ΑΝΑΚΑΛΥΠΤΟΝΤΑΣ 'ΝΕΑ' ΣΧΟΛΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ

***Ελισάβετ Καλογερία, * Χρόνης Κυνηγός, **Ειρήνη Περυσινάκη**

*Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, Φ.Π.Ψ., ΕΚΠΑ

** Πρότυπο Πειραματικό Γεν. Λύκειο Ηρακλείου

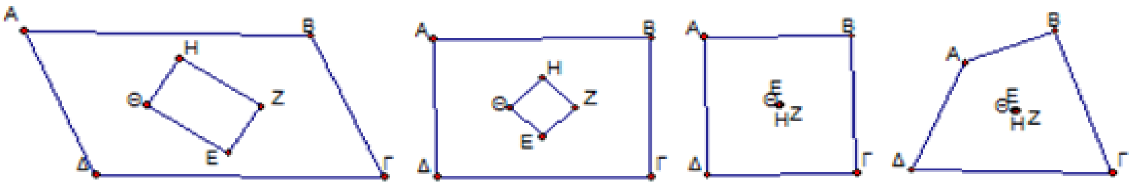
*ekaloger@ppp.uoa.gr, *kynigos@ppp.uoa.gr, **iriniper@sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε επίπεδο σχολικών μαθηματικών, υπάρχει περιθώριο ανακάλυψης; Μπορεί ο μαθητής να σκεφθεί έξω από το πλαίσιο του κατακερματισμού του μαθηματικού περιεχομένου και να 'ανακαλύψει' σχέσεις σύνδεσης των επιμέρους περιοχών; Ποιες διαδικασίες ή εργαλεία μπορούν να ευνοήσουν κάτι τέτοιο; Η 'ανακάλυψη' από εμάς, μιας σχέσης που συνδέει περιγράψιμα τετράπλευρα με κωνικές τομές, σε δραστηριότητα με χρήση περιβάλλοντος δυναμικής γεωμετρίας (ΠΔΓ), έδωσε το έναυσμα, ώστε με την παρούσα έρευνα, να προσεγγίσουμε τα ερωτήματα αυτά. Έτσι, μελετήσαμε τη μαθησιακή διαδικασία που προέκυψε, καθώς οι μαθητές ενεπλάκησαν με χρήση του Geogebra, στη διερεύνηση της δραστηριότητας αυτής.

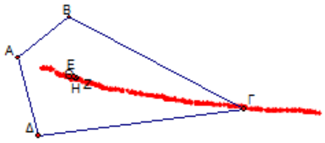
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Υπάρχουν κάποιες δραστηριότητες, που έχουν θεωρηθεί ως υποδειγματικές για μαθηματικές διερευνήσεις με αξιοποίηση ΠΔΓ και έχουν συχνά μελετηθεί από σχετικές έρευνες της διδακτικής μαθηματικών. Μια τέτοιου τύπου δραστηριότητα, είναι η ακόλουθη: «*Έστω ΕΖΗΘ το τετράπλευρο που ορίζεται από τις διχοτόμους των γωνιών ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Διερευνείστε το είδος του ΕΖΗΘ σε σχέση με αυτό του ΑΒΓΔ*». Πρόκειται για μια σειρά παραδοσιακών ασκήσεων των σχολικών εγχειριδίων, που σε ένα περιβάλλον δυναμικού χειρισμού αποκτούν 'ανοιχτή' μορφή και μπορούν να προσεγγισθούν από τον μαθητή ως διαδοχικοί μετασχηματισμοί του ίδιου αντικειμένου (του ΑΒΓΔ) (εικ.1).



Εικόνα 1

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου οι διχοτόμοι συντρέχουν και το ΕΖΗΘ εκφυλίζεται σε σημείο. Αρχικά φαίνεται ότι αυτό συμβαίνει όταν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο. Σύροντας προσεκτικά μια από τις τέσσερις κορυφές του ΑΒΓΔ, έτσι ώστε οι διχοτόμοι να εξακολουθούν να συντρέχουν, οι μαθητές μπορούν να διαπιστώσουν ότι η ιδιότητα αυτή ισχύει και σε άλλα τετράπλευρα και να οδηγηθούν μέσω των μετρήσεων στα περιγράψιμα. Στο επίπεδο της προσωπικής μας ενασχόλησης με ΠΔΓ, ανακαλύψαμε μια σχέση που συνδέει περιγράψιμα τετράπλευρα (που έχουν άνισες πλευρές) με τις κωνικές τομές: βάζοντας ίχνος και σύροντας την τέταρτη κορυφή ώστε οι διχοτόμοι να συντρέχουν, διαπιστώσαμε και δείξαμε θεωρητικά, ότι η κορυφή αυτή κινείται σε υπερβολή (εικ.2). Η εμπειρία αυτή, ανέδειξε τις δυνατότητες που παρέχουν τα ψηφιακά εργαλεία για διεύρυνση και εμπλουτισμό των σχολικών μαθηματικών και μας δημιούργησε το ερώτημα αν - και κάτω από ποιες προϋποθέσεις - οι μαθητές μπορούν να οδηγηθούν σε αυτού του είδους την 'ανακάλυψη'.



