ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα έρευνα αποτελεί συνέχεια προηγούμενης και αποσκοπεί να μελετήσει αν και πώς το μέγεθος του διαιρέτη και του πηλίκου επηρεάζει την επίδοση των παιδιών ηλικίας 10 ετών. Στο πείραμα έλαβαν μέρος 18 υποκείμενα, 9 μαθητές και 9 μαθήτριες της Δ΄ Δημοτικού με μέση ηλικία 9.7 χρόνων. Την ύλη του πειράματος αποτέλεσαν 40 πράξεις πλήρους διαίρεσης, των οποίων ο διαιρετέος ήταν διψήφιος αριθμός από το 10 έως το 81, ο διαιρέτης ήταν μονοψήφιος αριθμός από το 5 έως το 9 και το πηλίκο που έπρεπε να βρεθεί ήταν μονοψήφιος αριθμός από το 2 έως το 9. Η εξέταση ήταν ατομική. Όλα τα υποκείμενα έπρεπε να λύσουν νοερά όλες τις πράξεις διαίρεσης γρήγορα και σωστά και να πουν το αποτέλεσμα. Καταγράφονταν ο χρόνος λύσης και η απάντηση. Κάθε υποκείμενο, μόλις έδινε το αποτέλεσμα της πράξης, έπρεπε να πει πώς ακριβώς έλυσε την πράξη. Η στατιστική ανάλυση έδειξε ότι το μέγεθος του διαιρέτη επηρεάζει σε στατιστικώς σημαντικό βαθμό το χρόνο λύσης σε όλα τα επίπεδα, ενώ το μέγεθος του πηλίκου επηρεάζει το χρόνο λύσης μόνο στα επίπεδα 2, 3, 4, 5 και 9. Η στατιστική ανάλυση των λαθών έδειξε ότι, στα επίπεδα του διαιρέτη 5, 7, 8 και 9 οι διαφορές των λαθών ήταν στατιστικώς σημαντικές, ενώ μόνο στο επίπεδο 6 του πηλίκου οι διαφορές των λαθών ήταν στατιστικώς σημαντικές. Η ποιοτική ανάλυση των στρατηγικών και των λαθών έδωσε επίσης ενδιαφέροντα ευρήματα. Τα αποτελέσματα της έρευνας συζητώνται στα πλαίσια των υπαρχόντων εμπειρικών ευρημάτων και ερμηνεύονται με βάση ένα θεωρητικό μοντέλο για τη λύση πράξεων διαίρεσης που προτείνεται.

ABSTRACT

The present study is a continuation of a previous one and was designed with the aim to study whether and in what way the magnitude of the divisor or the quotient influences the performance of ten years old children in carrying out divisions. There were examined 18 subjects (9 male and 9 female) who were students of the 4th grade of grammar school (average age 9.7 years). The test employed in the experiment consisted of 40 division operations in which the divident was a two digit number between 10 and 81 and the divisor was a single

1

Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΗ ΚΑΙ ΤΟΥ ΠΗΛΙΚΟΥ ΣΤΗ ΛΥΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΔΙΑΙΡΕΣΗΣ

Η λύση των αριθμητικών πράξεων απασχόλησε πρώτα τους εκπαιδευτικούς ψυχολόγους από τις αρχές του αιώνα (Thorndike, 1922· Clapp, 1924· Brownell, 1928· Knight & Behrens, 1928· Wheeler, 1939). Οι ερευνητές όμως αυτοί, εφαρμόζοντας διάφορες μεθόδους και μετρήσεις, προσπάθησαν να βρουν τη δυσκολία που παρουσιάζουν στα παιδιά οι διάφοροι συνδυασμοί των μονοψήφιων ακέραιων αριθμών όταν προστίθενται, αφαιρούνται ή πολλαπλασιάζονται.

Πρώτοι οι Suppes και Groen (1967) και κυρίως οι Groen και Parkman (1972), στα πλαίσια της θεωρίας επεξεργασίας πληροφοριών, χρησιμοποιώντας τη χρονομετρική ανάλυση μελέτησαν την ίδια τη λύση των αριθμητικών πράξεων και τις λειτουργίες που φέρουν σε πέρας το έργο αυτό στο νου του παιδιού.

Από τα τέλη της δεκαετίας 1960-70 μέχρι σήμερα, αυτή η περιοχή έρευνας, γνωστή ως *νοητική ή γνωστική αριθμητική*, έχει συγκεντρώσει το ενδιαφέρον ερευνητών διάφορων περιοχών της Ψυχολογίας και πολλές έρευνες με διάφορες θεωρητικές ερμηνείες είδαν το φως της δημοσιότητας. Τρία είναι τα βασικά ερωτήματα που απασχολούν τους ερευνητές αυτούς: (α) Πώς η γνώση των αριθμών και της αριθμητικής είναι οργανωμένη στη μνήμη; (β) Ποιες είναι οι λειτουργίες με τις οποίες η γνώση αυτή προσεγγίζεται και εφαρμόζεται κατά τη λύση των διάφορων πράξεων; και (γ) Ποιες είναι οι αλλαγές που συμβαίνουν με την ηλικία στην αριθμητική επίδοση;

Η έρευνα της νοητικής αριθμητικής όσον αφορά την παιδική ηλικία έχει δώσει διάφορα εμπειρικά ευρήματα. Τα σπουδαιότερα από αυτά αφορούν: (α) το μέγεθος του προβλήματος, (β) τις στρατηγικές επεξεργασίας, (γ) τα είδη των λαθών και (δ) τη σχέση μεταξύ των αριθμητικών λειτουργιών της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Τα ευρήματα αυτά, όπως και οι σχετικές θεωρητικές ερμηνείες, θα παρουσιαστούν σύντομα.

Στην έρευνα των Groen και Parkman (1972) που αναφέραμε, 37 παιδιά μαθητές (15) και μαθήτριες (22) της πρώτης τάξης Δημοτικού (μέση ηλικία

6 χρόνων και 10 μηνών) έπρεπε να δώσουν το άθροισμα σε 55 πράξεις οριζόντιας μορφής (m+n=) με άθροισμα μικρότερο ή ίσο με το 9. Η πράξη προβαλλόταν σε οθόνη και το υποκείμενο σχημάτιζε το άθροισμα πιέζοντας ένα από τα πλήκτρα του οργάνου που βρισκόταν μπροστά του, αριθμημένα από το 0 έως το 9. Συγχρόνως, καταγραφόταν ο χρόνος αντίδρασης.

Με βάση τους μέσους χρόνους αντίδρασης του κάθε υποκειμένου οι Groen και Parkman έλεγξαν πέντε θεωρητικά πρότυπα, που οι ίδιοι πρότειναν, και το γενικό αποτέλεσμα ήταν ότι το "μοντέλο του μικρότερου προσθετέου" ερμήνευε καλύτερα τα δεδομένα. Το μοντέλο αυτό υποθέτει την ύπαρξη ενός νοερού μετρητή με δύο λειτουργίες. Η μία λειτουργία είναι η τοποθέτηση του μετρητή σε μία ορισμένη τιμή και η άλλη είναι το ανέβασμα του μετρητή ανά ένα με μια διαδικασία όμοια με την αρίθμηση. Συνεπώς, η πρόσθεση συντελείται με την τοποθέτηση του μετρητή στο μεγαλύτερο από τους δύο αριθμούς και το ανέβασμα του μετρητή ανά ένα τόσες φορές όσες είναι ο μικρότερος αριθμός. Ο χρόνος της τοποθέτησης του μετρητή στο 2 ή το 9 παραμένει ίδιος. Ο χρόνος επίσης που παίρνει το ανέβασμα του μετρητή ανά ένα είναι ανεξάρτητος από το πόσες φορές θα ανέβει ο μετρητής (βλ. Μάνιου-Βακάλη, 1981, σελ. 56). Έτσι, οι αλλαγές στο χρόνο λύσης αντικατοπτρίζουν τη λειτουργία της αρίθμησης και είναι ανάλογες του μικρότερου προσθετέου.

