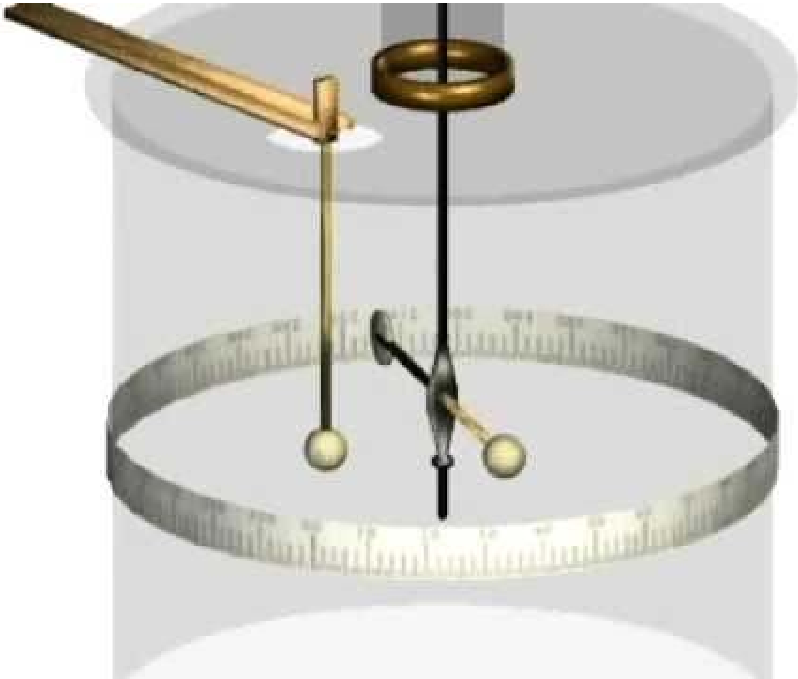
Δύναμη Coulomb

Ηλεκτροστατική Δύναμη.

Ζυγός στρέψης Coulomb



Γενικά χαρακτηριστικά.

Νόμος Coulomb

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{k}\frac{\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2}{\boldsymbol{r}^2}$$

$$\boldsymbol{k} = \frac{1}{4\boldsymbol{\pi\varepsilon}_0}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ \boldsymbol{F}/\boldsymbol{m}$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\boldsymbol{\pi\varepsilon}_0}\frac{\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2}{\boldsymbol{r}^2}$$

Διανυσματική Μορφή

$$\vec{\boldsymbol{F}}_2 = \frac{1}{4\boldsymbol{\pi\varepsilon}_0}\frac{\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2}{\boldsymbol{r}^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\vec{\boldsymbol{r}}_{12}}{\left|\vec{\boldsymbol{r}}_{12}\right|} = \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{\left|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1\right|}$$

