

6^ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών
της Διδακτικής των Μαθηματικών

Επίπεδα νοηματοδότησης
της συνάρτησης ως συμμεταβολής
με τη χρήση μαθησιακών τροχιών

Γεώργιος – Ιγνάτιος Καφετζόπουλος
Γιώργος Ψυχάρης

Δεκέμβριος 2017

Σκεπτικό της έρευνας

- ✓ Έρευνα σχεδιασμού στο πλαίσιο σχολικής τάξης
- ✓ Ερευνάται η νοηματοδότηση της συνάρτησης συμμεταβολής από μαθητές Β΄ Λυκείου
- ✓ Μοντελοποίηση δυναμικών καταστάσεων που σχετίζονται με προβλήματα μεγιστοποίησης με τη χρήση ψηφιακής τεχνολογίας
- ✓ Χρησιμοποιούνται ρεαλιστικές καταστάσεις ως πλαίσιο δραστηριοτήτων
- ✓ Προσδιορισμός επιπέδων ανάπτυξης με τη χρήση των μαθησιακών τροχιών



Θ. Πλαίσιο για την κατανόηση της συμμεταβολής

- ✓ Η συμμεταβολή αφορά στην παρατήρηση των τρόπων με τους οποίους οι αλλαγές των τιμών μίας μεταβλητής ποσότητας προκαλούν αντίστοιχες αλλαγές στις τιμές μίας άλλης μεταβλητής ποσότητας (Carlson et al., 2002)
- Νοητικές ενέργειες:
 1. Εξάρτηση (παρατήρηση των αλλαγών)
 2. Κατεύθυνση αλλαγής (αύξηση ή μείωση)
 3. Ποσοτική συσχέτιση (ποσό αλλαγής)
 4. Μέσος ρυθμός αλλαγής (τιμές συνάρτησης για ομοιόμορφες αυξήσεις στην ανεξάρτητη μεταβλητή)
 5. Στιγμιαίος ρυθμός της αλλαγής (τιμές της συνάρτησης για συνεχείς αλλαγές στην ανεξάρτητη μεταβλητή)
- ✓ Κρίσιμη η μελέτη της εξέλιξης της συναρτησιακής σκέψης μαθητών και φοιτητών



Εννοιολογικά συστατικά της συμμεταβολής και μοντελοποίηση



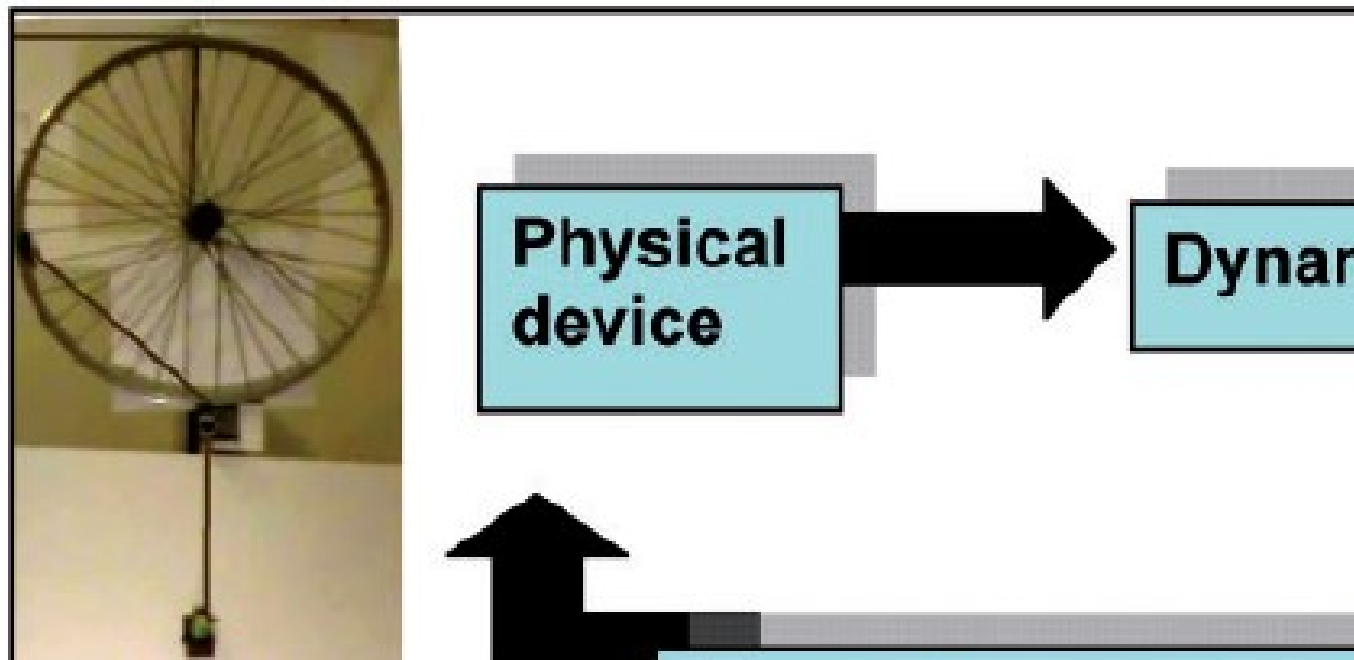
- ✓ Η συμμεταβολή προκύπτει σε ένα επίπεδο ποσοτήτων και σταδιακά γίνεται η μετάβαση στον κόσμο των συναρτήσεων (Artigue & Lagrange, 2009; Thompson, 2011; Lagrange, 2014b)
 - Συμμεταβολή και εξαρτήσεις σε φυσικό σύστημα - **Ποσότητες**
 - Συμμεταβολή και εξαρτήσεις **Μεγεθών** ή μετρήσεων
 - Συναρτήσεις μίας μεταβλητής - **Μεταβλητές**