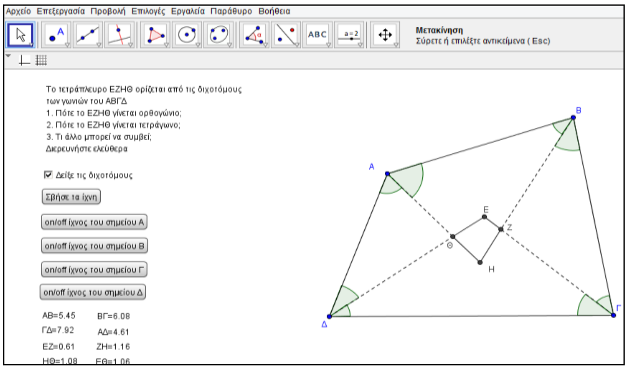
Εικόνα 2

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, η γεωμετρία έχει μάλλον περιφερειακό χαρακτήρα εντός του Προγράμματος Σπουδών (ΠΣ) των μαθηματικών. Η διδασκαλία της εξελίσσεται παράλληλα με αυτήν της άλγεβρας, έτσι ώστε στον μαθητή να δημιουργείται η εντύπωση ότι πρόκειται για δυο ανεξάρτητους τομείς των μαθηματικών. Οι παραδοσιακές διδακτικές πρακτικές, περισσότερο αποσκοπούν στην παρουσίαση της γνώσης στον μαθητή, παρά στην κατασκευή της από αυτόν μέσω της εμπλοκής του σε δραστηριότητες που του παρέχουν αυτονομία (Kynigos et al, 2009). Ειδικότερα στη γεωμετρία, οι μαθητές καλούνται να αποδείξουν μια πρόταση που τους δίνεται έτοιμη, μέσω μιας διαδικασίας που σπάνια περιλαμβάνει δράση ή παραγωγή εικασιών. Η απόδειξη έχει κυρίως το νόημα της επικύρωσης αυτής της πρότασης, χωρίς να δίνεται έμφαση σε άλλες σημαντικές λειτουργίες, όπως της επαλήθευσης, της επεξήγησης, της ανακάλυψης, της επικοινωνίας, της συστηματοποίησης και της διανοητικής πρόκλησης (de Villiers, 1999). Παράλληλα, η διττή φύση της γεωμετρίας, ως θεωρητικού σώματος γνώσεων και ως εργαλείου μοντελοποίησης, αποτελεί συχνά πηγή προβλημάτων για τους μαθητές, που συγχέουν το θεωρητικό επίπεδο με το οπτικό-αντιληπτικό και με τις απαντήσεις τους τείνουν να ικανοποιήσουν κυρίως οπτικούς περιορισμούς (Laborde, 2005). Τα παραπάνω προβλήματα, καθώς και κάποια από αυτά που οι μαθητές αντιμετωπίζουν στην άλγεβρα με την κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής (και ευρύτερα της μεταβολής) η διδασκαλία μπορεί να τα προσεγγίσει μέσα από την αξιοποίηση ΠΔΓ (Laborde, 2005). Η ΔΓ που έχει να κάνει με απτά, μεταβλητά αντικείμενα, μπορεί να αποτελέσει ένα ισχυρό εργαλείο για τον εκπαιδευτικό και μέσα από τη χρήση ανοιχτών προβλημάτων, να εισάγει τους μαθητές σε αυτή τη βαθειά και ουσιαστική φύση των μαθηματικών αντικειμένων. Η ύπαρξη εργαλείων σύνδεσης άλγεβρας με γεωμετρία, συνεισφέρει στην προσέγγιση του μαθηματικού περιεχομένου ως ολότητας, καθώς δίνει τη δυνατότητα αναπαράστασης αφηρημένων αλγεβρικών εννοιών με μορφή γεωμετρικών αντικειμένων και εύρεσης συναρτησιακών σχέσεων μεταξύ στοιχείων μιας γεωμετρικής κατασκευής. Η δραστηριότητα προσδιορισμού των σχέσεων αυτών απαιτεί μια διαδικασία μπρος – πίσω, με εικασίες που βασίζονται στην οπτικοποίηση και τους ελέγχους στο διάγραμμα, η παρατήρηση των οποίων οδηγεί σε πιθανές αφαιρέσεις (Laborde et al, 2006). Η πλέον σημαντική λειτουργία των ΠΔΓ είναι το σύρσιμο. Οι Arzarello et al (2002) προσδιόρισαν 7 είδη συρσίματος των μαθητών, που αντιστοιχούν σε διαφορετικές φάσεις της αποδεικτικής διαδικασίας: *Περιπλανητικό*: με τυχαίο τρόπο μετακινούν βασικά σημεία του σχήματος, για να ανακαλύψουν κανονικότητες. *Δεσμευμένο*: μετακινούν σημείο