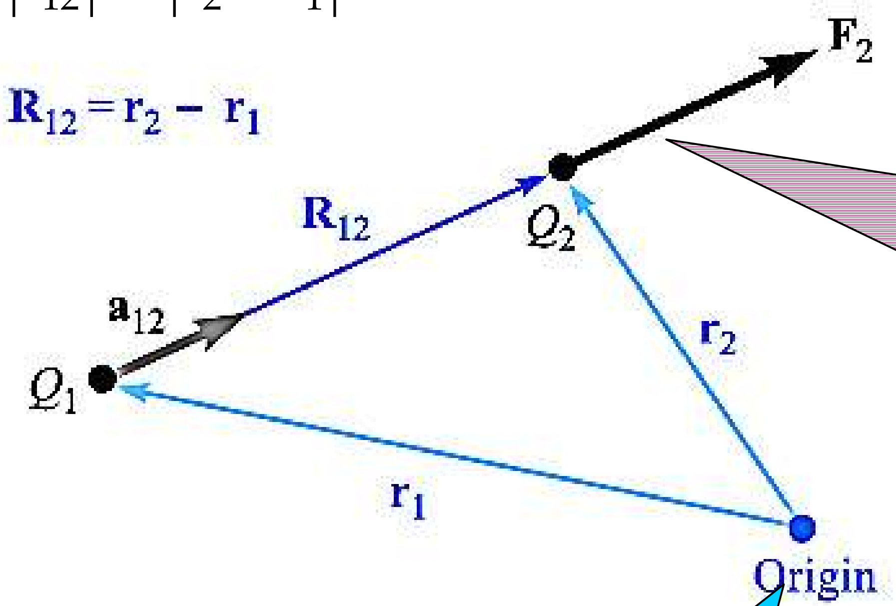
Δράση αντίδραση

$$\vec{\boldsymbol{F}}_1 = -\vec{\boldsymbol{F}}_2 = \frac{1}{4\boldsymbol{\pi\varepsilon}_0}\frac{\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2}{\vec{\boldsymbol{r}}_{21}{}^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{21}$$

Διάνυσμα Δύναμης

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\vec{\boldsymbol{r}}_{12}}{\left|\vec{\boldsymbol{r}}_{12}\right|} = \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{\left|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1\right|}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_2 = \frac{1}{4\boldsymbol{\pi\varepsilon}_0}\frac{\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2}{\boldsymbol{r}^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$



το πρόσημο του γινομένου, προσδιορίζει τη φορά σε σχέση με το μοναδιαίο διάνυσμα πάνω στο R_{12}

Αρχή Αξόνων

Ένταση Ηλεκτρικού Πεδίου.

Δύναμη σε δοκιμαστικό φορτίο

$$\vec{F}_t = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_t}{\vec{r}_{1t}^{\,2}}\hat{r}_{1t}$$

Ορισμός Έντασης

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_t}{q_t}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_t}{q_t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{\vec{r}_{1t}^{\,2}}\hat{r}_{1t}$$

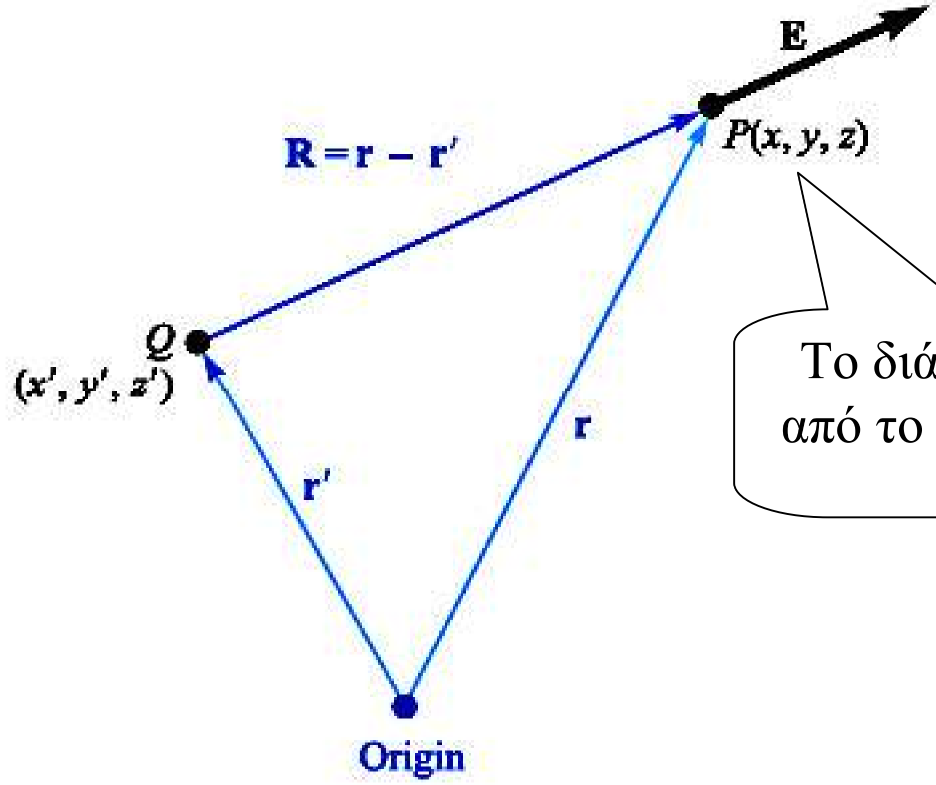
Το $\vec{r}'$ είναι η θέση του φορτίου που δημιουργεί το πεδίο.

