στο οποίο αναγνώρισαν την αλληλεξάρτηση μεταξύ της πλευράς DC και του εμβαδού του ορθογωνίου στο παράθυρο Δυναμικής Γεωμετρίας (σχ.1). Για παράδειγμα, οι μαθητές της ομάδας 2 πειραματίζονταν στο μοντέλο από χαρτί με κατάλληλες διπλώσεις και παρατηρούσαν την αλληλεξάρτηση των πλευρών με στόχο τη μεγιστοποίηση της ποσότητας του νερού που περνάει από την υδρορροή, δηλαδή του εμβαδού διατομής.

1. Μ1: Για τη μέγιστη ροή νερού θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε το πλάτος, αλλά μέχρι ένα σημείο. Όσο πιο μεγάλο είναι τόσο περισσότερο νερό θα περνάει, όμως τόσο μικρότερα θα είναι τα πλαϊνά τοιχώματα. Συναρτήσει και των δύο πρέπει να βρούμε το…
2. Μ2: Α! Το εμβαδό [ενν. το εμβαδό της διατομής]. Αυτό το ορθογώνιο.

Στο παραπάνω απόσπασμα ο πειραματισμός των μαθητών με το μοντέλο χαρτιού οδήγησε στην αναζήτηση του βέλτιστου τρόπου δίπλωσης. Μέσω της δίπλωσης η Μ1 *αναγνώρισε* την αλληλεξάρτηση των δύο πλευρών με στόχο να μεγιστοποιήσει την ποσότητα νερού και στη συνέχεια παρατηρεί ότι είναι και οι δύο πλευρές απαραίτητες για την εύρεση του άλλου μεγέθους (*επαναδόμηση*). Τέλος, η Μ2 *κατασκευάζει* την αναγνώριση των αλληλεξαρτήσεων, σημειώνοντας ότι το ένα μέγεθος είναι το εμβαδό.

Επίπεδο 2: Σύνδεση της συμμεταβολής ποσοτήτων με τη συμμεταβολή μεγεθών

Στο επίπεδο 2 οι μαθητές αναγνώριζαν ότι η μεταβολή ενός μεγέθους προκαλεί μία αντίστοιχη μεταβολή σε ένα άλλο μέγεθος, δηλαδή το κύριο χαρακτηριστικό είναι η σύνδεση των συμμεταβαλλόμενων μεγεθών. Το επίπεδο 2 εμφανίστηκε κατά τη δεύτερη ώρα μοντελοποίησης του προβλήματος στην προσπάθεια των μαθητών να συνδέσουν τη συμμεταβολή των ποσοτήτων (Δυναμική Γεωμετρία) με τη συμμεταβολή των μεγεθών και των μετρήσεών τους (παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών) (σχ. 1). Ωστόσο, οι μαθητές στο επίπεδο 2 δεν μπορούσαν να δώσουν περαιτέρω πληροφορίες για το είδος της συμμεταβολής. Για παράδειγμα έλεγαν: «Όσο μεταβάλλεται το ένα μεταβάλλεται και το άλλο».

Επίπεδο 3: Κατεύθυνση των μεταβολών των μετρήσεων

Στο επίπεδο 3 οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να περιγράφουν την κατεύθυνση των μεταβολών μεταξύ δύο αλληλοεξαρτώμενων μεγεθών, συσχετίζοντας τα συμμεταβαλλόμενα μεγέθη. Το επίπεδο 3 εμφανίστηκε τη δεύτερη ώρα πειραματισμού των μαθητών, κατά την παρατήρηση των αλλαγών που εμφανίζονται στα παράθυρα του Casyopée και είναι πιο εξεζητημένο από το προηγούμενο επίπεδο καθώς οι μαθητές έδιναν έμφαση στην κατεύθυνση των μεταβολών. Για παράδειγμα έλεγαν: «Όσο το ένα μειώνεται, μειώνεται και το άλλο». Μέσω της μετακίνησης του ελεύθερου σημείου στη Δυναμική Γεωμετρία η ομάδα 4 παρατήρησε ότι προκαλούνται ταυτόχρονες μεταβολές στο δυναμικό σχήμα και στις μετρήσεις των μεγεθών στο παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών.