που είναι συνδεδεμένο με ένα άλλο αντικείμενο. *Καθοδηγούμενο*: μετακινούν σημεία ενός σχήματος, ώστε να πάρει μια συγκεκριμένη μορφή. *Κρυφού γεωμετρικού τόπου* (γτ): μετακινούν ένα σημείο ώστε το σχήμα να διατηρεί μια ιδιότητα που έχει ανακαλυφθεί. Το σημείο που μετακινείται ακολουθεί ένα μονοπάτι, ακόμα και αν οι χρήστες δεν το συνειδητοποιούν. Ωστόσο, οι μαθητές σπάνια χρησιμοποιούν αυθόρμητα το σύρσιμο αυτό (Baccaglini-Frank and Mariotti, 2010). Τα είδη αυτά, αντιστοιχούν σε φάσεις δημιουργίας εικασιών, ενώ τα υπόλοιπα 3 είδη συρσίματος (*γραμμής, συνδεδεμένο, ελέγχου*) σηματοδοτούν τη μετάβαση προς την τυπική απόδειξη. Οι δραστηριότητες μπορεί ανάλογα με τη στοχοθεσία του εκπαιδευτικού να περιλαμβάνουν: α) Την εξερεύνηση μιας κατασκευής που δίνεται έτοιμη στους μαθητές, ώστε να ανακαλύψουν τα ενσωματωμένα σε αυτήν μαθηματικά. Η κατασκευή αυτή, εάν έχει συμπεριλάβει με σωστό τρόπο τις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων, μέσω του συρσίματος ελέγχου διατηρεί τις ιδιότητες αυτές και θεωρείται ως '*ανθεκτική'* στο σύρσιμο. Οι ανθεκτικές κατασκευές βοηθούν τον μαθητή να διακρίνει τις ιδιότητες που είναι συμπτωματικές (οπτικές) από αυτές που είναι απαραίτητες, καθώς και τις ιδιότητες που είναι πάντα αληθείς, από άλλες πιο ειδικές (Laborde, 2005). β) Την κατασκευή ενός γεωμετρικού αντικειμένου από τους ίδιους τους μαθητές, άλλοτε καθοδηγώντας τους και άλλοτε όχι. Το αντικείμενο αυτό, ανάλογα με τη διαδικασία κατασκευής του, μπορεί να αποτελεί μια '*ανθεκτική'* ή μια '*εύπλαστη'* κατασκευή. Η διάκριση των κατασκευών σε αυτά τα δυο είδη, έγινε αρχικά από την Healy (2000), και ενώ μέχρι τότε δινόταν ιδιαίτερη έμφαση στις 'ανθεκτικές', οι οποίες θεωρούνταν το βασικό πλεονέκτημα των ΠΔΓ, σταδιακά άρχισε να αναδεικνύεται η σημασία των 'εύπλαστων', της συμπληρωματικότητάς τους με τις ανθεκτικές και της ανάγκης διδακτικής τους αξιοποίησης. Κατά τη διάρκεια του συρσίματος ελέγχου μιας ανθεκτικής κατασκευής, η προσοχή μετακινείται από το γενικό προς το ειδικό, καθώς παράγεται μια οικογένεια σχημάτων με την ίδια γεωμετρική 'αμφίεση' (πχ αν Μ σημείο κύκλου διαμέτρου ΑΒ, τότε για κάθε θέση του Μ, οι μετρήσεις δείχνουν ότι η γωνία $\widehat{AMB}$=90^{O}). Σε μια εύπλαστη κατασκευή, το σύρσιμο δεν χρησιμοποιείται απλά ως εργαλείο ελέγχου, αλλά αποτελεί μέρος της κατασκευής. Οι μαθητές παρατηρούν πώς η υπο διαπραγμάτευση ιδιότητα γίνεται εμφανής, μέσω μιας άλλης ιδιότητας που ικανοποιείται χειρονακτικά ή οπτικά. Έτσι, το γενικό προκύπτει από το ειδικό, μέσα από αναζήτηση του συνόλου των σημείων που ικανοποιούν τις δοσμένες συνθήκες (πχ αν στο επίπεδο κύκλου διαμέτρου ΑΒ, θεωρήσουμε σημείο Μ, διερευνώντας το είδος της γωνίας ΑΜΒ για τις διαφορετικές θέσεις του Μ προκύπτουν τρεις περιπτώσεις).