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}$$

Συνήθως τοποθετούμε το φορτίο «πηγή» στην αρχή των αξόνων

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left(x^2+y^2+z^2\right)}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{j}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{k}\right)$$

Διάνυσμα έντασης.



Το διάνυσμα ξεκινά από το θετικό φορτίο.

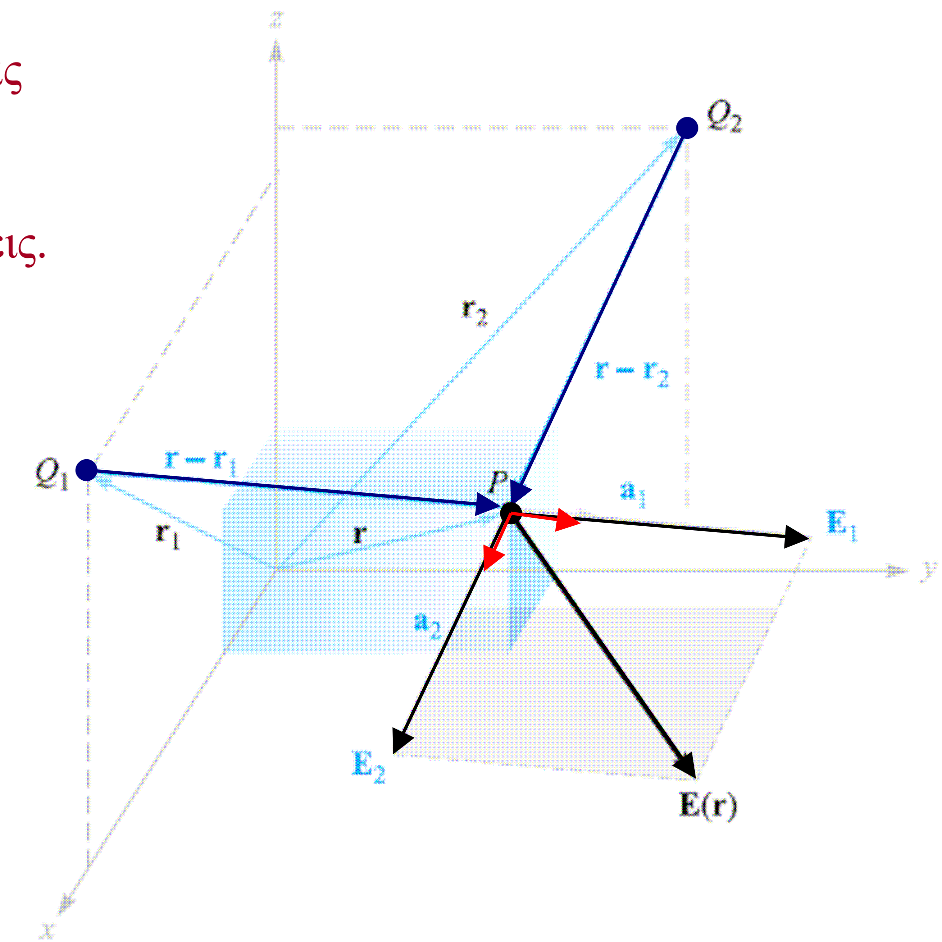
Επαλληλία δυνάμεων

$$\vec{E}(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1(\vec{r}-\vec{r}_1)}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right|^3}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2(\vec{r}-\vec{r}_2)}{\left|\vec{r}-\vec{r}_2\right|^3}+\ldots+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_m(\vec{r}-\vec{r}_m)}{\left|\vec{r}-\vec{r}_m\right|^3}$$