Ο κύκλος μοντελοποίησης προβλημάτων με τη χρήση της τεχνολογίας

- ✓ Το πεδίο των **προβλημάτων της καθημερινής ζωής** προσφέρεται για την μοντελοποίηση δυναμικών καταστάσεων με τη χρήση της τεχνολογίας (functional cycle of modelling, Lagrange 2014)

186

NEW REPRESENTATIONAL



Learning trajectories (μαθησιακές τροχιές)

- Σκιαγραφούν την ανάπτυξη της σκέψης των μαθητών για τη συνάρτηση ως συμμεταβολή
- Ουσιώδη χαρακτηριστικά των learning trajectories (Clements and Sarama, 2009)
 1. ένας μαθηματικός στόχος
 2. ένα αναπτυξιακό μονοπάτι που οι μαθητές μπορεί να ακολουθήσουν
 3. σειρά εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων που διευκολύνει την κίνηση μέσα στο πιθανό μαθητικό μονοπάτι
- Με την αξιοποίηση της σειράς δραστηριοτήτων που λαμβάνει χώρα σε σχολική τάξη ερευνάμε την πορεία εξέλιξης των μαθητών
- Χαρακτηρισμός της ανάπτυξης των νοηματοδοτήσεων των μαθητών για τη συνάρτηση ως συμμεταβολή από απλές σε πιο σύνθετες μορφές.



Το ψηφιακό περιβάλλον Casyοορέε

- Παρατήρηση συμμεταβολής ποσοτήτων
- Ορισμός ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεγεθών
- Έλεγχος αν δύο συμμεταβαλλόμενα μεγέθη έχουν συναρτησιακή σχέση
- Ερμηνεία συναρτήσεων μέσω αλληλοσυνδεόμενων αναπαραστάσεων

The screenshot shows the Casyοορέε software interface. On the left, there is a geometry diagram of a rectangle with vertices labeled A, B, C, and D. The bottom side is highlighted in yellow, and the right side is highlighted in blue. The coordinates of the bottom-left corner are given as 15.50, 3.15. On the right, there is a 'Create Calculation' panel with a table of calculations:

Calculation	Value
<input checked="" type="checkbox"/> $c0 = DC$	3.041
<input type="checkbox"/> $c1 = DA$	
<input type="checkbox"/> $c2 = AB$	
<input checked="" type="checkbox"/> $c3 = DC \cdot DA$	42.322

Below the table, there are dropdown menus for 'Model', 'Independent', and 'Dependent'.

The screenshot shows the Casyοορέε software interface with a function editor, a graph, and a data table.

Function Editor:

Evaluate Formula Create Expression Create function Create Equation

$f: DC \rightarrow DC \cdot DA$
 $f(x) = 20 \cdot x - 2 \cdot x^2$

Calculate

Graph:

The graph shows a downward-opening parabola on a coordinate system. The x-axis has points labeled 10.1 and 10.2. The y-axis has a point labeled $f(2.731) = 39.7$. The x-axis is labeled with $-\infty$, $x1$, $x2$, ∞ , and f .