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΟΡΟΛΟΓΙΑ

Στους μαθητές δόθηκε έτοιμο αρχείο (εικ.3), με τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ και τρία ερωτήματα: «*1. Πότε το ΕΖΗΘ γίνεται ορθογώνιο; 2. Πότε το ΕΖΗΘ γίνεται τετράγωνο; 3. Τι άλλο μπορεί να συμβεί; Διερευνείστε ελεύθερα*». Λαμβάνοντας υπόψη ευρήματα και ορολογία ερευνών των Baccaglini - Frank & Mariotti (2010) η διερεύνηση αναμενόταν να ακολουθήσει τις εξής φάσεις: 1) Αρχικά, περιπλανητικό και στη συνέχεια καθοδηγούμενο σύρσιμο, ώστε το ΕΖΗΘ να πάρει συγκεκριμένη μορφή (παραλ/γραμμο, ορθογώνιο, τετράγωνο) και να διατυπωθούν αντίστοιχες εικασίες. Η διδακτική μας εστίαση ήταν στην περίπτωση της ταύτισης των Ε, Ζ, Η, Θ. Η διατήρησή της μέσω συρσίματος κρυφού γ.τ., αναμέναμε να τους οδηγήσει στα περιγράψιμα τετράπλευρα. Το σημείο τομής τους, θεωρείται ως μια νέα σταθερά, που ταυτόχρονα αποτελεί μια εύπλαστη κατασκευή. Για αυτού του τύπου τις σταθερές, που δεν ανήκουν στα δεδομένα του προβλήματος, αλλά δημιουργούνται κατά τη διερεύνηση σε ΠΔΓ, οι Baccaglini-Frank και Mariotti (2010) εισήγαγαν τον όρο '*σκόπιμα προκληθείσα σταθερά*' (ΣΠΣ), ενώ το σύρσιμο που έχει ως στόχο την διατήρηση της ΣΠΣ, το ονόμασαν '*σύρσιμο διατήρησης*' (ΣΔ), όρο τον οποίο θα χρησιμοποιούμε από εδώ και στο εξής. Στην περίπτωσή μας, μέσω του ΣΔ οι μαθητές αναμένεται να οδηγηθούν στη διαπίστωση ότι όταν η μια από τις τέσσερις κορυφές κινείται έτσι ώστε οι διχοτόμοι να συντρέχουν, τότε η κίνηση αυτή γίνεται πάνω σε μια σταθερή γραμμή. Οι Baccaglini-Frank και Mariotti ονομάζουν αυτού του τύπου τις σταθερές ως '*σταθερές παρατηρούμενες κατά το σύρσιμο*' (ΣΠΚΣ). 2) Η ΣΠΚΣ πρέπει να εκφρασθεί με γεωμετρική ορολογία. Η κορυφή φαίνεται να κινείται κατά μήκος ενός μονοπατιού: ευθείας; καμπύλης; 3) Στη συνέχεια αναμένεται η ενεργοποίηση του ίχνους, ώστε να εκφρασθεί η πρόταση που περιγράφει γεωμετρικά το μονοπάτι, με επιχείρημα βασισμένο στην οικειοποίηση των εργαλείων (instrumented argument): η τέταρτη κορυφή κινείται σε υπερβολή. 5) Σύρσιμο ελέγχου και διατύπωση υποθετικής σχέσης ανάμεσα σε ΣΠΣ και ΣΠΚΣ.



Εικόνα 3

ΜΕΘΟΔΟΣ

Η παραπάνω δραστηριότητα δόθηκε από την καθηγήτρια (Κ) σε 12μελές τμήμα γενικής παιδείας Β΄ Λυκείου, ωστόσο η ερευνητική εστίαση έγινε σε 3 διμελείς ομάδες μαθητών τεχνολογικής κατεύθυνσης, εξοικειωμένους με τη χρήση λογισμικού ΔΓ (Ο1: Βάλια -Νανά, Ο2: Τίνα - Χαρά, Ο3: Τέλης-Νίκος). Πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο στη λήξη της σχολικής χρονιάς, ώστε οι μαθητές να έχουν ολοκληρώσει τη διδακτέα ύλη της γεωμετρίας και τις κωνικές τομές. Μαγνητοφωνήθηκαν οι συνομιλίες των μαθητών και από τις οθόνες φωτογραφήθηκαν στιγμιότυπα. Μέσα από ποιοτική ανάλυση των δεδομένων, θελήσαμε να μελετήσουμε τη διαδικασία μέσω της οποίας προσδιορίζεται στο συγκεκριμένο πρόβλημα από τους μαθητές μια ΣΠΣ, πώς η διατήρησή της τους οδηγεί σε μια ΣΠΚΣ, τα επιχειρήματα που χρησιμοποιούν για να την εκφράσουν με μαθηματικό τρόπο και αν τελικά είναι εφικτή η 'ανακάλυψη' της σχέσης που συνδέει ΣΠΣ και ΣΠΚΣ.

