ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Α)Με βάση το θεώρημα Shannon για την κωδικοποίηση αναλογικού σήματος να χαράξετε το διάγραμμα της σχέσης $(S/N)_{dB}$=f(R) , R=bit/sample για ένα σήμα με Gaussian κατανομή.

Β) Χρησιμοποιείστε τους Πίνακες 6.2 και 6.3 σελίδες βιβλίου 332 και 334 αντίστοιχα για να χαράξετε πειραματικά τη σχέση $(S/N)_{dB}$=f(R) γι τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Β1 Βέλτιστος Ομοιόμορφος Κβαντιστής με Κώδικα Εντροπίας (R=H).

Β2) Βέλτιστος μη Ομοιόμορφος Κβαντιστής με Κώδικα Εντροπίας (R=H).

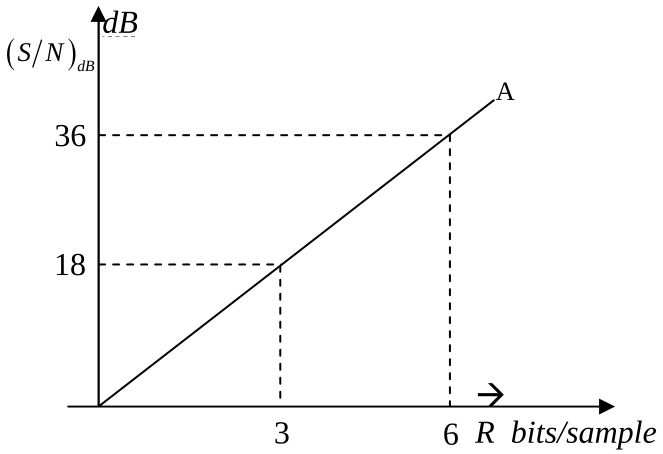
Β3) Βέλτιστος Ομοιόμορφος Κβαντιστής με Κώδικα σταθερού μήκους (R=$\log_2$(N)).

ΛΥΣΗ

Α)

Θεώρημα Shannon:

$$R = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\sigma^2}{D}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{\sigma^2}{D}\right) = 2^{2R} \Leftrightarrow \left(S/N\right) = 2^{2R} \Leftrightarrow \left(S/N\right)_{dB} = 10\log_{10}\left(2^{2R}\right) = 6R$$