Ένα άλλο βασικό εύρημα των Groen και Parkman ήταν ότι ο χρόνος αντίδρασης των υποκειμένων αυξάνει ανάλογα με το μέγεθος του προβλήματος, όσο δηλαδή οι δύο προσθετέοι γίνονται μεγαλύτεροι αριθμοί, τόσο η λύση της πράξης παίρνει περισσότερο χρόνο. Εξαίρεση αυτού του γενικού ευρήματος αποτέλεσαν οι πράξεις των δύο όμοιων προσθετέων (π.χ. 3+3= ή 6+6=), οι οποίες παρουσιάζουν πιο σύντομους χρόνους αντίδρασης από ό,τι θα συνεπάγονταν οι προσθετέοι αυτών με βάση το μοντέλο του μικρότερου προσθετέου.

Κατά τους Groen και Parkman (1972, σελ. 335), η λύση των πράξεων αυτών είναι πιο γρήγορη από ό,τι θα έπρεπε, γιατί το υποκείμενο έχει απομνημονεύσει την ορθή απάντηση στη μακρόχρονη μνήμη και χρησιμοποιεί κάποια στρατηγική ταχείας ανάκλησής της. Συνεπώς, η λειτουργία της πρόσθεσης αλλάζει με την ηλικία και από κατασκευαστική γίνεται αναπαραγωγική.

Η επίδραση του μεγέθους του προβλήματος επιβεβαιώθηκε από πολλές νεότερες έρευνες που έγιναν με υποκείμενα παιδιά του Νηπιαγωγείου έως νεαρούς ενήλικες (Hamann & Ashcraft, 1985· Siegler, 1987α· Koshmider & Ashcraft, 1991).

Οι έρευνες που ακολούθησαν επιβεβαίωσαν, επίσης, το θεωρητικό πρότυπο του μικρότερου προσθετέου και έδειξαν ότι η αρίθμηση είναι η βασική

στρατηγική που εφαρμόζουν τα παιδιά των πρώτων τάξεων του Δημοτικού (Svenson, 1975) και ότι το ίδιο συμβαίνει και με τους αργούς μαθητές μεγαλύτερων τάξεων (Svenson & Broquist, 1975).

Οι Woods, Resnick και Groen (1975) έδωσαν σε παιδιά της δευτέρας και τετάρτης τάξης Δημοτικού να λύσουν απλές πράξεις αφαίρεσης, στις οποίες ο μεγαλύτερος αριθμός ήταν ίσος ή μικρότερος του 9 και βρήκαν ότι τα παιδιά εφάρμοσαν την αρίθμηση με δύο διαφορετικές νοητικές διαδικασίες. Η μία διαδικασία περιλάμβανε την αρίθμηση προς τα κάτω από το μεγαλύτερο αριθμό της πράξης τόσες φορές όσες ήταν ο μικρότερος αριθμός ή προς τα πάνω από το μικρότερο αριθμό της πράξης τόσες φορές όσες χρειάζονταν για να φθάσουν το μεγαλύτερο αριθμό.

Ως προς τον πολλαπλασιασμό, υπάρχουν δεδομένα (Jerman, 1970) που δείχνουν ότι οι μαθητές της τρίτης έως και της έκτης τάξης λύνουν τις πράξεις πολλαπλασιασμού εφαρμόζοντας διάφορες στρατηγικές: προσθέτουν, δηλαδή, το μικρότερο αριθμό τόσες φορές όσες είναι ο μεγαλύτερος αριθμός της πράξης (επαναληπτική πρόσθεση), βρίσκουν το γινόμενο με βάση το πιο γνωστό γινόμενο όμοιων αριθμών, π.χ. 5x6= , 5x5=25, 25+5=30 [δηλαδή nx(n+1)] ή 5x6= , 6x6=36, 36-6=30 [δηλαδή nx(n-1)] και χρησιμοποιούν τον κανόνα που αφορά τον πολλαπλασιασμό ενός αριθμού με το 0 ή το 1 στις αντίστοιχες πράξεις.

Ο Siegler (1987α, 1987β) είναι ο ερευνητής που έδωσε τη μεγαλύτερη προσοχή στις στρατηγικές που εφαρμόζουν τα παιδιά στη λύση των αριθμητικών πράξεων και υπογράμμισε τη σπουδαιότητά τους. Καταρχήν, ο Siegler με το συνεργάτη του Robinson (Siegler & Robinson, 1982) έκανε μια έρευνα στην οποία όχι μόνο χρονομέτρησε τη λύση των πράξεων αλλά και κατέγραψε με βίντεο τη συμπεριφορά των υποκειμένων του, που ήταν παιδιά του Νηπιαγωγείου τεσσάρων και πέντε ετών, όταν προσπαθούσαν να λύσουν πράξεις πρόσθεσης με πολύ μικρούς προσθετέους (όχι μεγαλύτερους από το 5+5=). Παρατήρησαν ότι τα παιδιά της ηλικίας αυτής εφαρμόζουν ποικιλία στρατηγικών, χρησιμοποιούν δηλαδή τα δάχτυλά τους για να αριθμήσουν, αριθμούν φωναχτά ενώ κοιτάζουν στο κενό, δίνουν το άθροισμα χωρίς να μετρούν τα δάχτυλά τους, τα οποία όμως έχουν ανασηκώσει ή τέλος ανακαλούν το άθροισμα από τη μνήμη. Ένα άλλο εύρημα της έρευνας αυτής με ιδιαίτερη σπουδαιότητα ήταν ότι όσο πιο "δύσκολη" είναι η πράξη τόσο πιο συχνά τα υποκείμενα καταφεύγουν στις στρατηγικές αρίθμησης.

Με βάση τα ευρήματα αυτά, οι Siegler και Shrager (1984) διατύπωσαν το μοντέλο της "κατανομής των συνειρμών" ή της "επιλογής των στρατηγικών" (βλ. Μάνιου-Βακάλη, 1992, σελ. 134). Σε αυτό, δύο είναι τα κύρια στοιχεία: η αναπαράσταση της γνώσης και η λειτουργία που επενεργεί σ' αυτήν. Ως προς την αναπαράσταση, το μοντέλο υποθέτει ότι τα παιδιά συνδέουν συνειρμικά τις επιμέρους πράξεις με απαντήσεις, ορθές και εσφαλμένες. Οι συνειρμοί μεταξύ κάθε πράξης και των πιθανών απαντήσεών της είναι διαφορετικής ισχύος, εξαιτίας της διαφορετικής άσκησης. Οι συνειρμοί αυτοί αποτελούν μια κατανομή που μπορεί να πάρει διάφορες μορφές.

Η λειτουργία που επενεργεί στην αναπαράσταση της μνήμης περιλαμβάνει τρεις διαδοχικές φάσεις: την ανάκληση του αποτελέσματος, την επεξεργασία της ανάκλησης και την αρίθμηση. Η απόφαση του παιδιού να εγκαταλείψει την προσπάθεια της ανάκλησης του αποτελέσματος και να προχωρήσει στη δεύτερη ή τρίτη φάση εξαρτάται από δύο εσωτερικές τιμές: το κριτήριο εμπιστοσύνης και το μήκος της αναζήτησης.

Ο Ashcraft (1982, 1987, 1992) με τους συνεργάτες του (Ashcraft & Fierman, 1982· Ashcraft, Fierman, & Bartolotta, 1984), αντίθετα, σε μια σειρά πειραμάτων κυρίως επαλήθευσης του αποτελέσματος, στα οποία μελέτησε πώς τα παιδιά του Δημοτικού ταυτίζουν τις ορθές ή εσφαλμένες λύσεις πράξεων πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού, διατύπωσε ένα μοντέλο σύμφωνα με το οποίο η λύση των αριθμητικών πράξεων είναι βασικά αναπαραγωγική λειτουργία (βλ. Μάνιου-Βακάλη, 1992, σελ. 133).