ΑΝΑΛΥΣΗ

Η Ο1 χρησιμοποιώντας διαδοχικά περιπλανητικό και καθοδηγούμενο σύρσιμο απάντησε σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα τις δυο πρώτες ερωτήσεις του φύλου εργασίας. Οι πρώτες δυσκολίες παρατηρούνται στην απάντηση του τρίτου ερωτήματος «*τι άλλο μπορεί να συμβεί;*».

Βάλια: Εντάξει, ν' απαντήσω πότε γίνεται σημείο; Όταν είναι τετράγωνο. Αυτό δεν είναι; Τι άλλο θέλετε να πούμε;

Κ: Μόνο όταν είναι τετράγωνο γίνεται σημείο; Για κάντε το πάλι.

Βάλια: Κι όταν είναι… κι όταν είναι και ρόμβος, διότι οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες (επεξήγηση για τον ρόμβο).

Κ: (προς ομάδα 1) Να σας το δυσκολέψω λίγο. Τα ΑΒ και ΒΓ να μην είναι ίσα. Μπορείτε να το κάνετε σημείο κινώντας μόνο το Δ; Το κάνω λίγο πιο μικρό… Εδώ που έγινε σημείο υπάρχει κάποια σχέση στα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΑΔ;

Βάλια: Τι σχέση να υπάρχει; Α! αριστερά εννοείτε τις μετρήσεις των μηκών;

Τα μέλη της Ο1 φαίνεται να αρκούνται στη διαπίστωση αυτή, ωστόσο αντιλαμβάνονται ότι η Κ ζητά κάτι παραπάνω. Η Βάλια πλαισιώνει θεωρητικά με ιδιαίτερη ευκολία το εύρημά της (για τον ρόμβο), ενώ την ίδια χρονική στιγμή οι υπόλοιπες ομάδες δεν έχουν ακόμα απαντήσει τα δυο πρώτα ερωτήματα. Το επιχείρημά της, προκύπτει μάλλον από τη γνώση της θεωρίας και λιγότερο από το σύρσιμο των Α, Β, Γ, Δ. Το ΣΔ ακόμα δεν έχει χρησιμοποιηθεί. Η Κ κατευθύνει την προσοχή της Ο1 στην περίπτωση το ΑΒΓΔ να μην είναι κάποια από τα γνωστά είδη τετραπλεύρου, 'χαλώντας' τις πλευρικές ιδιότητες του ρόμβου και παρακινεί να βρουν σχέση ανάμεσα στις πλευρές του ΑΒΓΔ.

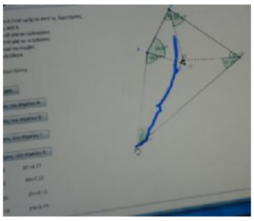
Κ: Πότε είναι ορθογώνιο; πότε τετράγωνο; (απευθυνόμενη στις άλλες ομάδες)

Τίνα: Νομίζω, όταν είναι παραλληλόγραμμο γίνεται ορθογώνιο. Κι όταν γίνει ορθογώνιο, γίνεται τετράγωνο το από μέσα

Κ: Μάλιστα. Μπορείς να εμφανίσεις το πλέγμα, Προβολή, Πλέγμα,… φτιάξε ένα παραλληλόγραμμο να δούμε αν είναι ορθογώνιο πραγματικά. Βάλτε τα σημεία στο πλέγμα, στα κομβικά σημεία. Κάθονται καλύτερα εκεί. …..

Χαρά: Σωστότατο είναι.

Η Τίνα δεν φάνηκε να είναι σίγουρη για τη διαπίστωσή της και η Κ της πρότεινε να χρησιμοποιήσει ένα εργαλείο που θα βοηθούσε στην ισχυροποίησή της (πλέγμα), όπως και έγινε.



Εικόνα 4

Βάλια: Εγώ κάνω το σημείο τώρα. Κυκλική δεν είναι αυτή η γραμμή (εικ.4);

Κ: Κάπως καμπύλη φαίνεται ε;

Η Βάλια, έχει ήδη αναγνωρίσει την ΣΠΣ, δηλαδή ότι το ΕΖΗΘ γίνεται σημείο και σε άλλου είδους τετράπλευρα και ότι όταν αυτό συμβαίνει, τότε το Δ κινείται σε κάποιο μονοπάτι (ΣΠΚΣ). Ενεργοποιεί το ίχνος και με ΣΔ, προσπαθεί να αναπαραστήσει οπτικά την ΣΠΚΣ.