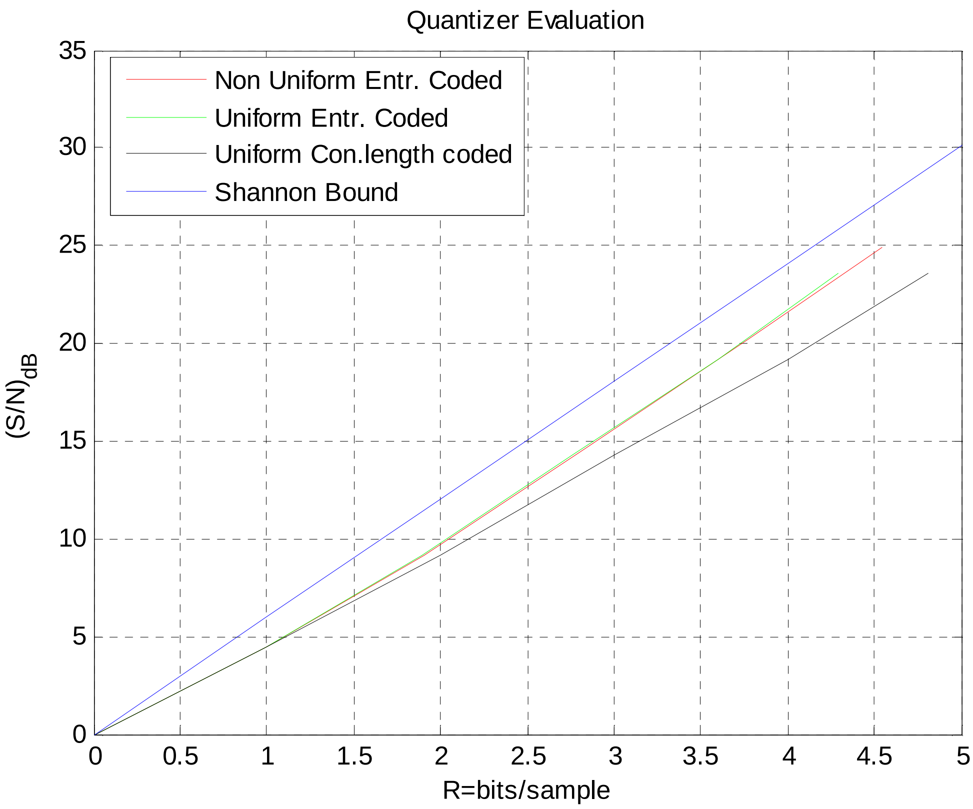


ΠΛ. ΣΤ. ΚΒ. N	D Β. ΟΜ	$\bar{R} = H$	D Β. ΜΗ Ο	$\bar{R} = H$	$\log_2$(N)
	1.00	**0.00**	**1.00**	**0.00**	**0.00**
2	**0.36**	**1.00**	**0.36**	**1.00**	**1.00**
4	**0.12**	**1.90**	**0.12**	**1.91**	**2.00**
8	**0.037**	**2.76**	**0.035**	**2.83**	**3.00**
16	**0.012**	**3.60**	**0.0095**	**3.77**	**4.00**
28	**0.0044**	**4.29**	**0.0032**	**4.54**	**4.81**

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{B.OM,dB} = 10\log 10\left(\frac{1}{D_{B.OM}}\right)$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{B.MOM,dB} = 10\log 10\left(\frac{1}{D_{B.MOM}}\right)$$

ΠΛΘ. ΣΤΘ. ΚΒΝΤ. N	$(S/N)_{dB}$ ΒΕΛΤ ΟΜΟΙΟΜ	$\bar{R} = H$	$(S/N)_{dB}$ ΒΕΛ ΜΗ ΟΜ	$\bar{R} = H$	$\log_2$(N)
	0.00	**0.00**	0.00	**0.00**	**0.00**
2	4.44	**1.00**	4.44	**1.00**	**1.00**
4	9.21	**1.90**	9.21	**1.91**	**2.00**
8	14.32	**2.76**	14.56	**2.83**	**3.00**
16	19.21	**3.60**	20.22	**3.77**	**4.00**
28	23.57	**4.29**	24.95	**4.54**	**4.81**


Quantizer Evaluation
Non Uniform Entr. Coded
Uniform Entr. Coded
Uniform Con.length coded
Shannon Bound
(S/N)dB
R=bits/sample
0
5
10
15
20
25
30
35
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Αν λάβουμε υπόψιν τα σφάλματα που εισάγει στη δυαδική ακολουθία εξόδου του PCM το ψηφιακό κανάλι διαβίβασης δεδομένων του οποίου η πιθανότητα σφάλματος συμβολίζεται με P_b, το τελικό σήμα προς θόρυβο στον δέκτη δίνεται από τη Σχεση:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{o-PCM} = \frac{4^v}{1+4P_b 4^v}$$

όπου v είναι ο ρυθμός κωδικοποίησης του PCM. Προσδιορίστε τη τιμή κατωφλίου P_{th} για την οποία ισχύει, όταν $P_b < P_{th}$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{o-PCM-dB} > \left(\frac{S}{N}\right)_{dB,MAX} - 1\,\mathbf{dB}$$

όπου $(S/N)_{dB,MAX}$ η τιμή του SNR του δέκτη όταν P_b=0.