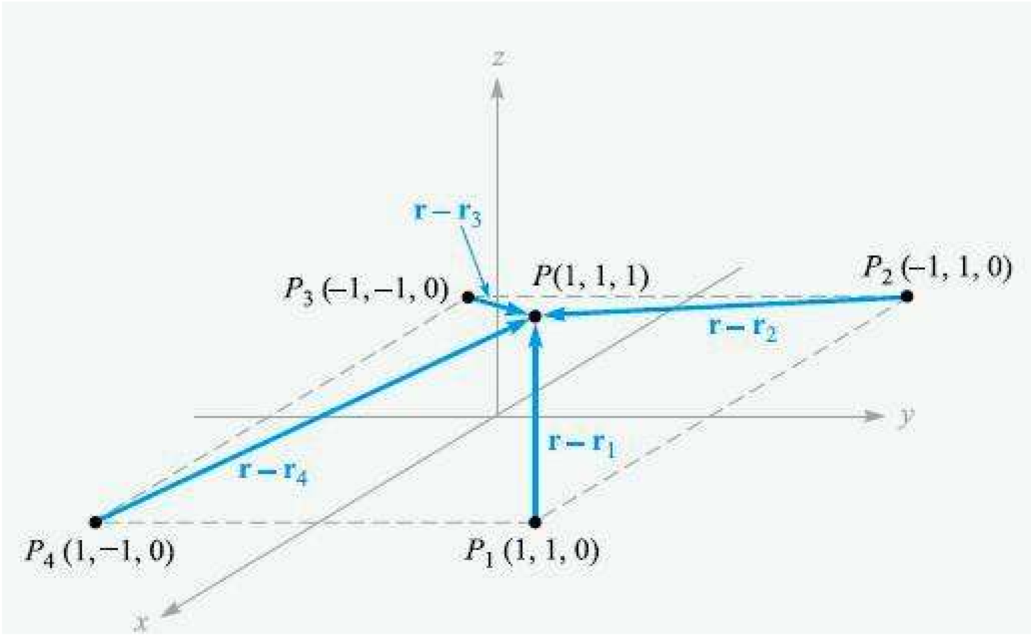
$$\vec{E}(r)=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_m(\vec{r}-\vec{r}_m)}{\left|\vec{r}-\vec{r}_m\right|^3}$$

Παράδειγμα

Λόγω της γραμμικότητας του νόμου Coulomb, μπορώ να προσθέσω διανυσματικά τις εντάσεις.



Παράδειγμα



Στα σημεία P_1 μέχρι P_4 βρίσκεται φορτίο 3 nC.
Υπολογίζουμε την ένταση στο σημείο P.