Σύμφωνα με το μοντέλο "ανάκλησης των αριθμητικών γεγονότων" του Ashcraft, τα απλά αριθμητικά γεγονότα της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού έχουν αποθηκευθεί στη μακρόχρονη μνήμη σε ένα οργανωμένο κύκλωμα με αλληλοσυνδεόμενους κόμβους. Η προσέγγιση και ανάκληση του αποτελέσματος από το κύκλωμα γίνεται διαμέσου μιας λειτουργίας εξάπλωσης της δραστηριοποίησης. Η ισχύς ή ο βαθμός της προσεγγισιμότητας και της σχέσης μεταξύ των κόμβων του κυκλώματος είναι τα δύο πιο σημαντικά χαρακτηριστικά της δομής του κυκλώματος. Η φύση της διδασκαλίας της αριθμητικής κατά τη διάρκεια των πρώτων σχολικών τάξεων και οι διαφορές ως προς τη συχνότητα εμφάνισης των επιμέρους πράξεων έχουν άμεση επίπτωση στην ισχύ της αναπαράστασης του προβλήματος στη μακρόχρονη μνήμη. Τα λάθη σύγχυσης που παρατηρούνται οφείλονται στη δραστηριοποίηση προσκείμενων κόμβων.

Ερχόμαστε στα είδη των λαθών και τη σχέση μεταξύ πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού. Ο Campbell (1987, 1990) με τους συνεργάτες του (Campbell & Graham, 1985) είναι οι ερευνητές που έδωσαν ιδιαίτερη προσοχή στα είδη των λαθών που κάνουν τα παιδιά. Σε ένα από τα πειράματά τους (Campbell & Graham, 1985), έδωσαν σε παιδιά της δευτέρας έως και της έκτης τάξης Δημοτικού να λύσουν απλές πράξεις πολλαπλασιασμού και κατέγραψαν όχι

μόνο το χρόνο λύσης αλλά και τα λάθη αυτών. Βρήκαν υψηλές συσχετίσεις μεταξύ των λαθών των υποκειμένων και του χρόνου λύσης αυτών στις επιμέρους πράξεις. Το πιο σημαντικό όμως εύρημα ήταν ότι τα περισσότερα λάθη των παιδιών ήταν απαντήσεις σε άλλες απλές πράξεις πολλαπλασιασμού της ίδιας οικογένειας, π.χ. 3x9=18. Άλλη μία κατηγορία λαθών ήταν τα γινόμενα άλλων συνδυασμών, διαφορετικών οικογενειών από αυτές που εξετάζονταν, π.χ. 4x8=32.

Πολλές έρευνες έδειξαν επίσης ότι αν δοθούν πράξεις πρόσθεσης με εσφαλμένη λύση, στην οποία όμως αντί για το άθροισμα έχει δοθεί το γινόμενο των δύο αριθμών, π.χ. 3+4=12, ο χρόνος ταύτισης της λύσης ως ορθής ή εσφαλμένης αυξάνει (Winkelman & Schmidt, 1974· Miller, Perlmutter, & Keating, 1984· Hamann & Ashcraft, 1985).

Γι' αυτό οι Campbell και Graham (1985) υποστήριξαν το "μοντέλο της συνειρμικής παρεμπόδισης", του οποίου οι βασικές υποθέσεις είναι οι εξής: Κάθε πράξη έχει συνδεθεί με ένα σύνολο από υποψήφιες απαντήσεις, ορθές ή εσφαλμένες, σε ένα κύκλωμα, και κάθε απάντηση έχει συνδεθεί με πολλές αριθμητικές πράξεις στο κύκλωμα αυτό. Όταν δοθεί ένα πρόβλημα, ένα σύνολο από πιθανές υποψήφιες απαντήσεις δραστηριοποιείται στη μνήμη, και η ταχύτητα, όπως και η πιθανότητα ανάκλησης κάποιας υποψήφιας απάντησης, συμπεριλαμβανομένης και της ορθής, αποτελεί συνάρτηση του επιπέδου δραστηριοποίησης αυτής της υποψήφιας απάντησης σε σχέση με το επίπεδο δραστηριοποίησης των άλλων απαντήσεων που τη συναγωνίζονται. Έτσι, η αποτελεσματικότητα της ανάκλησης καθορίζεται από τη σχετική ισχύ των συνειρμών που συναγωνίζονται και παρεμβαίνουν ή παρεμποδίζουν τη λειτουργία ανάκλησης. Η δραστηριοποίηση μιας εσφαλμένης απάντησης μειώνει την ταχύτητα ανάκλησης της ορθής απάντησης ή οδηγεί σε εσφαλμένη αντίδραση.

Από τη σύντομη επισκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας προκύπτει ότι η προσοχή δόθηκε στην πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό, ενώ η λύση των αριθμητικών πράξεων διαίρεσης από τα παιδιά δεν έχει ερευνηθεί. Σε προηγούμενη έρευνά μας (Μάνιου-Βακάλη, 1992) προσπαθήσαμε, πρώτον, να εξετάσουμε πώς τα παιδιά ηλικίας 9 και 10 χρόνων λύνουν πράξεις πλήρους και ατελούς διαίρεσης με μονοψήφιο και διψήφιο διαιρετέο και, δεύτερον, να δώσουμε ένα θεωρητικό μοντέλο όσον αφορά τη λύση των πράξεων διαίρεσης.

Στην έρευνα αυτή πήραν μέρος 60 υποκείμενα, ανά 15 μαθητές και μαθήτριες της τρίτης και τετάρτης τάξης Δημοτικού, τα οποία έλυσαν νοερά 36 πράξεις διαίρεσης. Οι μισές από τις πράξεις (18) ήταν πράξεις χωρίς υπόλοιπο, ενώ οι άλλες μισές (18) ήταν πράξεις διαίρεσης με υπόλοιπο. Και στους δύο τύπους των πράξεων οι μισές (9) είχαν διψήφιο διαιρετέο, ενώ οι άλλες μισές (9) είχαν μονοψήφιο διαιρετέο. Ο διαιρετέος, είτε ήταν μονοψήφιος είτε διψήφιος αριθμός, κυμαινόταν από 0 έως 20. Σε όλες τις πράξεις ο διαιρέτης και το πηλίκο, το οποίο έπρεπε να βρεθεί, ήταν μονοψήφιοι αριθμοί. Η εξέταση ήταν ατομική και κάθε υποκείμενο έπρεπε να λύσει μία- μία όλες τις πράξεις διαίρεσης γρήγορα και ορθά και να πει το αποτέλεσμα. Καταγράφονταν ο χρόνος λύσης και οι εσφαλμένες απαντήσεις. Τα υποκείμενα περιέγραφαν επίσης τον τρόπο με τον οποίο έλυσαν τις επιμέρους πράξεις.

Η στατιστική ανάλυση του χρόνου αντίδρασης των υποκειμένων έδειξε ότι η λύση των πράξεων ατελούς διαίρεσης προϋποθέτει σημαντικά περισσότερο χρόνο από ό,τι η λύση των πράξεων πλήρους διαίρεσης. Τα ίδια αποτελέσματα προέκυψαν και όσον αφορά το διψήφιο διαιρετέο σε σχέση με το μονοψήφιο διαιρετέο.

Η στατιστική ανάλυση των λαθών έδειξε ότι ο τύπος της πράξης (πλήρης-ατελής) δεν αυξάνει τις εσφαλμένες απαντήσεις, τα παιδιά δηλαδή της ηλικίας αυτής βρίσκουν το υπόλοιπο της ατελούς διαίρεσης χωρίς λάθη. Το πιο ενδιαφέρον, όμως, εύρημα ήταν ότι τα παιδιά της τρίτης και τετάρτης Δημοτικού κάνουν σε σημαντικό βαθμό περισσότερα λάθη όταν ο διαιρετέος είναι μονοψήφιος αριθμός παρά διψήφιος.