Τέλης: Κυρία, έχετε πρόχειρο χαρτί να αποδείξουμε ότι όταν το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, το ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο;

Τίνα και Χαρά: Α! Σημείο! Α, α, α, α! Γίνεται σημείο! Τελειώσαμε!

Και ενώ τα μέλη της Ο3 αποφάσισαν εγκαταλείψουν το υπολογιστικό περιβάλλον και να λύσουν την περίπτωση του ορθογωνίου παραδοσιακά, τα μέλη της Ο2, όπως και προηγουμένως της Ο1, φαίνεται να αρκούνται στην εύρεση της ΣΠΣ ('*τελειώσαμε*').

Κ (στην Ο1): Τι καμπύλη θα μπορούσε να είναι;

Βάλια: Είναι κύκλος με κέντρο το Α και ακτίνα μέχρι το Δ; (μετακινεί το Δ)

Όσο είναι μέσα στο τρίγωνο όμως… (εννοεί το ΑΒΓ)

Κ: Φαίνεται να είναι κάτι με κέντρο το Α, ε;

Το μη προφανές είδος της καμπύλης, δυσκολεύει τα μέλη της Ο1 στην περιγραφή με γεωμετρικούς όρους της ΣΠΚΣ. Η καμπυλότητα, φαίνεται να συνδέεται στο μυαλό των μαθητών κυρίως με την έννοια του κύκλου. Παράλληλα, η Ο3 συνεχίζει στο χαρτί, ενώ τα μέλη της Ο2 δεν έχουν κατανοήσει για ποιο λόγο πρέπει να συνεχίσουν τη διερεύνηση:

Τίνα: Κυρία τι κάνουν οι άλλοι; Μα τι θέλετε άλλο να κάνουμε;

Κ: Το σημείο, να δείτε μήπως κάτι συμβαίνει. Αυτό που είπα στη Βάλια, είναι ότι το κρατάμε σταθερό… Μην κουνάς τις τρεις κορυφές, κούνα μόνο το Γ ας πούμε! Και δες πότε παραμένει σημείο όμως.

Κ: (προς την Βάλια) Καμιά ιδέα; Βλέπεις και τις ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αν έχουν σχέση; (περιμένει)…. Να σας μαρτυρήσω ποιες; Οι απέναντι πλευρές…

Βάλια: Είναι το διπλάσιο; Και η μία είναι το διπλάσιο και η άλλη είναι το μισό;

Κ: Μοιάζει να είναι αλλά… Για κίνησέ το κι άλλο… Αφού δεν αλλάζουν τα ΑΒ, ΒΓ. Για πήγαινε να το κάνουμε ακέραια… ε… περίπου. Όχι-όχι δεν χρειάζεται να είναι ακέραια. Για άστο κει, για άστο κει! Έχουν σχέση;

Τίνα: Όταν το Γ κινείται.

Χαρά: Ναι, είναι σημείο τα Ε, Ζ, Η, και είναι σε ευθεία το Γ.

Τέλης: Κυρία, το φτιάξαμε τώρα το τετράγωνο.

Η Βάλια δεν έχει ακόμα προσδιορίσει με ακρίβεια την ΣΠΚΣ, ωστόσο προσπαθεί να βρει τη συνθήκη διατήρησης της ΣΠΣ. Παράλληλα, η Ο2 προσπαθεί να προσδιορίσει την ΣΠΚΣ και η Ο3 το ερώτημα 2.

Βάλια: Τι είναι; κλάσμα;

Κ: Μπορείτε και να κάνετε και άλλες πράξεις, εκτός από λόγους που παίρνεις.

Τίνα: Τι ψάχνουμε καταρχήν; (παρακολουθεί τη συνομιλία Κ και Βάλιας)

Κ: Λέμε, όταν γίνει σημείο, αυτό ψάχνει, τι σχέση έχουν οι πλευρές του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

Βάλια. Α! Το άθροισμα είναι σταθερό; Οι δύο απέναντι. Το άθροισμά τους είναι σταθερό.

Κ: Για επιβεβαίωσέ το.

Βάλια: Κυρία, το άθροισμά τους είναι ίδιο (με ΣΔ παρατηρεί τις μετρήσεις).

Κ: Άρα η καμπύλη σου αυτή τι είναι Βάλια;

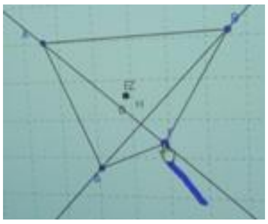
Τίνα: Ποια καμπύλη; (παρακολουθεί τη συνομιλία Κ και Βάλιας)

Κ: Έχει βάλει ίχνος, σ' αυτό το σημείο το ένα, το Γ για σένα, το Δ γι' αυτήν που μετακινεί, έχει βάλει ίχνος.