Συνεχής Κατανομή Φορτίων

Ορίζουμε πυκνότητα φορτίου

$$\rho_v = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta v}$$

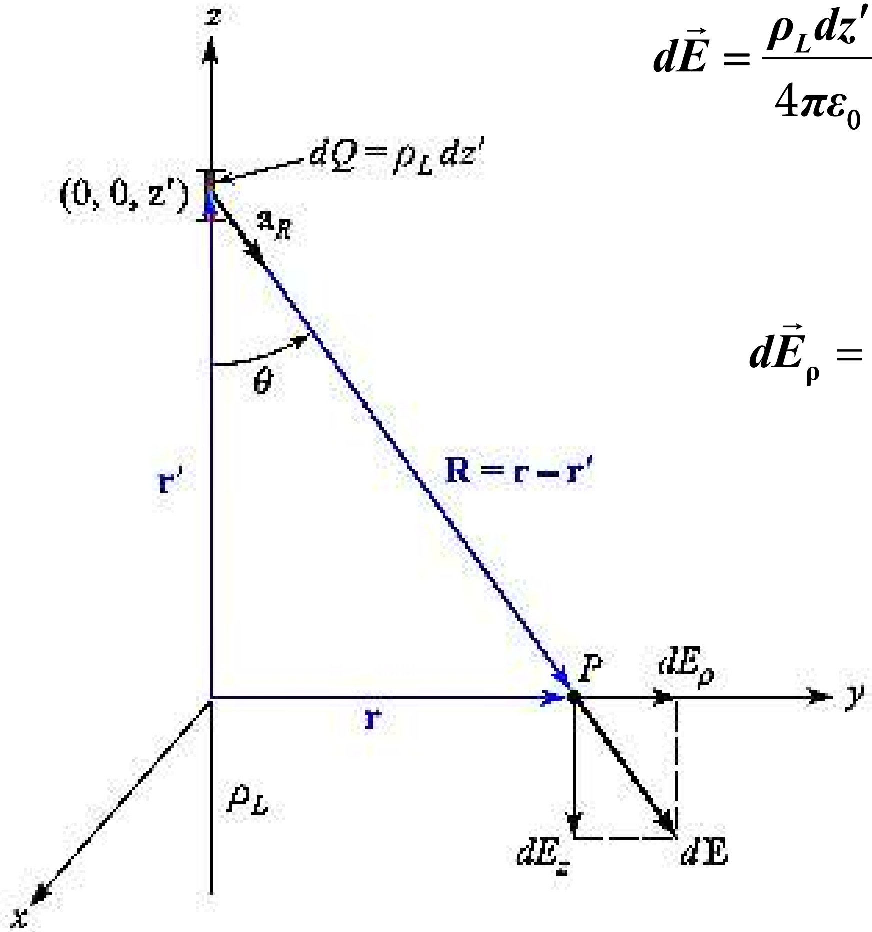
Κάθε ποσότητα Δq, δημιουργεί ένταση ΔΕ

$$\Delta \vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\Delta q}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|}$$

Το άθροισμα των συνεισφορών, αντικαθίσταται από το ολοκλήρωμα πάνω στον όγκο που καταλαμβάνουν τα φορτία.

$$\vec{E}(r) = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho_v(\vec{r}')dv'}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|}$$

Γραμμικό φορτίο



$$d\vec{E} = \frac{\rho_L dz'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}$$

$$\vec{r} = y\hat{j} = r\hat{r}$$

$$\vec{z}' = z'\hat{k}$$

$$\vec{r}-\vec{r}' = r\hat{r} - z'\hat{k}$$

$$\left|\vec{r}-\vec{r}'\right| = \sqrt{z'^2 + r^2}$$

$$d\vec{E}_\rho = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_L(r\hat{r}-z'\hat{k})}{(z'^2+r^2)^{3/2}}dz'$$

Λόγω συμμετρίας οι z συνιστώσες δίνουν άθροισμα μηδέν:

$$dE_\rho = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_L r}{(z'^2+r^2)^{3/2}}dz'$$

$$E_\rho = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{r\,dz'}{(z'^2+r^2)^{3/2}}$$

Αν το νήμα z έχει άπειρο μήκος:

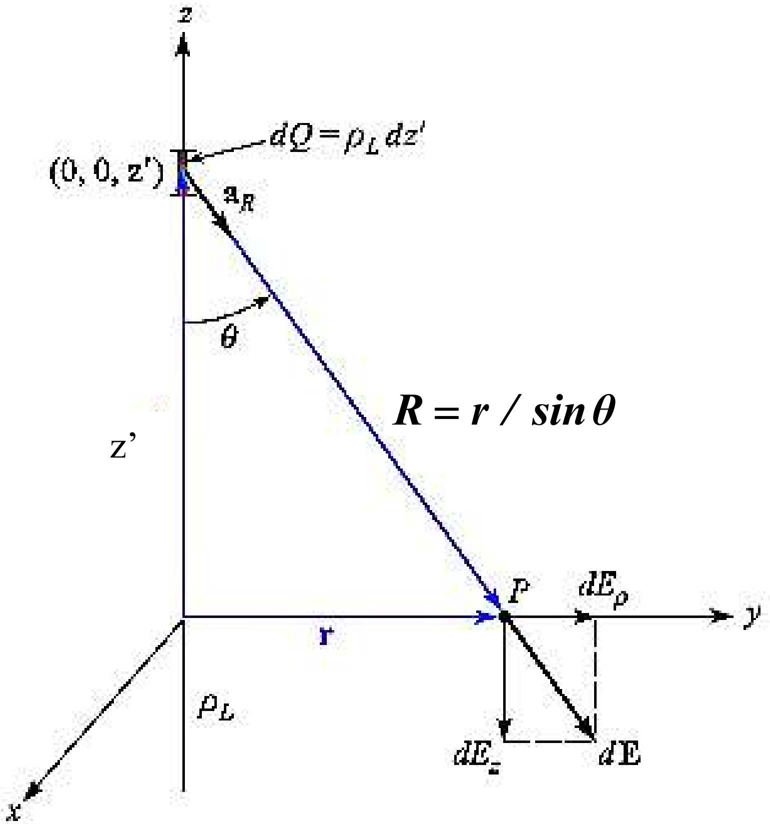
$$E_\rho = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{r\,dz'}{(z'^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0} r\left(\frac{1}{r^2}\frac{z'}{\sqrt{z'^2+r^2}}\right)_{-\infty}^{+\infty}$$

$$E_\rho = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Βλέπουμε ότι η κατανομή πρέπει να έχει πεπερασμένο πάχος.

Εκμεταλλευόμαστε αυτή την ιδιότητα για να δημιουργήσουμε ισχυρό Ηλεκτρικό Πεδίο. Στον ανιχνευτή Geiger –Muller.