Στη συζήτηση των αποτελεσμάτων υποστηρίχθηκε ότι αυτό το αντιφατικό αποτέλεσμα δείχνει ότι για την ορθότητα ή μη των αντιδράσεων "βασικός παράγοντας δεν είναι ο αριθμός των ψηφίων του διαιρετέου, αλλά η σχέση μεταξύ διαιρετέου και διαιρέτη, το πόσες δηλαδή φορές ο διαιρέτης χωράει στο διαιρετέο. Το εύρημα αυτό αξίζει να ερευνηθεί περαιτέρω" (Μάνιου-Βακάλη, 1992, σελ.144).

Ένα άλλο σημαντικό εύρημα της προηγούμενης έρευνάς μας προέκυψε από την ανάλυση των λεκτικών αναφορών. Το μεγαλύτερο ποσοστό των παιδιών έλυσε τις πράξεις διαίρεσης εφαρμόζοντας τον αντεστραμμένο πολλαπλασιασμό (Γ΄ τάξη 87.7%, Δ΄ τάξη 99.52%). Ένα μικρότερο ποσοστό υποκειμένων έλυσε τις πράξεις διαίρεσης εφαρμόζοντας την επαναληπτική πρόσθεση (Γ΄ τάξη 9.1%, Δ΄ τάξη 4.4%). Συνεπώς, η επαναληπτική αφαίρεση, που διδάσκεται στο σχολείο ως βασικός τρόπος λύσης των πράξεων διαίρεσης, δεν προτιμάται από τους μαθητές και τις μαθήτριες της Γ΄ και Δ΄ τάξης Δημοτικού. Εφαρμόζεται, πρώτον, ο αντεστραμμένος πολλαπλασιασμός και, δεύτερον, η επαναληπτική πρόσθεση. Χωρίς αμφιβολία το εύρημα αυτό είναι πολύ σημαντικό από διδακτικής πλευράς.

Η παρούσα έρευνα έγινε για να μελετηθεί με συστηματικό τρόπο α) η επίδραση του μεγέθους του διαιρέτη και β) η επίδραση του μεγέθους του πηλίκου στην επίδοση των μαθητών και μαθητριών της Δ΄ τάξης Δημοτικού. Επιδίωξή μας, επίσης, ήταν να συμπληρώσουμε το μοντέλο για τη λύση πράξεων διαίρεσης που έχουμε προτείνει (Μάνιου-Βακάλη, 1992) με βάση τα ευρήματα αυτής της έρευνας. Περιοριστήκαμε στα παιδιά της Δ΄ τάξης Δημοτικού, γιατί αυτά βρίσκονται σε ένα μεταβατικό στάδιο κατά το οποίο περνούν από τον πολλαπλασιασμό στη διαίρεση.

Δύο ήταν οι αρχικές υποθέσεις της έρευνας: α) όσο αυξάνει το πηλίκο, ενώ ο διαιρέτης μένει ο ίδιος, τόσο αυξάνουν ο χρόνος λύσης και τα λάθη των 10χρονων παιδιών και β) όσο αυξάνει ο διαιρέτης, ενώ το πηλίκο μένει το ίδιο, τόσο αυξάνουν ο χρόνος λύσης και οι εσφαλμένες απαντήσεις αυτών. Novel?

Μέθοδος

Υποκείμενα

Στο πείραμα έλαβαν μέρος 18 υποκείμενα (9 αγόρια και 9 κορίτσια). Η μέση ηλικία των υποκειμένων ήταν 9.7 χρόνων. Όλα τα υποκείμενα ήταν μαθητές και μαθήτριες της Δ΄ τάξης Δημοτικού του Πειραματικού Σχολείου του Α.Π.Θ. και είχαν διδαχθεί τη διαίρεση. Η συμμετοχή των υποκειμένων στην έρευνα ήταν εθελοντική.

Ύλη

Την ύλη του πειράματος αποτέλεσαν 40 πράξεις πλήρους διαίρεσης, των οποίων ο διαιρετέος ήταν διψήφιος αριθμός από το 10 έως το 81, ο διαιρέτης ήταν μονοψήφιος αριθμός από το 5 έως το 9 (δηλαδή 5, 6, 7, 8 και 9) και το πηλίκο, το οποίο έπρεπε να βρεθεί, ήταν μονοψήφιος αριθμός από το 2 έως το 9 (δηλαδή 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9). Για κάθε διαιρέτη οι πράξεις ήταν 8, ενώ για κάθε πηλίκο οι πράξεις ήταν 5 (βλ. Πίνακα των Πράξεων Διαίρεσης).

Αποκλείσθηκαν οι διαιρέτες 0 έως 4 και τα πηλίκα 0 και 1, διότι βασικός σκοπός του πειράματος ήταν να μελετηθούν οι πράξεις διαίρεσης των οποίων το επίπεδο δυσκολίας ήταν πιο υψηλό.

Πίνακας των Πράξεων Διαίρεσης

Πηλίκο	Διαιρέτης				
	5	6	7	8	9
2	10:5= ,	12:6= ,	14:7= ,	16:8= ,	18:9=
3	15:5= ,	18:6= ,	21:7= ,	24:8= ,	27:9=
4	20:5= ,	24:6= ,	28:7= ,	32:8= ,	36:9=
5	25:5= ,	30:6= ,	35:7= ,	40:8= ,	45:9=
6	30:5= ,	36:6= ,	42:7= ,	48:8= ,	54:9=
7	35:5= ,	42:6= ,	49:7= ,	56:8= ,	63:9=
8	40:5= ,	48:6= ,	56:7= ,	64:8= ,	72:9=
9	45:5= ,	54:6= ,	63:7= ,	72:8= ,	81:9=

Διαδικασία

Η έρευνα έγινε στα μέσα της σχολικής χρονιάς και η εξέταση ήταν ατομική. Όλα τα υποκείμενα έπρεπε να λύσουν και τις 40 πράξεις διαίρεσης, οι οποίες παρουσιάστηκαν με τυχαία σειρά. Κατά την εξέταση, κάθε υποκείμενο, αφού άκουε τις οδηγίες, έλυνε δύο παραδείγματα πράξεων διαίρεσης, όμοια με τις πράξεις της ύλης. Στη συνέχεια, οι πράξεις διαίρεσης εκφωνούνταν μία-μία και το υποκείμενο έπρεπε να τις λύσει νοερά, όσο γινόταν πιο γρήγορα και σωστά. Καταγραφόταν ο χρόνος που μεσολαβούσε από τη στιγμή που άρχιζε η εκφώνηση της πράξης μέχρις ότου το υποκείμενο έλεγε την απάντηση. Σημειωνόταν ακόμη η απάντηση του υποκειμένου. Αμέσως μόλις το υποκείμενο έλεγε το αποτέλεσμα, εξηγούσε πώς ακριβώς έλυσε την πράξη.

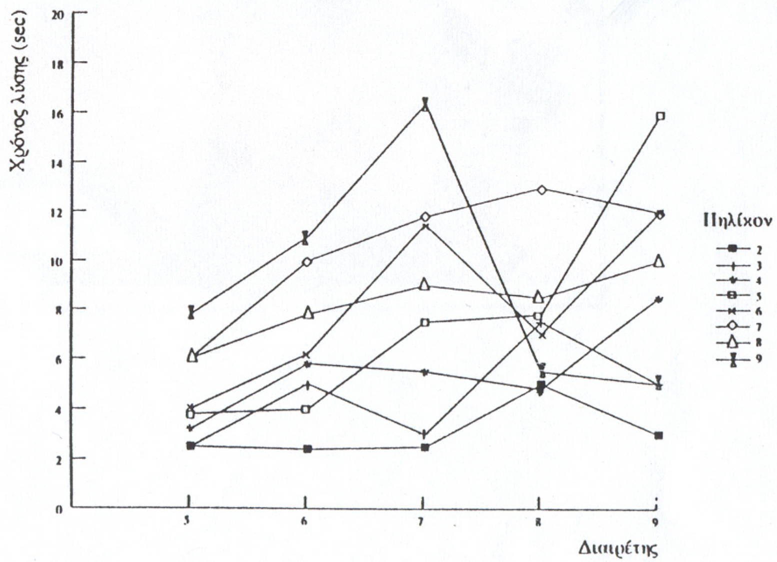
Αποτελέσματα

Ο Πίνακας αποτελεσμάτων 1 παρουσιάζει τους μέσους χρόνους λύσης σε δευτερόλεπτα των 10χρονων αγοριών και κοριτσιών κατά διαιρέτη και κατά πηλίκο, όπως και τις τυπικές αποκλίσεις αυτών (βλέπε επίσης Σχήμα 1 και 2). Από τις επιμέρους τιμές προκύπτει ότι, παρά τις εξαιρέσεις, όσο αυξάνει ο διαιρέτης, ενώ το πηλίκο μένει το ίδιο, τόσο αυξάνει και ο χρόνος λύσης και ότι όσο αυξάνει το πηλίκο, ενώ ο διαιρέτης μένει ο ίδιος, τόσο αυξάνει ο χρόνος αντίδρασης. Οι τυπικές αποκλίσεις δείχνουν, επίσης, ότι με την αύξηση του μεγέθους του διαιρέτη και του πηλίκου γίνονται πιο φανερές οι ατομικές διαφορές του δείγματος.