ΛΥΣΗ

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{o-PCM} = \frac{4^v}{1+4P_b 4^v} \rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_{o-\max dB} = \left(4^v\right)_{dB}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{o-PCM,dB} = \left(4^v\right)_{dB} - \left(1+4P_b 4^v\right)_{dB}$$

Θέτοντας P_b=P_{th} $\rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_{o-PCM,dB} = \left(4^v\right)_{dB} - \left(1+4P_{th} 4^v\right)_{dB} = \left(4^v\right)_{dB} - 1$

$$\rightarrow \left(1+4P_{th}4^v\right)_{dB} = 1 \Rightarrow 10\log_{10}\left(1+4P_{th}4^v\right) = 1 \Rightarrow P_{th} = \left(10^{0.1}-1\right)/4^{v+1} \approx 0.25\cdot 4^{-v-1} \Rightarrow$$

$$P_{th} = 4^{-(v+2)}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Η ακολουθία δειγμάτων $\{x_n\}$ ενός πραγματικού σήματος παρουσιάζει μέση τιμή μηδέν, διακύμανση σ_x^2, και ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης ρ=E$\{x_i x_{i-1}\}/\sigma_x^2$ =0,95. Αν χρησιμοποιηθεί ως πρόγνωση της $\{x_n\}$ η ακολουθία $\{\tilde{y}_n\}$, $\tilde{y}_n = a x_{n-1}$ να υπολογιστεί η τιμή του α ώστε το DPCM να παρουσιάσει μέγιστο λόγο $\mathrm{QSNR}_{\mathrm{DPCM}}$. Να υπολογίσετε πόσες φορές είναι μεγαλύτερος ο λόγος αυτός από εκείνον ενός PCM με το ίδιο πλήθος σταθμών κβάντισης.

ΛΥΣΗ

$$(SQNR)_{DPCM} = \frac{\sigma_x^2}{E\left[\left(x_n - \hat{x}_n\right)^2\right]} = \frac{\sigma_x^2}{E\left[\left(y_n - \hat{y}_n\right)^2\right]} = \frac{\sigma_x^2}{f(v)\sigma_y^2}$$

Για δοσμένα σ_x^2 και τη συνάρτηση $f(v)$ το $(SQNR)_{\mathrm{DPCM}}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του σ_y^2. Πρέπει επομένως να φροντίσουμε να γίνει ελάχιστη η σ_y^2.

Ισχύει:

$$\tilde{y}_n = a x_{n-1} \Rightarrow y_n = x_n - a x_{n-1} \Rightarrow$$

$$\sigma_y^2 = E\left[y_n^2\right] = E\left[\left(x_n - a x_{n-1}\right)^2\right] = \sigma_x^2 - 2aE\left[x_n x_{n-1}\right] + a^2\sigma_x^2 \Rightarrow$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 - 2a\rho\sigma_x^2 + a^2\sigma_x^2 \Rightarrow \sigma_y^2 = \sigma_x^2\left(1 - 2\alpha\rho + \alpha^2\right)$$

Για να γίνει ελάχιστος η σ_y^2 αρκεί να επιδιωχθεί $\dfrac{d\sigma_y^2}{da} = 0 \Rightarrow$

$$-2\rho + 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \rho, \text{ οπότε } \sigma_y^2 = \sigma_x^2\left(1 - \rho^2\right)$$

Οπότε

$$(\mathrm{SQNR})_{\mathrm{DPCM}} = \frac{\sigma_x^2}{f(N)\sigma_y^2} = \frac{1}{f(N)\left(1-\rho^2\right)} = \frac{(\mathrm{SQNR})_{\mathrm{PCM}}}{\left(1-\rho^2\right)} = \frac{\mathrm{SQNR}_{\mathrm{PCM}}}{0.098} = 10.5\mathrm{QSNR}_{\mathrm{PCM}}$$