Απλούστερος υπολογισμός



$$z' = r\cot\theta \qquad dz' = -\frac{r}{\sin^2\theta}d\theta$$

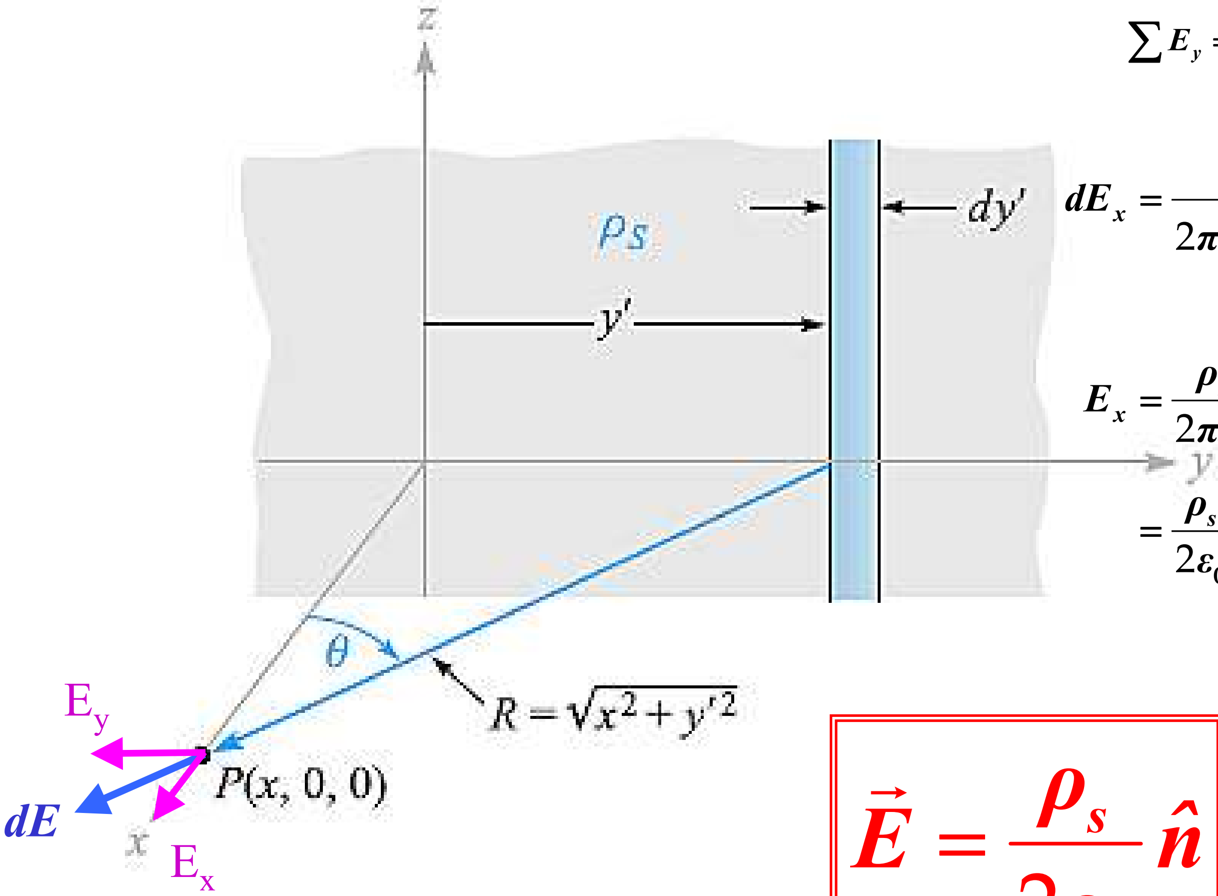
$$R = r / \sin\theta$$

$$dE_r = \frac{\rho_L dz'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\sin\theta = -\frac{\rho_L \sin\theta d\theta}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$E_r = -\frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_\pi^0 \sin\theta\, d\theta = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0 r}\cos\theta\Big|_\pi^0$$

$$E_r = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Επιφανειακό φορτίο



$$\sum E_y = 0$$

$$dE_x = \frac{\rho_s dy'}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y'^2}}\cos\theta = \frac{\rho_s}{2\pi\varepsilon_0}\frac{x dy'}{\left(x^2+y'^2\right)}$$

$$E_x = \frac{\rho_s}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x dy'}{\left(x^2+y'^2\right)} = \frac{\rho_s}{2\pi\varepsilon_0}\left[\tan^{-1}\frac{y'}{x}\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