Data Table:

x	f(x)
0.000	0.000
1.000	18.000
2.000	32.000
3.000	42.000
4.000	48.000
5.000	50.000
6.000	48.000
7.000	42.000
8.000	32.000
9.000	18.000
10.000	0.000
11.000	Undefined

Table COMMENT: Scrolling of values: -- click in t -- going u

VARIABLE: Initial Value: 0, Step value: 1

NotePad updated at 9:21:49 PM, the 14-Jan

Ερευνητικό Ερώτημα

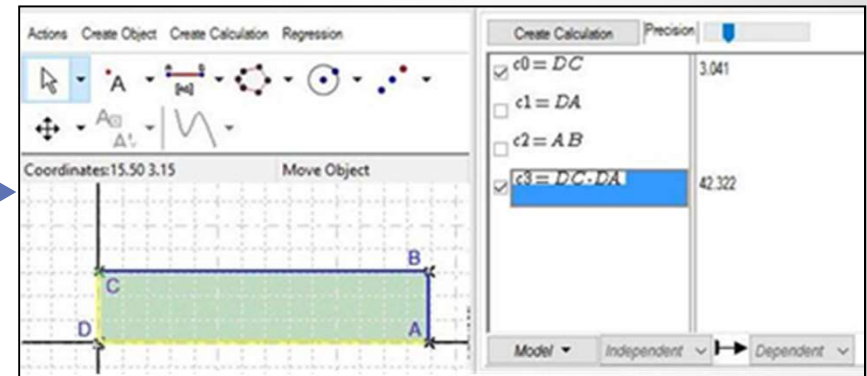
1. Πώς οι μαθητές νοηματοδοτούν τη συνάρτηση ως συμμεταβολή μέσα από δραστηριότητες μοντελοποίησης ρεαλιστικών προβλημάτων;
 - a) Ποια τα επίπεδα νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής;
 - b) Πώς προκύπτουν οι μεταβάσεις μεταξύ των επιπέδων νοηματοδότησης;

Μεθοδολογία

- Έρευνα σχεδιασμού σε σχολική τάξη (Cobb et al., 2003; Prediger et al., 2015)
- 1 τάξη: 14 ώρες συνολικά στη διάρκεια 4 μηνών (4 + 10)
- 23 μαθητές Β΄ Λυκείου (σε ομάδες των τριών) εργάστηκαν με χειραπτικά εργαλεία και το Casyorée
- Οι μαθητές γνώριζαν τη συνάρτηση ως αντιστοιχία
- 1 καθηγητής και 1 ερευνητής ως participant observer
- Ακολούθησαν συνεντεύξεις σε ομάδες

- 3 tasks: Υδρορροή, Σχεδιασμός πρόσοψης καταστήματος, Δεξαμενή πετρελαίου
- 1^ο task: Κατασκευή μίας υδρορροής στο Casyorée που επιτρέπει τη μέγιστη ποσότητα νερού να περνά από αυτό
- Δεδομένα από βιντεοσκοπήσεις, μαγνητοφωνήσεις.
- Ανάλυση δεδομένων δύο ομάδων εστίασης (ομ2- M1, M2, ομ4 – M4, M5)

To task



➤ Υποερωτήματα βασισμένα στον κύκλο μοντελοποίησης:

- (1) Πειραματισμός με τη δίπλωση ενός χαρτιού (10cm X 20cm), διερεύνηση της κατασκευής, παρατήρηση συμμεταβολών και έκφραση αλγεβρικής σχέσης με τη χρήση μίας μεταβλητής
- (2) Σχεδιασμός και διερεύνηση δυναμικού σχήματος που μοντελοποιεί το πρόβλημα στο Casyorée
- (3) Χρήση εργαλείων για την εύρεση συνάρτησης που μοντελοποιεί το πρόβλημα
- (4) Επίλυση του προβλήματος με τη χρήση διαθέσιμων
 - αναπαραστάσεων

Μέθοδος ανάλυσης

➤ Data grounded approach (Strauss & Corbin, 1998)

1. Επιλογή επεισοδίων με αναφορά στα συµµεταβαλλόµενα µεγέθη
2. Εµφάνιση ποιοτικών στοιχείων σκέψης των µαθητών λαµβάνοντας υπόψη προϋπάρχουσες κατηγοριοποιήσεις (Carlson et al., 2002)
3. Συνεχείς συγκρίσεις
4. Δηµιουργία αρχικών κατηγοριών σύµφωνα µε οµοιότητες και διαφορές στα αντίστοιχα επεισόδια
5. Προσδιορισµός 6 επιπέδων νοηµατοδότησης από διαισθητικές σε µαθηµατικοποιηµένες εκδοχές