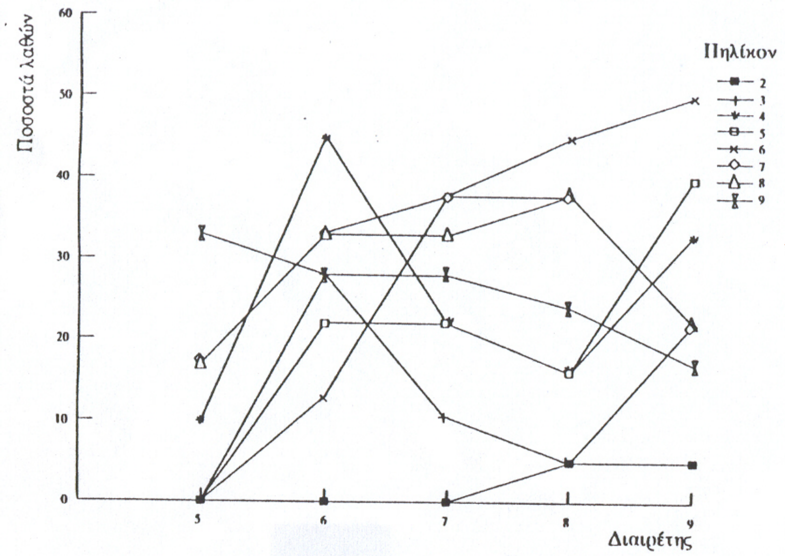
Πίνακας 1

Μέσοι χρόνοι λύσης και Τυπικές Αποκλίσεις (σε παρένθεση) αυτών σε δευτερόλεπτα (sec) των 10χρονων αγοριών και κοριτσιών κατά διαιρέτη και πηλίκο

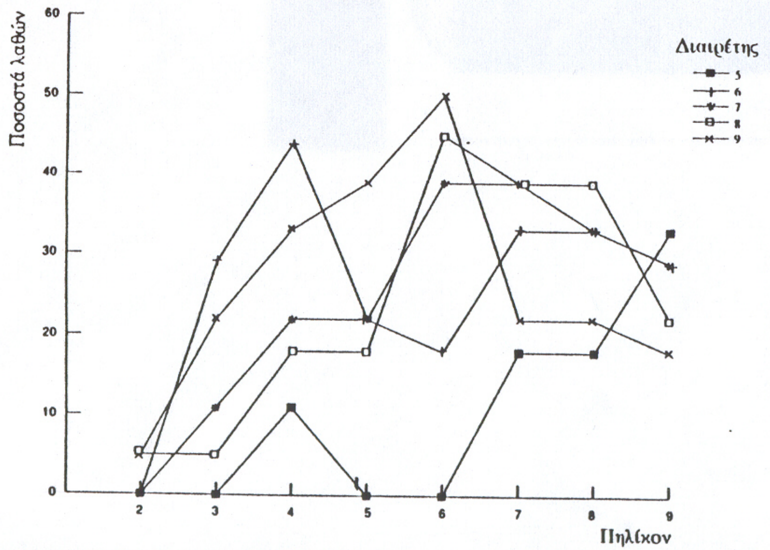
Πηλίκο	Διαιρέτης				
	5	6	7	8	9
2	2.55 (1.06)	2.42 (.66)	2.52 (.62)	4.88 (5.01)	3.01 (1.08)
3	2.62 (.95)	4.91 (1.91)	3.11 (1.38)	7.19 (7.42)	5.17 (3.53)
4	3.36 (1.41)	5.91 (5.46)	5.75 (4.86)	4.71 (2.64)	8.55 (5.84)
5	3.71 (2.31)	4.08 (2.59)	7.63 (7.62)	7.85 (10.72)	16.05 (24.88)
6	4.18 (2.62)	6.59 (11.60)	11.60 (16.10)	6.90 (6.53)	12.13 (16.44)
7	5.67 (4.94)	10.01 (13.85)	11.99 (17.00)	12.89 (18.05)	11.29 (19.70)
8	5.91 (6.11)	7.90 (7.84)	9.08 (9.50)	8.64 (8.78)	10.08 (21.89)
9	7.69 (6.54)	10.98 (10.80)	16.41 (27.14)	5.76 (5.130	5.21 (6.16)



Σχήμα 1. Μέσος χρόνος λύσης σε δευτερόλεπτα των 10χρονων αγοριών και κοριτσιών στους επιμέρους διαιρέτες κατά πηλίκον.



Σχήμα 3. Εκατοστιαία αναλογία λαθών των 10χρονων αγοριών και κοριτσιών στους επιμέρους διαιρέτες κατά πηλίκον.



Σχήμα 4. Εκατοστιαία αναλογία λαθών των 10χρονων αγοριών και κοριτσιών στα επιμέρους πηλίκα κατά διαιρέτη.

Οι μεγαλύτερες εκατοστιαίες αναλογίες λαθών υπήρξαν στις παρακάτω πράξεις:

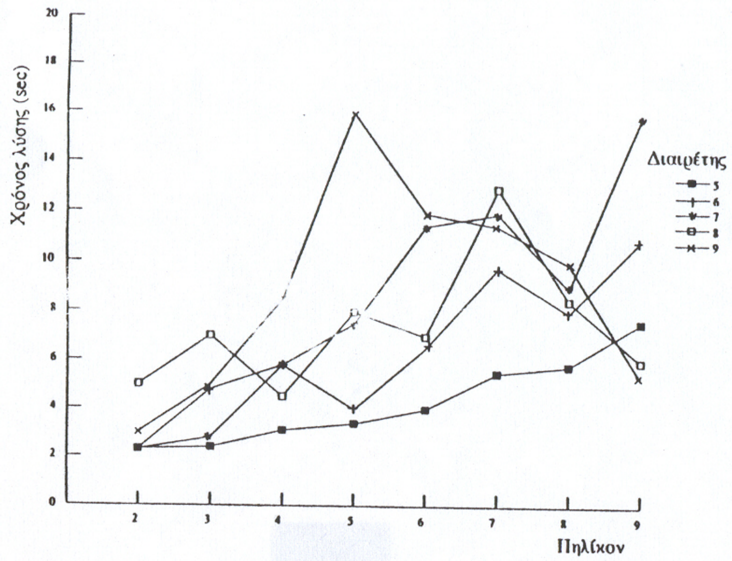
54:9=(6), 50% / 54:6=(9), 27.77%
24:6=(4), 44.44%
48:8=(6), 44.44% / 48:6=(8), 33.33%
45:9=(5), 38.88% / 45:5=(9), 33.33%
42:7=(6), 38.88% / 42:6=(7), 33.33%
42:7=(6), 38.88% / 42:6=(7), 33.33%
49:7=(7), 38.88%
56:8=(7), 38.88% / 56:7=(8), 33.33%
64:8=(8), 38.88%
36:9=(4), 33.33%
63:7=(9), 27.77% / 63:9=(7), 22.22%

Συγκρίνοντας τις τιμές αυτές προκύπτουν οι παρακάτω διαπιστώσεις: (α) Στις περισσότερες πράξεις ο διαιρέτης είναι μεγαλύτερος αριθμός από ό,τι το πηλίκο, π.χ. 54:9=(6). (β) Οι πράξεις διαίρεσης στις οποίες ο διαιρετέος είναι ίδιος αριθμός, συνήθως μεγάλος αριθμός, αλλά ο διαιρέτης εναλλάσσεται με το πηλίκο, π.χ. 48:8=(6) / 48:6=(8), ή το αντίστροφο, παρουσιάζουν επίσης μεγάλους μέσους χρόνους λύσεις και τυπικές αποκλίσεις. (γ) Στις παραπάνω πράξεις, πρώτον, ο διαιρέτης είναι μεγάλος αριθμός και, δεύτερον, το πηλίκο.