1. Ε: Πώς κατασκευάσατε το ορθογώνιο;
2. Μ4: Κοιτάξτε το εμβαδό εδώ. Βλέπουμε ότι το μέγιστο εμβαδό είναι 50 και καθώς αλλάζουμε αυτή την τιμή… [εν. την τιμή του DC]
3. Μ5: Ωραία. Επιλέξαμε το σημείο C και φέραμε παράλληλη. Βάλαμε την τεταγμένη ίση με μηδέν, αλλά η τετμημένη είναι ίση με AD.
4. Μ4: Εντάξει. Εδώ δεν μπορούμε να πούμε ότι είναι το μέγιστο. Μπορούμε να δούμε ότι αν αλλάξουμε το σημείο C σε αυτό το ευθύγραμμο τμήμα [εν. Το DC] το εμβαδό συνέχεια μειώνεται και μεγιστοποιείται όταν πάρει τη μέγιστη τιμή του.
5. Μ5: Κοιτάξτε στους γεωμετρικούς υπολογισμούς. Έχουμε τη μέγιστη τιμή του ευθύγραμμου τμήματος DC. Όσο μετακινούμε το C προς τα κάτω, βλέπουμε ότι και το εμβαδό μειώνεται.

Στο επεισόδιο οι μαθητές μετακινώντας το σημείο C, συσχέτισαν τις μεταβολές στο μήκος του ευθυγράμμου τμήματος DC με τις μεταβολές του εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με σκοπό να μεγιστοποιήσουν το εμβαδό διατομής της υδρορροής. Πράγματι, οι διασυνδεόμενες αναπαραστάσεις βοήθησαν τον μαθητή Μ4 να νοηματοδοτήσει την κατεύθυνση των μεταβολών μεταξύ των μετρήσεων (στίχος 2), από την παρατήρηση των συμμεταβαλλόμενων μετρήσεων των μεγεθών. Οι μαθητές *αναγνώρισαν* ότι οι μεταβολές των τιμών του μήκους του DC μεταβάλλουν τις τιμές του εμβαδού. Στη συνέχεια, έκαναν σύντομη παρουσίαση της διερεύνησής τους με σκοπό τη σύνδεση των δύο μεγεθών (*επαναδόμηση* -στίχος 4) για να δώσουν απάντηση στο πρόβλημα. Τέλος, η ομάδα μαθητών *κατασκεύασε* την κατεύθυνση της μεταβολής των συμμεταβαλλόμενων μεγεθών (στίχος 5), όπου ο μαθητής Μ5 αναφέρει ότι η τιμή του εμβαδού μειώνεται καθώς μετακινεί προς την αρχή των αξόνων το ελεύθερο σημείο C, δηλαδή καθώς ελαττώνει το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος DC.

Επίπεδο 4: Νοηματοδότηση της συμμεταβολής μεγεθών ως συμμεταβολή μεταβλητών

Στην αρχή της τρίτης ώρας οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να παρατηρήσουν ότι το ζεύγος από τα συμμεταβαλλόμενα μεγέθη μπορεί να αποτελέσει ένα ζεύγος συμμεταβαλλόμενων μεταβλητών. Στο επίπεδο 4 οι μαθητές παρατηρούσαν ότι η μία μεταβλητή μπορεί να θεωρηθεί ως ανεξάρτητη μεταβλητή, καθώς προκαλεί τις μεταβολές και η άλλη ως εξαρτημένη με σκοπό τη δημιουργία μίας συνάρτησης που μοντελοποιεί το πρόβλημα. Μάλιστα είναι περισσότερο εξεζητημένο από το προηγούμενο καθώς τονίζεται η συναρτησιακή σχέση που έχουν οι δύο μεταβλητές. Για παράδειγμα: «Αν πούμε εξαρτημένη το DA*DC (το εμβαδό), τότε η ανεξάρτητη πρέπει να είναι το DC, αφού αυτό κουνάμε [ενν. το DC]».