Αποτελέσματα

➤ Προέκυψαν 6 επίπεδα νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής

1. Αναγνώριση των αλληλεξαρτήσεων
2. Σύνδεση της συμμεταβολής ποσοτήτων με τη συμμεταβολή μεγεθών
3. Κατεύθυνση των μεταβολών των μετρήσεων
4. Νοηματοδότηση της συμμεταβολής μεγεθών ως συμμεταβολή μεταβλητών
5. Νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής με βάση τον αλγεβρικό συμβολισμό
6. Νοηματοδότηση της συμμεταβολής σε διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης



(1) Αναγνώριση των αλληλεξαρτήσεων

- Οι μαθητές αναγνώριζαν τις αλληλεξαρτήσεις των μεταβαλλόμενων ποσοτήτων
 1. με τη βοήθεια του μοντέλου από χαρτί
 2. με το δυναμικό ορθογώνιο που κατασκεύασαν στο Casyorée (πλευρά DC – εμβαδό ορθογωνίου)
- ✓ M1: «πρέπει να μεγιστοποιήσουμε το πλάτος, αλλά μέχρι ένα σημείο. Όσο πιο μεγάλο είναι τόσο περισσότερο νερό θα περνάει, όμως τόσο μικρότερα θα είναι τα πλαϊνά τοιχώματα»
ΣυναρτήσεΙ και των δύο πρέπει να βρούμε το...
- ✓ M2: Α! Το εμβαδό [ενν. το εμβαδό της διατομής]. Αυτό το ορθογώνιο



(2) Σύνδεση της συμμεταβολής ποσοτήτων με τη συμμεταβολή μεγεθών

- Οι μαθητές αναγνώριζαν ότι η μεταβολή ενός μεγέθους προκαλεί μία αντίστοιχη μεταβολή σε ένα άλλο μέγεθος
- Εμφανίστηκε στην προσπάθεια των μαθητών να συνδέσουν τη συμμεταβολή των ποσοτήτων (Δυναμική Γεωμετρία) με τη συμμεταβολή των μεγεθών και των μετρήσεών τους (παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών)
- ✓ Π.χ.: «Όσο μεταβάλλεται το ένα μεταβάλλεται και το άλλο».

(3) Κατεύθυνση των μεταβολών των μετρήσεων

- Εμφανίστηκε κατά την παρατήρηση των μεταβολών στα παράθυρα του [Casyopée](#), μέσω της μετακίνησης του ελεύθερου σημείου (Ομ4)

1.	E: Πώς κατασκευάσατε το ορθογώνιο;
2.	M4: Κοιτάξτε το εμβαδό εδώ. Βλέπουμε ότι το μέγιστο εμβαδό είναι 50 και καθώς αλλάζουμε αυτή την τιμή... [ενν. την τιμή του DC]
3.	M5: Ωραία. Επιλέξαμε το σημείο C και φέραμε παράλληλη. Βάλαμε την τεταγμένη ίση με μηδέν, αλλά η τετμημένη είναι ίση με AD.
4.	M4: Εντάξει. Εδώ δεν μπορούμε να πούμε ότι είναι το μέγιστο. Μπορούμε να δούμε ότι αν αλλάξουμε το σημείο C σε αυτό το ευθύγραμμο τμήμα [ενν. Το DC] το εμβαδό συνέχεια μειώνεται και μεγιστοποιείται όταν πάρει τη μέγιστη τιμή του.
5.	M5: Κοιτάξτε στους γεωμετρικούς υπολογισμούς. Έχουμε τη μέγιστη τιμή του ευθύγραμμου τμήματος DC. Όσο μετακινούμε το C προς τα κάτω, βλέπουμε ότι και το εμβαδό μειώνεται.

(4) Νοηματοδότηση της συμμεταβολής μεγεθών ως συμμεταβολή μεταβλητών

- Οι μαθητές της ομάδας 2 παρατήρησαν ότι:
 1. Ένα ζεύγος από συμμεταβαλλόμενα μεγέθη μπορεί να αποτελέσει ζεύγος συμμεταβαλλόμενων μεταβλητών
 2. Οι μαθητές παρατήρησαν ότι η μία μεταβλητή μπορεί να θεωρηθεί ως ανεξάρτητη καθώς προκαλεί τις μεταβολές και η άλλη ως εξαρτημένη
- Στόχος ήταν η δημιουργία συνάρτησης που μοντελοποιεί το πρόβλημα
- Π.χ.: «Αν πούμε εξαρτημένη το $DA*DC$ (το εμβαδό), τότε η ανεξάρτητη πρέπει να είναι το DC , αφού αυτό κουνάμε [ενν. το DC]».