Πίνακας 4
Εκατοστιαίες αναλογίες λαθών των 10χρονων αγοριών και κοριτσιών κατά διαιρέτη και πηλίκο

Πηλίκο	Διαιρέτης				
	5	6	7	8	9
2	-	-	-	5.55	5.55
3	-	27.77	11.11	5.55	22.2
4	11.11	44.44	22.22	16.66	33.33
5	-	22.22	22.22	16.16	38.88
6	-	16.66	38.88	44.44	50.00
7	16.66	33.33	38.88	38.88	22.22
8	16.66	33.33	33.33	38.88	22.22
9	33.33	27.77	27.77	22.22	16.66

Η στατιστική ανάλυση των λαθών με το τεστ του Cohran έδειξε ότι, ενώ το μέγεθος του διαιρέτη διαφοροποιεί τον αριθμό των λαθών στα επίπεδα 5 (21.318), 7 (15.529), 8 (17.623) και 9 (16.459), το μέγεθος του πηλίκου δια-



Σχήμα 2. Μέσος χρόνος λύσης σε δευτερόλεπτα των 10χρονων αγοριών και κοριτσιών στα επιμέρους πηλίκα κατά διαιρέτη.

Οι μεγαλύτεροι μέσοι χρόνοι λύσης και τυπικές αποκλίσεις υπήρξαν στις παρακάτω πράξεις:

63:7=(9), $\bar{x}$=16.41 sec., SD=27.14 / 63:9=(7), $\bar{x}$= 11.29 sec., SD=19.70

45:9=(5), $\bar{x}$=16.05 sec., SD=24.88

56:8=(7), $\bar{x}$=12.89 sec., SD=18.05

54:9=(6), $\bar{x}$=12.13 sec., SD=16.44 / 54:6=(9), $\bar{x}$=10.98 sec., SD=10.80

49:7=(7), $\bar{x}$=11.99 sec., SD=17.00

42:7=(6), $\bar{x}$=11.60 sec., SD=16.10

72:9=(8), $\bar{x}$=10.08 sec., SD=21.89

Αν συγκρίνει κανείς τις τιμές αυτές μπορεί να παρατηρήσει τα εξής: (α) Στις περισσότερες πράξεις ο διαιρέτης είναι μεγαλύτερος αριθμός από 6,τι το πηλίκο, π.χ. 45:9=(5). (β) Οι πράξεις διαίρεσης στις οποίες ο διαιρετέος είναι ίδιος αριθμός –συνήθως μεγάλος αριθμός– αλλά ο διαιρέτης εναλλάσσεται με το πηλίκο, π.χ. 54:9=(6) / 54:6=(9), ή το αντίστροφο, παρουσιάζουν επίσης μεγάλους μέσους χρόνους λύσεις και τυπικές αποκλίσεις. (γ) Στις παραπάνω πράξεις, πρώτον, ο διαιρέτης είναι μεγάλος αριθμός και, δεύτερον, το πηλίκο.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι μέσοι χρόνοι λύσης και οι τυπικές αποκλίσεις στις πράξεις:

81:9=(9), $\bar{x}$=5.21 sec., SD=6.16 και

72:8=(9), $\bar{x}$=5.76 sec., SD=5.13

γιατί είναι πραγματικά πολύ σύντομοι, αν συγκριθούν με τις τιμές των παραπλήσιων πράξεων. Στις πράξεις αυτές και τα ποσοστά των λαθών είναι μικρότερα από 6,τι στις παραπλήσιες πράξεις.

Η στατιστική ανάλυση του χρόνου λύσης με την ανάλυση διακύμανσης έδειξε ότι το μέγεθος του διαιρέτη διαφοροποιεί σε σημαντικό βαθμό το χρόνο λύσης σε όλα τα επίπεδα, ενώ το μέγεθος του πηλίκου διαφοροποιεί σε σημαντικό βαθμό το χρόνο λύσης στα επίπεδα: 2, 3, 4, 5 και 9 (βλέπε Πίνακες 2 και 3).

Πίνακας 2

Τιμές του F και επίπεδο σημαντικότητας όσον αφορά το χρόνο λύσης κατά διαιρέτη

Διαιρέτης	Τιμές του F	Επίπεδο σημαντικότητας
5	F(7,119)=6.55	p<.001
6	F(7,119)=2.76	p<.011
7	F(7,119)=3.66	p<.001
8	F(7,119)=2.05	p<.054
9	F(7,119)=2.88	p<.008

Πίνακας 3

Τιμές του F και επίπεδο σημαντικότητας όσον αφορά το χρόνο λύσης κατά πηλίκο

~~Διαιρέτης~~ Πηλίκο	Τιμές του F	Επίπεδο σημαντικότητας
2	F(4,68)=3.95	p<.005
3	F(4,68)=5.13	p<.001
4	F(4,68)=5.18	p<.001
5	F(4,68)=3.63	p<.010
9	F(4,68)=3.21	p<.018

Ο Πίνακας 4 δείχνει τις εκατοστιαίες αναλογίες των λαθών των υποκειμένων κατά διαιρέτη και κατά πηλίκο (βλέπε επίσης Σχήμα 3 και 4). Οι τιμές αυτές γενικά συμφωνούν με τους μέσους χρόνους λύσης, δείχνουν δηλαδή ότι, παρά τις εξαιρέσεις, όσο αυξάνει ο διαιρέτης, ενώ το πηλίκο μένει το ίδιο, τόσο αυξάνουν τα λάθη και ότι όσο το πηλίκο γίνεται μεγαλύτερο, ενώ ο διαιρέτης μένει ο ίδιος, τόσο τα λάθη γίνονται περισσότερα.

φοροποιεί τις εσφαλμένες απαντήσεις σε σημαντικό βαθμό μόνο στο επίπεδο του πηλίκου 6 (15.889).

Γενικά, τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι και το μέγεθος του διαιρέτη και το μέγεθος του πηλίκου επηρεάζουν την επίδοση των 10χρονων μαθητών και μαθητριών. Ωστόσο, το μέγεθος του διαιρέτη είναι πιο βασικός παράγοντας από το πηλίκο για τη δυσκολία αυτών των πράξεων διαίρεσης και την επίτευξη της λύσης. Το βασικό λοιπόν ερώτημα είναι: γιατί συμβαίνει αυτό;

Ποιοτική ανάλυση των λεκτικών αναφορών και των λαθών

Η ποιοτική ανάλυση των λεκτικών αναφορών έδειξε ότι οι 10χρονοι μαθητές και μαθήτριες λύνουν τις πράξεις διαίρεσης εφαρμόζοντας τον αντεστραμμένο πολλαπλασιασμό, αναζητούν δηλαδή τον πολλαπλασιαστή, το πόσες φορές πρέπει να πολλαπλασιάσουν το διαιρέτη, ο οποίος γίνεται πολλαπλασιαστέος, για να βρούν ένα γινόμενο που να ταυτίζεται με το διαιρετέο. Ο πολλαπλασιαστής αυτός είναι το πηλίκο της πράξης. Εξαίρεση αποτέλεσαν ένας μαθητής και δύο μαθήτριες, οι οποίοι ανέφεραν τη στρατηγική της πρόσθεσης για την ανεύρεση του πηλίκου στις πράξεις διαίρεσης των οποίων το πηλίκο ήταν ο αριθμός 2.