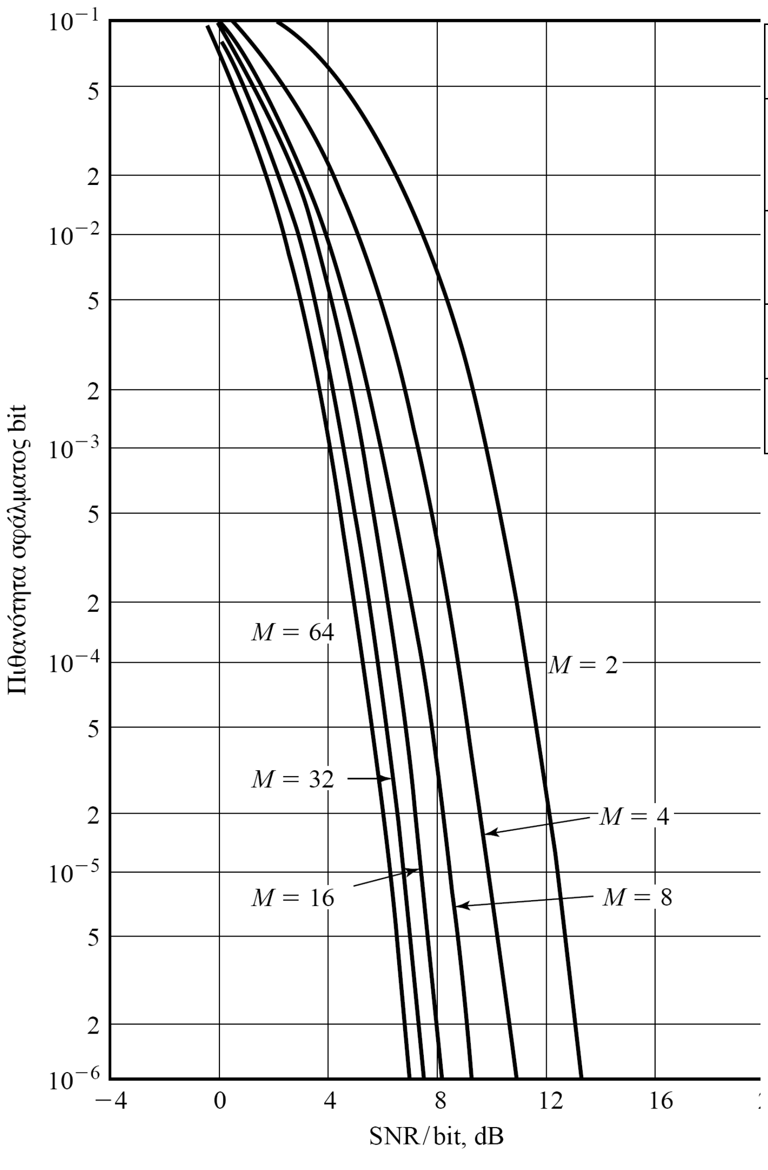
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Διατίθεται κανάλι με απόσβεση L=30 db, με προσθετικό Gaussian λευκό θόρυβο στην έξοδο του φασματικής πυκνότητας $N_0/2=10^{-11}$ Watt/Hz. Επιθυμούμε να σχεδιάσουμε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα, για τη διαβίβαση ενός σήματος video με ομοιόμορφο PDF (W=4.5 MHz). Θα χρησιμοποιήσουμε ένα 8-bit PCM-Σύμφωνο M-FSK. Πόση πρέπει να είναι η ισχύς εκπομπής P_T για M=8,16,32; Για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιείστε το διάγραμμα της εικόνας 7.63 σελίδα 475.

ΛΥΣΗ

Ισχύει

$P_{th}=4^{-(\nu+2)}=2^{-20}=10^{-6}$



M	8	16	32
$(E_b/N_0)_{dB}$ dB	9.5	8.1	7.5
$(E_b/N_0)=10^{(Eb/N0)dB/10}$	8.9	6.5	5.6
P_R mWatt	12.8	9.3	8.10
P_T Watt	12.8	9.3	8.10

Από το διάγραμμα επιδόσεων του M-FSK M=8,16 και 32 για $P_b=10^{-6}$ προσδιορίζουμε το $(E_b/N_0)_{dB}$ και το κατά χωρούμε στην πρώτη γραμμή του Πίνακα. Το $(E_b/N_0)=10^{(Eb/N0)dB/10}$ και συμπληρώνεται η δεύτερη γραμμή.