(5) Νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής με βάση τον αλγεβρικό συμβολισμό

- Περιγραφή της συμμεταβολής των δύο μεταβλητών με μαθηματικούς όρους, δηλαδή γινόταν μια περιγραφή της συμμεταβολής με τη χρήση μόνο αλγεβρικών στοιχείων
- Ομάδα 2: είχαν μοντελοποιήσει το σχήμα, όρισαν μεταβλητές και συζητούσαν τους τρόπους που θα έδιναν απάντηση στο πρόβλημα

1.	M1: Από τον πίνακα τιμών βλέπουμε τη μέγιστη τιμή, ότι στο 5.. [το εμβαδόν είναι 50]
2.	M2: Μας δείχνει το εμβαδό για κάθε τιμή που μπορεί να πάρει το x με τον περιορισμό που του θέσαμε.
3.	M1: Αν αλλάξουμε τα βήματα μας λέει το εμβαδό σε σχέση με την πλευρά DC που μεταβάλλεται με 0.5 βήμα. Βλέπουμε ότι το 5 παραμένει η τιμή που μπορεί να πάρει η πλευρά DC του παρ/μου για να έχει μέγιστο εμβαδό. Παρατηρούμε ότι για τις διάφορες τιμές του x το εμβαδό μεταβάλλεται και βρίσκει μέγιστο στο DC [ενν. ίσο με 5]
4.	M3: Περίμενε. Για τις διάφορες τιμές του x το εμβαδό μεταβάλλεται και βρίσκει μέγιστο για $x=5$ και με εμβαδό ίσο με $f(5)=50$.

(6) Νοηματοδότηση της συμμεταβολής σε διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης

- Περιγραφή της συνάρτησης ως συμμεταβολής με μαθηματικούς όρους, συνδέοντας ταυτόχρονα διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης.
- Εμφανίστηκε σε 3 από τις 4 καταγραφόμενες ομάδες την 3^η ώρα πειραματισμού την 3^η ώρα πειραματισμού
- Χρήση της συνάρτησης στο λογισμικό για την απάντηση στο πρόβλημα
- ✓ Π.χ. (ομ2): «Εμφανίζουμε τη συνάρτηση στα **γραφήματα** και παρατηρούμε ότι είναι μια παραβολή και χρησιμοποιώντας τον **πίνακα τιμών** του προγράμματος παρατηρούμε ότι **για τις διάφορες τιμές του x το εμβαδόν μεταβάλλεται** [ενν. η $G(x)$], και βρίσκει μέγιστο στο $G(5)$ »

Συμπεράσματα

- ✓ Ερευνήθηκαν οι διαδικασίες νοηματοδότησης της συνάρτησης συμμεταβολής από μαθητές Β' Λυκείου
- ✓ Προσδιορισμός 6 επιπέδων ανάπτυξης της συνάρτησης ως συμμεταβολής με τη χρήση των μαθησιακών τροχιών
 1. Αναγνώριση των αλληλεξαρτήσεων
 2. Σύνδεση της συμμεταβολής των ποσοτήτων με τη συμμεταβολή μεγεθών
 3. Κατεύθυνση των μεταβολών των μετρήσεων
 4. Νοηματοδότηση της συμμεταβολής μεγεθών ως συμμεταβολή μεταβλητών
 5. Νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής με βάση τον αλγεβρικό συμβολισμό
 6. Νοηματοδότηση της συμμεταβολής σε διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης



Συμπεράσματα

- ✓ Τα 6 επίπεδα ανάπτυξης της συνάρτησης ως συμμεταβολής παρέχουν ποιοτικά στοιχεία που χαρακτηρίζουν την εξέλιξη της συναρτησιακής σκέψης των μαθητών
 1. Δίνουν έμφαση στις συνδέσεις διαφορετικών αναπαραστάσεων
 2. Σκιαγραφούν τη σταδιακή μετάβαση από τις ποσότητες στα μεγέθη και τέλος στις μεταβλητές
- ✓ Η χρήση της Αφαίρεσης εντός Πλαισίου ανέδειξε τον κρίσιμο ρόλο του πλαισίου και του λογισμικού Casyopée στην εξέλιξη της μαθησιακής διαδικασίας

