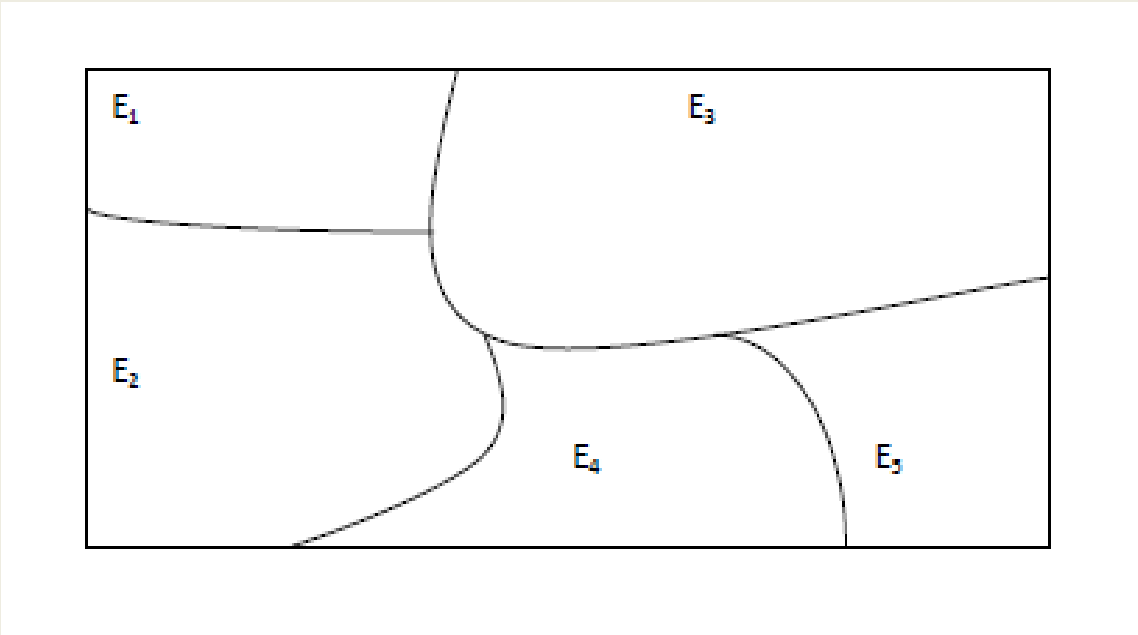
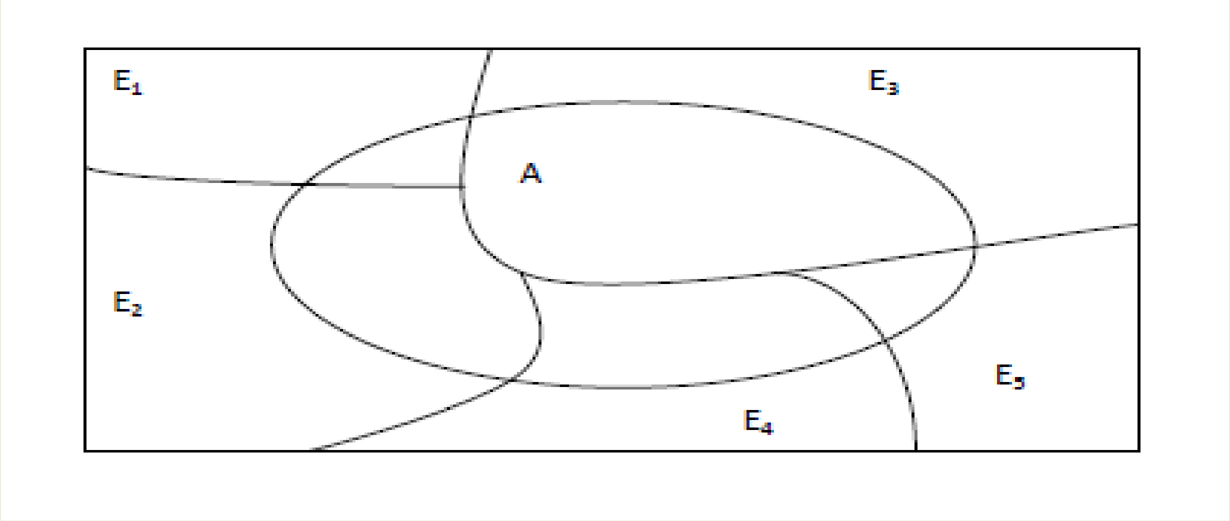
Διαμερισμός