Οι λεκτικές αναφορές έδειξαν επίσης ότι τα παιδιά της ηλικίας αυτής εφαρμόζουν τον αντεστραμμένο πολλαπλασιασμό με διάφορους τρόπους, τους εξής:

α) Αρχίζουν τον αντεστραμμένο πολλαπλασιασμό από τους όμοιους αριθμούς και ανεβαίνουν μέχρι να βρουν το πηλίκο,
π.χ. 30:5= ,
5x5=25,
5x6=30.

β) Αρχίζουν τον αντεστραμμένο πολλαπλασιασμό από τον αριθμό 5 ή από κάποιον άλλον αριθμό και ανεβαίνουν μέχρι να βρουν το πηλίκο,

π.χ. 42:7= ,			4x7=28,
	5x7=35,	ή	5x7=35,
	6x7=42		6x7=42.

γ) Αρχίζουν τον αντεστραμμένο πολλαπλασιασμό από τους όμοιους αριθμούς και στη συνέχεια προσθέτουν,
π.χ. 30:5= ,
5x5=25,
25+5=30 (πηλίκο 6).

δ) Αρχίζουν τον αντεστραμμένο πολλαπλασιασμό από το 1 και ανεβαίνουν μέχρι να βρουν το πηλίκο, 15
π.χ. 30:5= ,
1x5=5,
2x5=10,
3x5=15,
4x5=20,
5x5=25,
5x6=30.

ε) Αρχίζουν τον αντεστραμμένο πολλαπλασιασμό από έναν μεγαλύτερο αριθμό και κατεβαίνουν μέχρι να βρουν το πηλίκο,
π.χ. 63:9= ,
9x9=81,
8x9=72,
7x9=63.

στ) Αναφέρθηκε τέλος και η αφαίρεση, μετά τον κατιόντα αντεστραμμένο πολλαπλασιασμό,

π.χ. 56:8= ,		63:9= ,
8x8=64,	ή	9x9=81,
64-8=56		8x9=72,
		72-9=63.

Έτσι, εκτός του ανιόντος αντεστραμμένου πολλαπλασιασμού, έχουμε και τον κατιόντα και γι' αυτό οι σύντομοι μέσοι χρόνοι λύσης και οι μικρές εκατοστιαίες αναλογίες λαθών στις πράξεις 81:9= (9) και 72:8=(9) μπορεί να οφείλονται στο ότι τα παιδιά έχουν αποστηθίσει τη σειρά των γινομένων από το 9x9=81 και κάτω (π.χ. 81, 72, 63, κτλ.) ή στο ότι έχουν εξαγάγει έναν κανόνα ως προς το πώς να βρίσκουν τα επιμέρους γινόμενα αρχίζοντας από το 81 (κατεβαίνοντας δηλαδή κατά μία δεκάδα και ανεβαίνοντας κατά μία μονάδα).

Τα δεδομένα αυτά δείχνουν ότι όταν οι 10χρονοι μαθητές και μαθήτριες αδυνατούν να ανακαλέσουν το πηλίκο της διαίρεσης ή το γινόμενο του αντεστραμμένου πολλαπλασιασμού από τη μνήμη, εφαρμόζουν ποικίλες τεχνικές έτσι ώστε να βρουν το ορθό αποτέλεσμα. Αν παρόλη την προσπάθειά τους αποτύχουν, τα λάθη τους απεικονίζουν αυτές τις τεχνικές, όπως έδειξε η ποιοτική ανάλυση των λαθών.

Συγκεκριμένα, διαπιστώθηκαν οι παρακάτω περιπτώσεις:

α) Τα υποκείμενα δίνουν το αμέσως προηγούμενο πηλίκο (ή πολλαπλασιαστή),
π.χ. 18:6= (2) ή 42:7= (5).

β) Τα υποκείμενα δίνουν το αμέσως επόμενο πηλίκο (ή πολλαπλασιαστή), π.χ. 27:9= (4) ή 16:8= (3).

γ) Τα υποκείμενα δίνουν άλλα, προηγούμενα ή επόμενα, πηλίκα (ή πολλαπλασιαστές),
π.χ. 36:6= (4) ή 40:5= (2)
48:8= (8) ή 56:8= (8).

δ) Τα υποκείμενα δίνουν ένα πηλίκο που είναι εκτός της "οικογένειας" του διαιρέτη,
π.χ. 48:6= (5) ["οικογένεια" (n:6)].

ε) Τα υποκείμενα δεν απαντούν ή δεν προσπαθούν να λύσουν την πράξη.

δ) Παρατηρήθηκε ακόμη η περίπτωση της λήθης των όρων της πράξης και ιδιαίτερα του διαιρετέου.

Συνοψίζοντας, η ποιοτική ανάλυση των λεκτικών αναφορών και των λαθών δείχνει με σαφή τρόπο ότι τα παιδιά της ηλικίας αυτής λύνουν τις πράξεις διαίρεσης εφαρμόζοντας με διάφορους τρόπους τον ανιόντα ή κατιόντα αντεστραμμένο πολλαπλασιασμό και ότι ο ρόλος της βραχύχρονης εργαζόμενης μνήμης στη συγκράτηση των δεδομένων της πράξης και τον έλεγχο των επιμέρους βημάτων των διαδικασιών είναι βασικός.

Συζήτηση των αποτελεσμάτων

Η έρευνα αυτή έδειξε ότι το μέγεθος του διαιρέτη αυξάνει σε στατιστικώς σημαντικό βαθμό το χρόνο λύσης και τα λάθη των 10χρονων μαθητών και μαθητριών. Αφού τα παιδιά της ηλικίας αυτής λύνουν τις πράξεις διαίρεσης που εξετάσαμε εφαρμόζοντας τον αντεστραμμένο πολλαπλασιασμό, αυτό σημαίνει ότι όσο ο πολλαπλασιαστέος γίνεται μεγαλύτερος αριθμός τόσο μειώνεται η επίδοση.

Ένα άλλο αποτέλεσμα αυτής της έρευνας είναι ότι το μέγεθος του πηλίκου επηρεάζει σε σημαντικό βαθμό το χρόνο λύσης των παιδιών. Αυτό με βάση τη στρατηγική του αντεστραμμένου πολλαπλασιασμού που χρησιμοποίησαν τα υποκείμενα φανερώνει ότι όσο ανεβαίνουν από τον πολλαπλασιαστή 2 και πέρα, η λύση γίνεται πιο χρονοβόρα.

Το πιο σημαντικό όμως εύρημα αυτής της έρευνας είναι ότι το μέγεθος του διαιρέτη διαφοροποιεί με πιο σαφή τρόπο την επίδοση (χρόνο λύσης και λάθη) των παιδιών αυτής της ηλικίας από ό,τι το μέγεθος του πηλίκου. Αυτό συμβαίνει γιατί ο Πίνακας του Πολλαπλασιασμού προχωρεί από τους μικρότερους προς τους μεγαλύτερους πολλαπλασιαστέους. Η διδασκαλία, επίσης, του Πίνακα του Πολλαπλασιασμού γίνεται με την ίδια σειρά. Το γεγονός αυτό διαφοροποιεί την άσκηση των μαθητών όχι μόνο στον πολλαπλασιασμό αλλά και στη διαίρεση.

Οι μαθητές και οι μαθήτριες μαθαίνουν, επίσης, να πολλαπλασιάζουν το μικρότερο με το μεγαλύτερο αριθμό, π.χ. 5x7=35 και όχι 7x5=35. Στις πράξεις πολλαπλασιασμού, βέβαια, υπάρχει ο πολλαπλασιαστής και ο πολλαπλασιαστέος και αν ο πολλαπλασιαστής είναι μεγαλύτερος αριθμός από τον πολλαπλασιαστέο, τα παιδιά εύκολα μπορούν να αντιστρέψουν τον πολλαπλασιαστή με τον πολλαπλασιαστέο. Στις πράξεις διαίρεσης όμως δεν υπάρχει η δυνατότητα αυτή, πράγμα που επαυξάνει τη δυσκολία των πράξεων διαίρεσης. Αυτό εξηγεί και το γιατί οι πράξεις διαίρεσης στις οποίες ο διαιρετέος είναι ίδιος αριθμός, συνήθως μεγάλος αριθμός, αλλά ο διαιρέτης εναλλάσσεται με το πηλίκο, ή το αντίστροφο, π.χ. 48:8=(6) / 48:6=(8), παρουσιάζουν μεγάλες εκατοστιαίες αναλογίες λαθών και μεγάλους μέσους χρόνους λύσης.