Επίπεδο 5: Νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής με βάση τον αλγεβρικό συμβολισμό

Στο επίπεδο 5 οι μαθητές έκαναν περιγραφή της συμμεταβολής των δύο μεταβλητών με μαθηματικούς όρους, δηλαδή γινόταν μια περιγραφή της συμμεταβολής με τη χρήση μόνο αλγεβρικών στοιχείων. Η νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής έγινε σταδιακά την τρίτη ώρα πειραματισμού ξεκινώντας από τη νοηματοδότηση της μεταβολής της κάθε μεταβλητής χωριστά και καταλήγοντας στη σύνδεση των δύο μεταβολών. Για παράδειγμα, οι μαθητές της ομάδας 2 είχαν μοντελοποιήσει το σχήμα στο λογισμικό, είχαν ορίσει την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή και είχαν προσδιορίσει το μέγιστο σημείο (5,50) από τη γραφική παράσταση και τον αλγεβρικό τύπο παρατηρώντας τις μεμονωμένες μεταβολές των δύο μεταβλητών. Στο επόμενο επεισόδιο, οι μαθητές της ομάδας 2 συζητούσαν τους τρόπους με τους οποίους θα έδιναν απάντηση στο πρόβλημα και παράλληλα νοηματοδότησαν τη συνάρτηση ως συμμεταβολή παρατηρώντας τις επιμέρους μεταβολές των στηλών στο παράθυρο του πίνακα τιμών.

1. M1: Από τον πίνακα τιμών βλέπουμε τη μέγιστη τιμή, ότι στο 5.. [το εμβαδόν είναι 50]
2. M2: Μας δείχνει το εμβαδό για κάθε τιμή που μπορεί να πάρει το x με τον περιορισμό που του θέσαμε.
3. M1: Αν αλλάξουμε τα βήματα μας λέει το εμβαδό σε σχέση με την πλευρά DC που μεταβάλλεται με 0.5 βήμα. Βλέπουμε ότι το 5 παραμένει η τιμή που μπορεί να πάρει η πλευρά DC του παρ/μου για να έχει μέγιστο εμβαδό. Παρατηρούμε ότι για τις διάφορες τιμές του x το εμβαδό μεταβάλλεται και βρίσκει μέγιστο στο DC [ενν. ίσο με 5]
4. M3: Περίμενε. Για τις διάφορες τιμές του x το εμβαδό μεταβάλλεται και βρίσκει μέγιστο για x=5 και με εμβαδό ίσο με f(5)=50.

Στο επεισόδιο παρατηρούμε τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής της πλευράς του ορθογωνίου με το εμβαδό από τις μαθήτριες της ομάδας 2, με στόχο τη μεγιστοποίηση του εμβαδού διατομής της υδρορροής. Ο πίνακας τιμών του Casyopée βοήθησε τη μαθήτρια M2 να παρατηρήσει τη μεταβολή των τιμών της πλευράς DC (στίχος 2), παρατηρώντας τις διαφορετικές τιμές. Οι μαθητές *αναγνώρισαν* τη μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής (στίχος 3, επίπεδο 4), καθώς η M2 συσχετίζει τη μεταβολή της πλευράς DC με τη στήλη x του πίνακα τιμών. Ακολούθως, (στίχος 3, επίπεδο 4) η M1 εξετάζει ενδελεχώς τις τιμές της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής με σκοπό τον προσδιορισμό του μέγιστο το εμβαδό, καθώς αλλάζει το βήμα (*επαναδόμηση*). Τέλος, (στίχος 3, επίπεδο 5) η ομάδα μαθητριών *κατασκευάζει* τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής ερμηνεύοντας τις δύο στήλες του πίνακα τιμών.