Ισχύει $R_b=2W\nu$=72000 bits/sec

και

$$P_R=E_bR_b=2(E_b/N_0)N_0R_b$$

Από τον τελευταίο τύπο και τη δεύτερη γραμμή του πίνακα συμπληρώνεται η τρίτη γραμμή του Πίνακα. Τέλος ισχύει:

$$P_T = LP_R$$

όπου $L = 10^{Ldb/10} = 1000$ ➔ συμπληρώνεται η τέταρτη γραμμή. Επομένως τελικά η ισχύς εκπομπής για

$M=8$ $P_T=12.8$ Watt

$M=16$ $P_T=9.3$ Watt

$M=32$ $P_T=8.1$ Watt

Πρόβλημα 5

Για τη διαβίβαση σήματος FM σε μεγάλη απόσταση αποφασίζεται να χρησιμοποιηθούν αναμεταδότες κάθε 30 Km, οι οποίοι αποκαθιστούν την ισχύ του σήματος που υφίσταται στην απόσταση αυτή απόσβεση κατά 30 dB. Το FM σήμα έχει δείκτη διαμόρφωσης β_f=7 και διαβιβάζει ραδιοφωνική εκπομπή με εύρος ζώνης 20 KHz και P_{mn}=1/6. Η ποιότητα στην έξοδο του δέκτη επιθυμούμε να είναι τουλάχιστον $(S/N)_{\mathrm{dB}}$ =50 dB. Το κανάλι παρουσιάζει $N_0/2=10^{-12}$ Watt/Hz.

Α Τι τιμή πρέπει να έχει τουλάχιστον το $(S/N)_b$ και πόση πρέπει να είναι η ποιότητα του σήματος $(S/N)_R$ στην είσοδο του τελικού δέκτη;

Β Αν κάθε αναμεταδότης εκπέμπει με ισχύ P_T=1 Watt, σε πόση απόσταση μπορούμε να διαβιβάσουμε το σήμα;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α

Για να πετύχουμε την ποιότητα των 50 dB στην έξοδο, πρέπει η $(S/N)_{\mathrm{b}}$ να ικανοποιεί τη σχέση

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = 3\beta_f^2 P_{mn}\left(\frac{S}{N}\right)_b$$

οπότε

$$\left(\frac{S}{N}\right)_b = \frac{1}{3\beta_f^2 P_{mn}}\left(\frac{S}{N}\right)_0 \geq \frac{10^5}{3\times 7^2\times 1/6} \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_b \geq 4081$$

Επειδή ισχύει

$$20\left(\beta_f+1\right)=20\left(7+1\right)=160<\left(\frac{S}{N}\right)_b$$

συμπεραίνουμε ότι δεν θα εμφανιστεί φαινόμενο κατωφλίου.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_R = \left(\frac{P_R}{B_c N_{0eff}}\right) = \left(\frac{P_R}{W N_{0eff}}\right)\left(\frac{W}{B_c}\right) = \left(\frac{S}{N}\right)_b\left(\frac{1}{2\left(\beta_f+1\right)}\right)$$

δηλαδή

$$\left(\frac{S}{N}\right)_R = \left(\frac{S}{N}\right)_b\left(\frac{1}{2\left(\beta_f+1\right)}\right) \geq \frac{4081}{16} = 255 \rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_R \geq 255$$

Β

Από τα πιο πάνω προκύπτει ότι ο αριθμός K των επαναληπτών θα πρέπει να εξασφαλίζει ποιότητα στην είσοδο του δέκτη $(S/N)_R \geq 255$, δηλαδή

$$\left(\frac{S}{N}\right)_R = \frac{P_T}{K L_p B_C N_0} \geq 255 \Rightarrow K \leq \frac{P_T}{255 L_p B_C N_0} \Rightarrow K \leq \frac{1}{255\times 10^3\times 16\times 20\times 10^3\times 10^{-12}}$$

δηλαδή

$$K \leq \frac{1}{255\times 10^3\times 16\times 20\times 10^3\times 2\times 10^{-12}} \rightarrow K \leq 6.15$$

Θα χρησιμοποιήσουμε λοιπόν το πολύ 6 ΕΣ και επομένως το σήμα θα φθάσει με ικανή ποιότητα σε απόσταση 6Χ30=180 Km.