- *Διαμερισμός του δειγματικού χώρου* καλείται ένα συλλογή από k σύνολα E_i που η ένωσή τους ισούται με τον δειγματικό χώρο και ανά δύο αυτά είναι ξένα μεταξύ τους. Δηλαδή $\bigcup_{i=1}^{k} E_i = S$, $E_i \cap E_j = \emptyset$, όπου i και j = 1,.. , k.



Διαμερισμός

- Αν θεωρήσουμε ένα ενδεχόμενο A και το παραστήσουμε στο βέννειο διάγραμμα, τότε ο διαμερισμός του S παράγει και ένα διαμερισμό του A. Ο διαμερισμός του A είναι το σύνολο από τις τομές του A με τα E_i.



Θεώρημα Ολικής πιθανότητας

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(A \cap B_j) \Leftrightarrow P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(A|B_j) \cdot P(B_j)$$

Όταν τα B_j αποτελούν ένα διαμερισμό του δειγματικού χώρου

Παράδειγμα

Μια χώρα αποτελείται από τρεις περιφέρειες. Κάθε περιφέρεια υπολογίζει το ποσοστό ανεργίας του πληθυσμού της και στέλνει, τα στατιστικά στην κεντρική κυβέρνηση. Ένας υπάλληλος της κεντρικής κυβέρνησης βλέπει τα ποσοστά ανεργίας για κάθε περιφέρεια. Πώς μπορεί να υπολογίσει ποιο είναι το ποσοστό ανεργίας για ολόκληρη τη χώρα;

Παράδειγμα

περιφέρεια	Ποσοστό πληθυσμού	Ποσοστό ανεργίας
B_1	0,60	0,25
B_2	0,30	0,22
B_3	0,10	0,18
	Σύνολο 1=100%	

$$\mathrm{P}(\text{Άνεργοι}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})$$
$$= \mathrm{P}(\mathrm{A}|B_1)\cdot \mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(\mathrm{A}|B_2)\cdot \mathrm{P}(B_2) + \mathrm{P}(\mathrm{A}|B_3)\cdot \mathrm{P}(B_3)$$
$$= 0{,}25\cdot 0{,}60 + 0{,}22\cdot 0{,}30 + 0{,}18\cdot 0{,}10 = 0{,}234$$

Θεώρημα του Bayes

Έστω $B_1, \ldots, B_k$ μια διαμέριση ενός δειγματικού χώρου *S*. Τότε για κάθε ενδεχόμενο *A* με $P(A)>0$ έχουμε:

$$P(A)P(B_i \mid A) = P(A \cap B_i) = P(B_i)P(A \mid B_i)$$

άρα $$P(\mathrm{B}_i|A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

επομένως

$$\mathrm{P(B_i|A)} = \frac{\mathrm{P(A|B_i)P(B_i)}}{\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{k}} \mathrm{P}\left(\mathrm{A}\middle|\mathrm{B_j}\right)\mathrm{P(B_j)}}$$

Παράδειγμα 1

Σε ένα εργοστάσιο οι μηχανές Α, Β και Γ παράγουν το 25%, το 35% και το 40% της συνολικής παραγωγής αντίστοιχα. Μετά από έλεγχο διαπιστώθηκε ότι το 5% των παραγόμενων τεμαχίων από τη μηχανή Α, το 4% των παραγόμενων τεμαχίων από τη μηχανή Β και το 2% των παραγόμενων τεμαχίων από τη μηχανή Γ είναι ελαττωματικά.