Τα παραπάνω αποτελέσματα είναι σημαντικά και από την εκπαιδευτική σκοπιά, γιατί δείχνουν ότι ο τρόπος διδασκαλίας του Πίνακα Πολλαπλασιασμού επηρεάζει τις επιδόσεις των μαθητών και μαθητριών τόσο ως προς τη λύση πράξεων πολλαπλασιασμού όσο και διαίρεσης.

χρόνο

Πρέπει να επισημανθεί ακόμη η ποικιλία των διαδικασιών λύσης των 10χρονων μαθητών και μαθητριών, οι οποίες διαφοροποιούν το χρόνο λύσης και τα λάθη. Η διαφοροποίηση αυτή φαίνεται ιδιαίτερα στα επίπεδα 8 και 9 του διαιρέτη και του πηλίκου.

Η λύση των πράξεων διαίρεσης, τέλος, δεν προϋποθέτει μόνον τη συμβολή της μακρόχρονης μνήμης, από την οποία ανακαλούνται γινόμενα, αθροίσματα ή πηλίκα, στρατηγικές ή τεχνικές και κανόνες, αλλά και της βραχύχρονης εργαζόμενης μνήμης, η οποία είναι απαραίτητη για τη συγκράτηση των όρων της πράξης και των αποτελεσμάτων των επιμέρους βημάτων, όπως και τον έλεγχο της όλης διαδοχής των διαδικασιών της σύνθετης λειτουργίας της λύσης.

Προς ένα μοντέλο για τη λύση των πράξεων διαίρεσης

Το γενικό θεωρητικό πλαίσιο που έχουμε ήδη προτείνει (Μάνιου-Βακάλη, 1992, σελ.145) με βάση τα ευρήματα αυτής της έρευνας αναμορφώνεται ως εξής:

- Τα παιδιά μαθαίνουν στο σχολείο πώς να λύνουν αριθμητικές πράξεις διαίρεσης από τη δευτέρα τάξη Δημοτικού και εξής. Η εξελικτική πορεία της κατάκτησης της διαίρεσης και της λύσης όλο και πιο "δύσκολων" πράξεων αυτής προχωρεί από την αρίθμηση στην πρόσθεση ή την αφαίρεση, από την πρόσθεση στην επαναληπτική πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό και τον αντεστραμμένο πολλαπλασιασμό.

- Έτσι η γνώση της αριθμητικής αναπαρίσταται και οργανώνεται στη μακρόχρονη μνήμη ως ένα σύνθετο, πολυδομικό και ιεραρχικό οικοδόμημα, το οποίο περιλαμβάνει τις δομές του αριθμού, της πρόσθεσης, της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού, οι οποίες αλληλοεπικαλύπτονται και αλληλοϋποστηρίζονται.
- Η γνωστική δομή της διαίρεσης βρίσκεται στην κορυφή αυτού του σύνθετου οικοδομήματος και αποτελεί το επιστέγασμα μιας διαδοχικής πορείας ανάπτυξης των επιμέρους γνωστικών δομών.
- Η γνωστική δομή της διαίρεσης είναι πολυεπίπεδη και περιλαμβάνει: (α) τους διάφορους τύπους των πράξεών της, (β) τις διάφορες τεχνικές και στρατηγικές της, (γ) τα αριθμητικά γεγονότα της, (δ) τον αλγόριθμό της και τους κανόνες της και (ε) τις έννοιες των σχετικών όρων της, όπως διαιρετέος, διαιρέτης, πηλίκο, κ.ά.
- Η λειτουργία της λύσης των πράξεων διαίρεσης προϋποθέτει μια διαδοχή σύνθετων λειτουργιών και διαδικασιών, όπως της ταύτισης της συμβολικής αριθμητικής παράστασης ως πράξης διαίρεσης, της κωδικοποίησης αυτής ανάλογα με τον τρόπο παρουσίασής της (οπτικός-ακουστικός), της συγκράτησής της στη βραχύχρονη, εργαζόμενη μνήμη, της αναζήτησης του πηλίκου στη μακρόχρονη μνήμη και της ανάκλησης αυτού. Αν η ανάκληση του πηλίκου είναι αδύνατη, τότε εφαρμόζεται η στρατηγική του αντεστραμμένου πολλαπλασιασμού με μια από τις τεχνικές που επισημάνθηκαν. Αν και η στρατηγική του αντεστραμμένου πολλαπλασιασμού παρουσιάζει δυσκολίες στην εφαρμογή της, το παιδί μπορεί να χρησιμοποιήσει κάποια απλούστερη στρατηγική, όπως την επαναληπτική πρόσθεση.
- Συνεπώς, η διαίρεση δεν είναι κατασκευαστική ή αναπαραγωγική διαδικασία, αλλά είναι και κατασκευαστική και αναπαραγωγική, διότι και όταν ακόμη το παιδί εφαρμόζει τον αντεστραμμένο πολλαπλασιασμό ή την επαναληπτική πρόσθεση ανακαλεί από τη μνήμη του γινόμενα ή αθροίσματα.
- Μια σειρά παραγόντων όπως το σύμβολο της πράξης, το μέγεθος του διαιρετέου, του διαιρέτη ή του πηλίκου, ο τύπος της πράξης (πλήρης-ατελής διαίρεση), κτλ. επηρεάζουν τις διαδικαστικές και αναπαραγωγικές λειτουργίες που θα δραστηριοποιηθούν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ashcraft, M.H. (1982). The development of mental arithmetic: A chronometric approach. *Developmental Review, 2*, 213-236.

Ashcraft, M.H. (1987). Children' s knowledge of simple arithmetic: A developmental model and simulation. Στο J. Bisanz, C.J. Brainerd, & R. Kail (Eds.), *Formal methods in developmental psychology: Progress in cognitive development research* (pp. 302-338). New York: Springer-Verlag.

Ashcraft, M.H. (1992). Cognitive arithmetic: A review of data and theory. *Cognition, 44*, 75-106.

Ashcraft, M.H. & Fierman, B.A. (1982). Mental addition in third, fourth, and sixth grades. *Journal of Experimental Child Psychology, 33*, 216-234.

Ashcraft, M.H., Fierman, B.A., & Bartolotta, R.(1984). The production and verification tasks in mental addition: An empirical comparison. *Developmental Review, 4*, 157-170.

Brownell, W.A. (1928). *The development of children's number ideas in the primary grades.* Chicago: University of Chicago Press.

Campbell, J.I.D. (1987). Network interference and mental multiplication. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 13*, 109-123.

Campbell, J.I.D. (1990). Retrieval inhibition and interference in cognitive arithmetic. *Canadian Journal of Psychology, 44*, 445-464.

Campbell, J.I.D. & Graham, D.J. (1985). Mental multiplication skill: Structure, process, and acquisition. *Canadian Journal of Psychology, 39*, 338-366.

Clapp, F.C. (1924). The number combinations: Their relative difficulty and frequency of their appearance in textbooks. *Research Bulletin, 1*, Madison,WI: Bureau of Educational Research.

Groen, G.J. & Parkman, J.M. (1972). A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review, 79*, 329-343.

Hamann, M.S. & Ashcraft, M.H.(1985). Simple and complex mental addition across development. *Journal of Experimental Child Psychology, 40*, 49-72.

Jerman, M. (1970). Some strategies for solving simple multiplication combinations. *Journal for Research in Mathematics Education, 1*, 95-128.