<u>Πρόβλημα 6</u>

Επιθυμούμε να διαβιβάσουμε σήμα ραδιοφωνίας με εύρος ζώνης W=20 KHz και P_{mn}=1/3 σε απόσταση 400 Km. Η ποιότητα στον προορισμό επιθυμούμε να είναι $(S/N)_o$=48 dB. Το κανάλι που θα χρησιμοποιήσουμε έχει απόσβεση 1 dB/Km και φασματική πυκνότητα θορύβου $N_0/2=10^{-12}$ Watt/Hz. Αποφασίζουμε να διαχωρίσουμε το κανάλι σε 10 ίσα τμήματα και εξετάζουμε πόση ισχύ P_T πρέπει να εκπέμπεται στην είσοδο κάθε τμήματος καναλιού για την περίπτωση που χρησιμοποιήσουμε:

α) Ένα σύστημα FM με β_f=6

β) Ένα σύστημα PCM με συχνότητα δειγματοληψίας $f_S=2W$, του οποίου τα δυαδικά δεδομένα διαβιβάζονται με B-PSK.

Απάντηση

α)

Για να πετύχουμε την ποιότητα των 48 dB στην έξοδο, πρέπει η $(S/N)_b$ να ικανοποιεί τη σχέση

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = 3\beta_f^2 P_{mn}\left(\frac{S}{N}\right)_b$$

οπότε

$$\left(\frac{S}{N}\right)_b = \frac{1}{3\beta_f^2 P_{mn}}\left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{10^{4.8}}{3\times 6^2\times 1/3} \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_b = 1750$$

Επειδή ισχύει

$$20\left(\beta_f+1\right) = 20\left(6+1\right) = 140 < \left(\frac{S}{N}\right)_b$$

συμπεραίνουμε ότι δεν θα εμφανιστεί φαινόμενο κατωφλίου.

Παρατηρείστε ότι στην είσοδο του δέκτη FM ο ολικός θόρυβος είναι

$$N_{Total} = KB_C N_0 L_p$$

Και επομένως η φαινόμενη (ενεργός) φασματική πυκνότητα θορύβου είναι N_{0eff}

$$N_{0eff} = \frac{N_{Total}}{B_C} = KN_0 L_p$$

Ισχύει:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_b = \left(\frac{P_R}{WN_{0eff}}\right) = \left(\frac{P_T}{WKN_0 L_p}\right) \Rightarrow P_T = \left(\frac{S}{N}\right)_b WKL_p N_0$$

δηλαδή

$$P_T = 1750\times 20\times 10^3\times 10\times 10^4\times 2\times 10^{-12} = 7 \text{ Watt}$$

β)

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το πλήθος bits του PCM v=8 και $R_b=f_S\times v=2\times W\times v$ =320 Kbits/sec. Τέλος η πιθανότητα κατωφλίου $P_{th}=10^{-6}$. Για να γίνει λοιπόν δυνατή η αξιόπιστη διαβίβαση των δυαδικών δεδομένων του PCM πρέπει η πιθανότητα σφάλματος στον τελικό προορισμό, $P_b<P_{th} \Rightarrow P_b<10^{-6}$.

Από τη θεωρία όμως γνωρίζουμε ότι:

$$P_b = KQ\left(\sqrt{\frac{2P_T}{L_p R_b N_0}}\right) \Rightarrow P_T = \left[Q^{-1}\left(\frac{P_b}{K}\right)\right]^2 L_p R_b \left(N_0/2\right)$$

$$P_T > \left[Q^{-1}\left(\frac{10^{-6}}{10} \right) \right]^2 \times 10^4 \times 320 \times 10^3 \times 10^{-12}$$

$\underline{P_T > 0.086 \text{ Watt}}$