- **α.** Ένα από τα τεμάχια που έχουν παραχθεί λαμβάνεται τυχαία. Ποια η πιθανότητα να μην είναι ελαττωματικό;
- **β**. Ένα από τα τεμάχια που έχουν παραχθεί λαμβάνεται τυχαία και βρίσκεται ελαττωματικό. Ποια η πιθανότητα να έχει παραχθεί από την μηχανή Β;

Θεωρώ τα ενδεχόμενα:

- Α: το αντικείμενο να παραχθεί από τη μηχανή Α
- Β: το αντικείμενο να παραχθεί από τη μηχανή Β
- Γ: το αντικείμενο να παραχθεί από τη μηχανή Γ
- Ε: το αντικείμενο να είναι ελαττωματικό

Έχουμε: $P(A) = 0{,}25$ $\quad P(B) = 0{,}35$ $\quad P(\Gamma) = 0{,}4$

$P(E \mid A) = 0{,}05$ $\quad P(E \mid B) = 0{,}04$ $\quad P(E \mid \Gamma) = 0{,}02$

Τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ αποτελούν προφανώς μια διαμέριση και άρα χρησιμοποιώντας το **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας** έχω:

- $P(E)= P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B) + P(\Gamma)P(E|\Gamma) =$

  $= 0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}35 \cdot 0{,}04 + 0{,}4 \cdot 0{,}02 = 0{,}0345.$
- Άρα $P(E') = 1 - P(E) = 1 - 0{,}0345 = 0{,}9655$

Ζητάμε την πιθανότητα το τεμάχιο να έχει κατασκευασθεί από την μηχανή *Β,* δεδομένου ότι είναι ελαττωματικό.

Άρα ζητάμε την δεσμευμένη πιθανότητα $P(B|E)$.

- Εφαρμόζουμε το **θεώρημα του Bayes** και έχουμε:

$$\begin{aligned}
P(B|E) &= \frac{P(B)\cdot P(E|B)}{P(A)\cdot P(E|A)+P(B)\cdot P(E|B)+P(\Gamma)\cdot P(E|\Gamma)} \\
&= \frac{P(B)\cdot P(E|B)}{P(E)} \\
&= \frac{0{,}35*0{,}04}{0{,}0345} \\
&= 0{,}406
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2

Δύο ζευγάρια προγραμματίζουν μια βραδινή έξοδο ανάλογα με τον καιρό. Η πιθανότητα εξόδου είναι 0.75 αν δεν βρέξει και 0.25 αν βρέξει. Αν στην πόλη στην οποία ζουν τα ζευγάρια το ποσοστό των βροχερών ημερών είναι 20%,

(i) Να υπολογισθεί η πιθανότητα η βραδινή έξοδος να πραγματοποιηθεί.

(ii) Αν η βραδινή έξοδος πραγματοποιηθεί, ποια η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί υπό βροχή;

B_1 = {να βρέξει},

$B_2 = B_1^c$ = {να μη βρέξει}

και E = {να πραγματοποιηθεί η έξοδος}

i) Με βάση το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(E) = P(E \mid B_1)\cdot P(B_1) + P(E \mid B_2)\cdot P(B_2) = 0{,}25\times 0{,}20 + 0{,}75\times 0{,}80 = 0{,}65$$

ii) Με βάση το Νόμο του Bayes, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(B_1|E) = \frac{P(E|B_1)\cdot P(B_1)}{P(E)} =$$

$$= \frac{P(E|B_1)\cdot P(B_1)}{P(E|B_1)\cdot P(B_1) + P(E|B_2)\cdot P(B_2)}$$

$$= \frac{0{,}25\times 0{,}20}{0{,}65} = \frac{0{,}05}{0{,}65} = 0{,}0769$$