Τίνα: Σε ευθεία πάντα δε μετακινείται;

Κ: Για να δούμε, βάλε ίχνος!

Χαρά: Σε ευθεία μετακινείται (εικ.5)



Εικόνα 5

Η περιγραφή με γεωμετρικούς όρους της ΣΠΚΣ δημιουργεί δυσκολίες στην Ο2, καθώς δεν μπορούν να διακρίνουν ιδιότητες που συμβαίνουν σε ειδικές περιπτώσεις (ευθεία όταν ΑΒ=ΑΔ), από άλλες γενικότερες. Παράλληλα, αναδεικνύεται το ζήτημα της μη εξοικείωσής τους με την αξιοποίηση των εργαλείων για διερεύνηση και αλλοίωση των συμπτωματικών ιδιοτήτων του σχήματος με στόχο την εύρεση μιας πιο γενικεύσιμης ιδιότητας.

Βάλια: Παραβολή είναι, τι είναι; Έλλειψη δεν είναι το άθροισμα σταθερό;

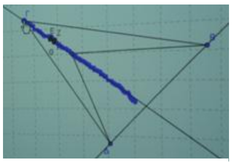
Κ: Εδώ έχουμε το άθροισμα των απέναντι σταθερό. Οι δύο διαδοχικές; Ας πούμε, οι ΑΒ και οι ΑΔ τι σχέση έχουν; Για βάλ' τα κάτω σ' ένα χαρτί, άθροισμα σταθερό... Κι ένα στυλό…

Η ανακάλυψη της σχέσης των πλευρών περιγράψιμου τετραπλεύρου από τη Βάλια, ήλθε ως αποτέλεσμα διδακτικής καθοδήγησης. Η μετατροπή της σε μορφή διαφορών, ώστε να καταστεί αναγνωρίσιμη η καμπύλη που γράφει η τέταρτη κορυφή, φαίνεται να δυσκολεύει τους μαθητές, καθώς εκτός από την μετατροπή, απαιτείται και η μετάβαση σε ένα 'άλλο πλαίσιο' (ως προς την παραδοσιακή διδασκαλία), αυτό της αναλυτικής γεωμετρίας.

Χαρά: Κυρία που βλέπετε την καμπύλη (εικ.6);

Κ: Μου αρέσει!

Χαρά -Τίνα: Τι σας αρέσει κυρία; είναι λάθος!



Εικόνα 6

Κ: Κινήστε το λίγο ακόμα… Έτσι πάει! Σε ξεγελάει στην αρχή… Μήπως είναι σχεδόν ίσα τα ΑΒ, ΑΔ; για κάντε τα πιο άνισα.

Χαρά: Ωραία, άνισα; Δηλαδή έτσι;

Κ: Τι θα μπορούσε να 'ναι; Κοιτάζετε καθόλου τα μεγέθη των πλευρών;

Εικόνα 7

Βάλια: Είναι υπερβολή! Η αφαίρεσή τους είναι σταθερή! (εικ.7)

Κ: Είσαι σίγουρη; Γιατί;

Χαρά: Τι σταθερό χέρι που έχεις! Εμάς δεν μας βγήκε έτσι!

Η περιγραφή με γεωμετρικούς όρους της ΣΠΚΣ από την Ο1, ήλθε μετά από την εύρεση της σχέσης διατήρησης της ΣΠΣ και φάνηκε ότι συνδέεται με το επίπεδο γνώσεων της Βάλιας, καθώς και με κιναισθητικές της δεξιότητες.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συνοψίζοντας, διαπιστώνουμε ότι οι τρεις ομάδες, έφτασαν σε διαφορετικό σημείο σε σχέση με την αναμενόμενη από εμάς πορεία: Η Ο1, ολοκλήρωσε τα προβλεπόμενα, με τρία κρίσιμα σημεία που απαίτησαν την καθοδήγηση της καθηγήτριας: τον προσδιορισμό της ΣΠΣ, της ΣΠΚΣ και της εύρεσης της μεταξύ τους σχέσης. Για την ΣΠΣ, οι μαθητές φαίνεται να αρκούνται στον προσδιορισμό μιας ειδικής περίπτωσης και δεν αναζητούν περισσότερες που θα τους οδηγούσαν σε ένα πιο γενικευμένο συμπέρασμα. Η ΣΠΚΣ, έδειξε ότι απαιτεί ένα συνδυασμό κιναισθητικών δεξιοτήτων με δυνατότητες σύνδεσης του μαθηματικού περιεχομένου διαφορετικών γνωστικών περιοχών, ενώ η εξεύρεση της σχέσης, ανέδειξε τα προβλήματα της παρατήρησης και αξιοποίησης των μετρήσεων σε περιπτώσεις σύνθετων σχέσεων (όπως της ισότητας αθροισμάτων των απέναντι πλευρών), που δεν φαίνεται να είναι μια διαδικασία εύκολη για τους μαθητές. Η εξεύρεση διδακτικών μεθόδων με μικρότερο βαθμό καθοδήγησης, αποτελεί ζητούμενο. Παράγοντες που φαίνεται να συνετέλεσαν στην ολοκλήρωση της προσπάθειας από την Ο1, ήταν το επίπεδο των γεωμετρικών γνώσεων της Βάλιας και οι δεξιότητές της κατά το σύρσιμο. Η Ο2, έφτασε μέχρι τον προσδιορισμό της ΣΠΚΣ. Ωστόσο, τα μέλη της δεν αξιοποίησαν τις δυνατότητες των εργαλείων, παρά μόνο μετά από υπόδειξη της Κ, ενώ δεν έδειξαν να κατανοούν το λόγο για τον οποίο έπρεπε να συνεχίσουν τη διερεύνηση. Τέλος, η Ο3 δεν κατάφερε να φτάσει στην εισαγωγή της ΣΠΣ.

