ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1Α

Ένα κείμενο αποτελείται από ένα τεράστιο πλήθος τετραψήφιων ακεραίων, που διαχωρίζονται μεταξύ τους μόνο με κενό. Τα ψηφία των τετραψηφίων προέρχονται από το αλφάβητο {0,1,...,9}.

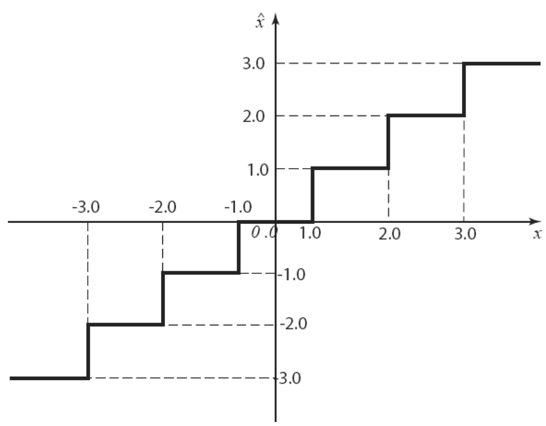
1Α.1 Δεχθείτε τα ψηφία αυτά εμφανίζονται με την ίδια πιθανότητα και ότι είναι στατιστικά ανεξάτητα. Ποια είναι η μικρότερη τιμή του ρυθμού κωδικοποίησης $\bar{R}$, που μπορεί να επιτευχθεί αν χρησιμοποιήσουμε κώδικα εντροπίας;

1Α.2 Χρησιμοποιώντας το Πρόγραμμα .zip διαπιστώνουμε ότι ο ρυθμός κωδικοποίησης είναι ο μισός από αυτόν που υπολογίσαμε στο προηγούμενο Ερώτημα. Τί συμπεραίνετε για τα ψηφία των ακεραίων;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1Β

Δίνεται μια πηγή διακριτών συμβόλων χωρίς μνήμη με αλφάβητο $\{a, b, c, d\}$ και πιθανότητες εμφάνισης $\{0.5, 0.2, 0.2, 0.1\}$. Υπολογίστε την εντροπία της πηγής και χρησιμοποιείστε τον αλγόριθμο Huffman για να καταστρώσετε έναν κώδικα πηγής για τα σύμβολα αυτά. Ποια είναι η τιμή του ρυθμού κωδικωποίησης $\bar{R}$, που πετύχατε;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1C



1C.1 Αν χρησιμοποιήσετε τον κβαντιστή του πιο πάνω σχήματος να δώσετε την κβαντισμένη ακολουθία $\{\hat{x}_n\}$ και την ακολουθία των σφαλμάτων κβάντισης $\{\delta_n\}$ για την ακολουθία δειγμάτων $\{x_n\} = -1.2, -0.7, -1.6, 0.9, 1.9, 0.4$.

1C.2 Υπολογίστε την παραμόρφωση κβάντισης D για ένα σήμα με ομοιόμορφο PDF στο διάστημα $[-4, 4]$ που θα χρησιμοποιήσει για κβάντιση τον κβαντιστή του Σχήματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1Α

Ένα κείμενο αποτελείται από ένα τεράστιο πλήθος τετραψήφιων ακεραίων, που διαχωρίζονται μεταξύ τους μόνο με κενό. Τα ψηφία των τετραψηφίων προέρχονται από το αλφάβητο $\{0,1,...,9\}$.

1Α.1 Δεχθείτε τα ψηφία αυτά εμφανίζονται με την ίδια πιθανότητα και ότι είναι στατιστικά ανεξάτητα. Ποια είναι η μικρότερη τιμή του ρυθμού κωδικοποίησης $\bar{R}$, που μπορεί να επιτευχθεί αν χρησιμοποιήσουμε κώδικα εντροπίας;

1Α.2 Χρησιμοποιώντας το Πρόγραμμα .zip διαπιστώνουμε ότι ο ρυθμός κωδικοποίησης είναι ο μισός από αυτόν που υπολογίσαμε στο προηγούμενο Ερώτημα. Τί συμπεραίνετε για τα ψηφία των ακεραίων;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1Α.1

Το συνολικό αλφαβητο περιλαμβάνει τους ακεραίους από 0 έως 9 και το κενό. Εν τούτοις το κενό δεν χρειάζεται να κωδικοποιηθεί αφού καταλαμβάνει καθορισμένες θέσεις στην ακολουθία συμβόλων. Έτσι ισχύει

$$\bar{R} \geq H = \log_2(10) = 3.32 \text{ bit/symbol}$$

δηλαδή

$$\bar{R} \geq 3.32 \text{ bit/symbol}$$

1Α.2

Μια εξήγηση είναι ότι η παραδοχή πως τα σύμβολα είναι ανεξάρτητα δεν ισχύει. Για παράδειγμα η ακολουθία των τετραψήφιων αριθμών μπορεί να έχει έχει τη μορφή:

$$1111\ 3333\ 7777\ldots$$

Μια άλλη είναι ότι τα σύμβολα δεν είναι ισοπίθανα, οπότε η εντροπία της πηγής είναι μικρότερη από αυτή που υπολογίσαμε αρχικά.