Επίπεδο 6: Νοηματοδότηση της συμμεταβολής σε διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης

Στο επίπεδο 6 οι μαθητές περιέγραφαν τη συνάρτηση ως συμμεταβολή με μαθηματικούς όρους, συνδέοντας ταυτόχρονα διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Το επίπεδο 6 εμφανίστηκε στις τρεις από τις τέσσερις καταγραφόμενες ομάδες κατά την τρίτη ώρα πειραματισμού όταν οι μαθητές προσπάθησαν να χρησιμοποιήσουν τη συνάρτηση που δημιούργησαν στο λογισμικό για να απαντήσουν στο πρόβλημα. Για παράδειγμα οι μαθητές της ομάδας 2 έκαναν σύνδεση του πίνακα τιμών και της γραφικής παράστασης για να περιγράψουν το πώς έφτασαν στην τελική τους απάντηση νοηματοδοτώντας παράλληλα τη συνάρτηση ως συμμεταβολή με βάση αλγεβρικούς όρους: «Εμφανίζουμε τη συνάρτηση στα γραφήματα και παρατηρούμε ότι είναι μια παραβολή και χρησιμοποιώντας τον πίνακα τιμών του προγράμματος παρατηρούμε ότι για τις διάφορες τιμές του x το εμβαδόν μεταβάλλεται [εvv. η G(x)], και βρίσκει μέγιστο στο G(5)».

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία εστιάσαμε στη διερεύνηση των διαδικασιών νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής από μαθητές Β΄ Λυκείου, κατά τη μοντελοποίηση προβλημάτων στο λογισμικό Casyopée. Σε αυτό το πλαίσιο με τη χρήση των μαθησιακών τροχιών εντοπίσαμε έξι πρωτότυπα ιεραρχημένα επίπεδα για τη συμμεταβολή: (α) αναγνώριση των αλληλεξαρτήσεων, (β) σύνδεση της συμμεταβολής των ποσοτήτων με τη συμμεταβολή μεγεθών, (γ) κατεύθυνση των μεταβολών των μετρήσεων, (δ) νοηματοδότηση της συμμεταβολής μεγεθών ως συμμεταβολή μεταβλητών, (ε) νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής με βάση τον αλγεβρικό συμβολισμό και (στ) νοηματοδότηση της συμμεταβολής σε διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Τα συγκεκριμένα επίπεδα νοηματοδότησης διαφωτίζουν την υπάρχουσα έρευνα παρέχοντας ποιοτικά στοιχεία που χαρακτηρίζουν την εξέλιξη της συναρτησιακής σκέψης των μαθητών μέσα από οι συνδέσεις διαφορετικών αναπαραστάσεων και σταδιακές μεταβάσεις από τις ποσότητες στα μεγέθη και στις μεταβλητές.

Παράλληλα, η περιγραφή της κατασκευής νοημάτων από τους μαθητές με τη χρήση της ΑεΠ ανέδειξε τον κρίσιμο ρόλο του πλαισίου και του λογισμικού Casyopée στην εξέλιξη της μαθησιακής διαδικασίας.

Ευχαριστίες: Η παρούσα εργασία υποστηρίχθηκε από τον Ειδικό Λογαριασμό Κονδυλίων Έρευνας του ΕΚΠΑ (70/3/13297).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352-378.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York, NY: Routledge.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2014). Learning trajectories: Foundations for effective, research-based education. In A. P. Maloney, J. Confrey, & K. H. Nguyen (Eds.), *Learning over time: Learning trajectories in mathematics education* (pp. 1–30). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, v.32, 9-13.

Hershkowitz, R., Schwarz, B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 195-222.

Lagrange, J.-B. & Psycharis, G. (2014). Investigating the potential of computer environments for the teaching and learning of functions: A double analysis from two research traditions. *Technology, Knowledge and Learning*, *19*(3), pp. 255-286.

Lagrange, J.-B. (2014). New representational infrastructures: broadening the focus on functions. *Teaching Mathematics and Its Applications, 33*(3), 179-192.

Prediger, S., Gravemeijer, K., & Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: an overview on achievements and challenges. *ZDM*, *47*(6), 877-891.

Psycharis, G. (2015). Formalising functional dependencies: The potential of technology. *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME) (pp.2388-2395), Prague, Czech Republic.

Strauss, A., & Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research: Procedures and techniques for developing grounded theory*. Thousand Oaks, CA: Sage.