Τα παραπάνω ευρήματα, μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η συμπερίληψη αντίστοιχων δραστηριοτήτων στις σχολικές τάξεις, εντός του υπάρχοντος εκπαιδευτικού συστήματος, δεν είναι ούτε εύκολες, ούτε αυτονόητες. Αυξάνουν την πολυπλοκότητα της διδασκαλίας, καθώς ο εκπαιδευτικός απαιτείται να διαχειρισθεί τους διαφορετικούς ρυθμούς των ομάδων ή των μελών των ομάδων, ενώ ταυτόχρονα, οι ίδιοι οι μαθητές δεν αισθάνονται την ανάγκη της διερεύνησης, αποζητώντας από τον εκπαιδευτικό να τους 'καθοδηγήσει' και να τους αποκαλύψει 'τι ακριβώς έχει στο μυαλό του'. Σε σχέση με το μαθηματικό περιεχόμενο, η μετάβαση από το 'γεωμετρικό' στο 'αλγεβρικό' πλαίσιο και η μεταξύ τους σύνδεση, εμφάνισε ιδιαίτερα υψηλό βαθμό δυσκολίας, καθώς οι μαθητές δεν έχουν εξοικειωθεί με αυτό.

Η παρούσα έρευνα βασίσθηκε στην παραδοχή ότι οι συγκεκριμένες δραστηριότητες έχουν πρόσθετη μαθησιακή αξία και προσδιόρισε σε ένα πρώτο επίπεδο τις δυσκολίες εφαρμογής τους, οι οποίες - πέραν των προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με αυτό καθαυτό το μαθηματικό περιεχόμενο - εστιάζονται στο πώς αντιλαμβάνονται τη διδασκαλία των μαθηματικών, στο βαθμό εξοικείωσής τους με τα εργαλεία και σε ζητήματα διδακτικής διαχείρισης.

Οι διαπιστώσεις αυτές, επιβάλλουν τον επαναπροσδιορισμό μιας σειράς παραμέτρων που αφορούν στη διδασκαλία των μαθηματικών, όπως την συχνότητα ένταξης αντίστοιχων δραστηριοτήτων στο ΠΣ, καθώς και την δυνατότητα σχεδιασμού - διδακτικής υποστήριξής τους από τον εκπαιδευτικό. Οι ανωτέρω παράμετροι, παραπέμπουν στο ζήτημα του επανασχεδιασμού του ΠΣ - κυρίως σε ότι αφορά στην έκταση και το περιεχόμενό του - και στο ζήτημα της επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών, ώστε να είναι σε θέση να σχεδιάσουν και να υποστηρίξουν αντίστοιχες δραστηριότητες, καλλιεργώντας κουλτούρα μύησης των μαθητών σε αυτές.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arzarello, F., Olivero, Paola, D., Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments, ZDM, 34 (3), pp.66-72.

Baccaglini-Frank, A., Mariotti, M.A. (2010). Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model, *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 15, pp.225-253

De Villiers, M. (1999). The role and function of proof with Sketchpad. Excerpt from Introduction to de Villiers, M. (1999). *Rethinking Proof with Sketchpad*, Key Curriculum Press.

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometric relationship: interactions with robust and soft Cabri constructions. In *Proceedings of the 24th conference of the IGPME*, v.1, pp.103–117, Hiroshima, Japan.

Kynigos, C., Philippou, G., Potari, D. Sakonidis, H. (2009). Research in mathematics education in Greece and Cyprus. In Proceedings of the PME33, v.1, 303-322.

Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions. In *Proceedings of the 10th Asian technology conference in mathematics*, pp.22–35, Korea, National University of Education.

Laborde C., Kynigos, C., Hollebrands, K., Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutiérrez, P. Boero (eds.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, Sense Publishers, 2