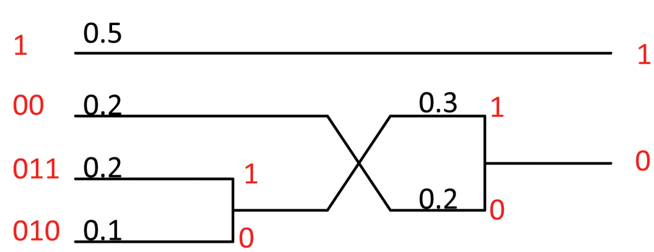
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1Β

Δίνεται μια πηγή διακριτών συμβόλων χωρίς μνήμη με αλφάβητο $\{a, b, c, d\}$ και πιθανότητες εμφάνισης $\{0.5, 0.2, 0.2, 0.1\}$. Υπολογίστε την εντροπία της πηγής και χρησιμοποιείστε τον αλγόριθμο Huffman για να καταστρώσετε έναν κώδικα πηγής για τα σύμβολα αυτά. Ποια είναι η τιμή του ρυθμού κωδικωποίησης $\bar{R}$, που πετύχατε;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$H = -0.5 * \log_2(0.5) - 0.2 * \log_2(0.2) - 0.2 * \log_2(0.2) - 0.1 * \log_2(0.1)$$

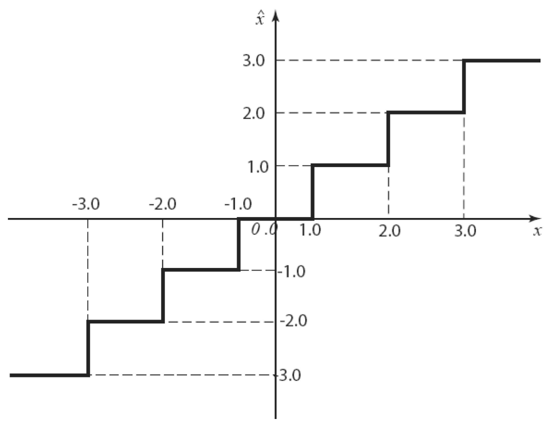
$$H = 1.76 \text{ bit/symbol}$$



$$\bar{R} = 0.5 * 1 + 0.2 * 2 + 0.2 * 3 + 0.1 * 3 = 1.8 \text{ bit/symbol}$$

$$\bar{R} = 1.8 \text{ bit/symbol}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1C



1C.1 Αν χρησιμοποιήσετε τον κβαντιστή του πιο πάνω σχήματος να δώσετε την κβαντισμένη ακολουθία $\{\hat{x}_n\}$ και την ακολουθία των σφαλμάτων κβάντισης $\{\delta_n\}$ για την ακολουθία δειγμάτων $\{x_n\} = -1.2, -0.7, -1.6, 0.9, 1.9, 0.4$.

1C.2 Υπολογίστε την παραμόρφωση κβάντισης D για ένα σήμα με ομοιόμορφο PDF στο διάστημα $[-4, 4]$ που θα χρησιμοποιήσει για κβάντιση τον κβαντιστή του Σχήματος.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1C.1

x_n	-1.2	-0.7	-1.6	0.9	1.9	0.4
$\hat{x}_n$	-1.0	0.0	-1.0	0.0	1.0	0.0
δ_n	-0.2	-0.7	-0.6	0.9	0.9	0.4

1C.2

Η παραμόφωση D υπολογίζεται ως:

$$
\begin{aligned}
D &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)(x-Q(x))^2 dx \\
&= \frac{1}{8}\left[\int_{-4}^{-3}(x+3)^2dx + \int_{-3}^{-2}(x+2)^2dx + \int_{-2}^{-1}(x+1)^2dx + \int_{-1}^{1} x^2dx\right] + \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{8}\left[\int_{1}^{2}(x-1)^2dx + \int_{2}^{3}(x-2)^2dx + \int_{3}^{4}(x-3)^2dx\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[\sum_{i=-3}^{0}\int_{i-1}^{i}(x-i)^2dx + \sum_{i=0}^{3}\int_{i}^{i+1}(x-i)^2dx\right]
\end{aligned}
$$

Στα πιο πάνω ολοκληρώματα αλλάζουμε τη μεταβλητή x με την $y = x - i$ και προκύπτει:

$$
D = \frac{1}{8}\left[\sum_{i=-3}^{0}\int_{-1}^{0} x^2dx + \sum_{i=0}^{3}\int_{0}^{1} x^2dx\right] = \int_{0}^{1} x^2dx = \frac{1}{3}
$$