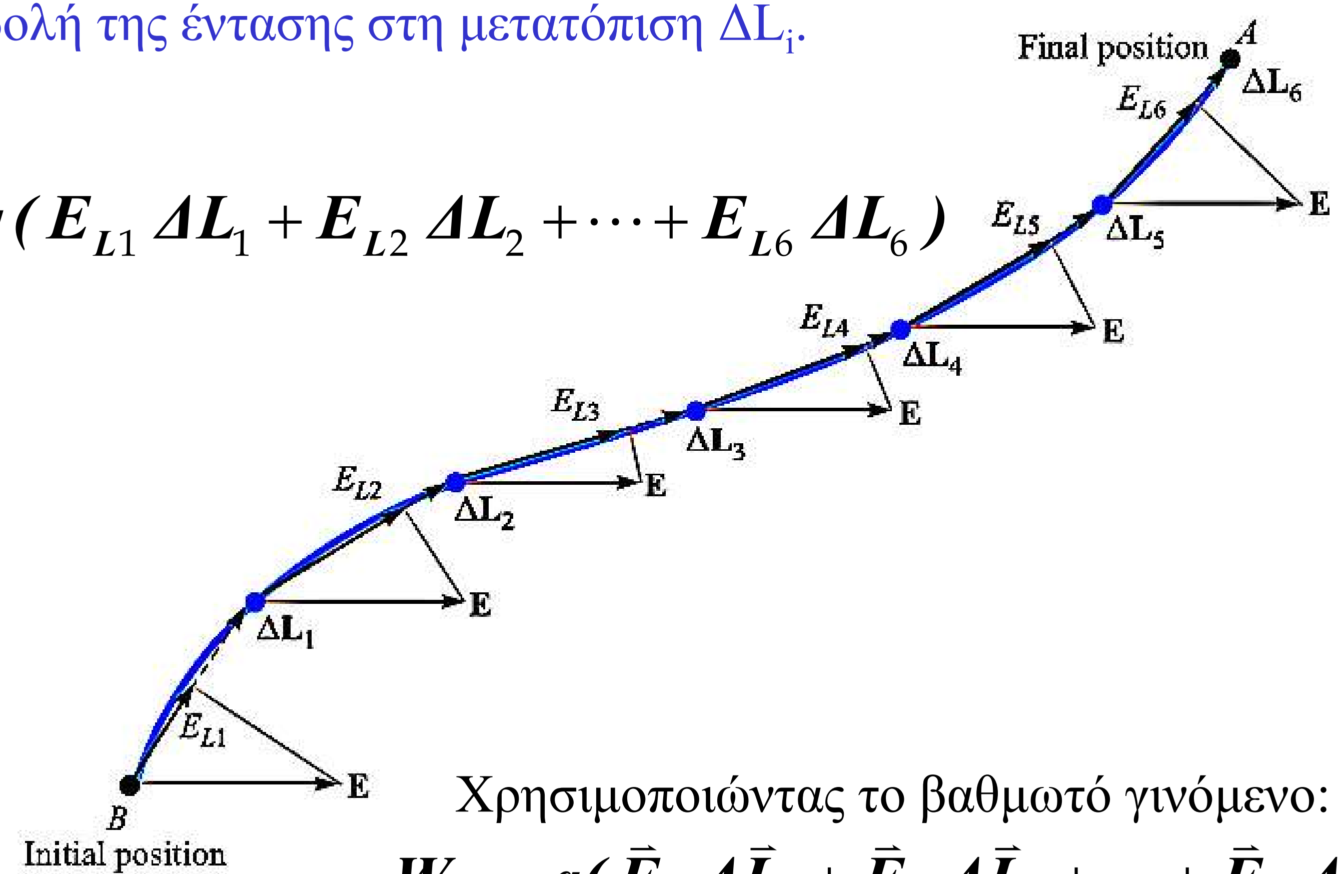
$$= \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{n}}$$

Υπολογισμός έργου

Η ένταση ***E*** είναι σταθερή σε όλο το χώρο. Το έργο υπολογίζεται από την προβολή της έντασης στη μετατόπιση ΔL_i.

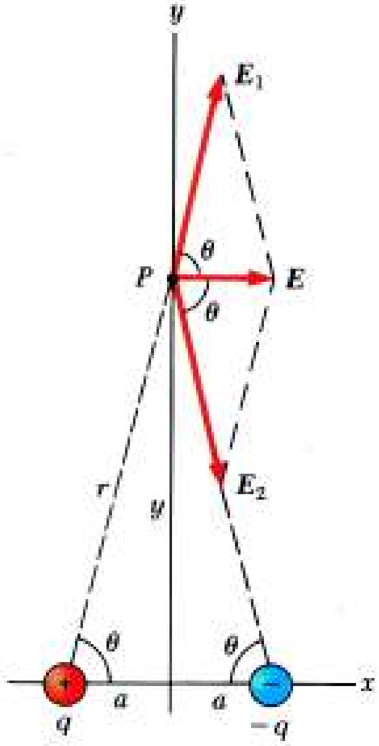
$$W = -q\,(E_{L1}\,\Delta L_1 + E_{L2}\,\Delta L_2 + \cdots + E_{L6}\,\Delta L_6\,)$$

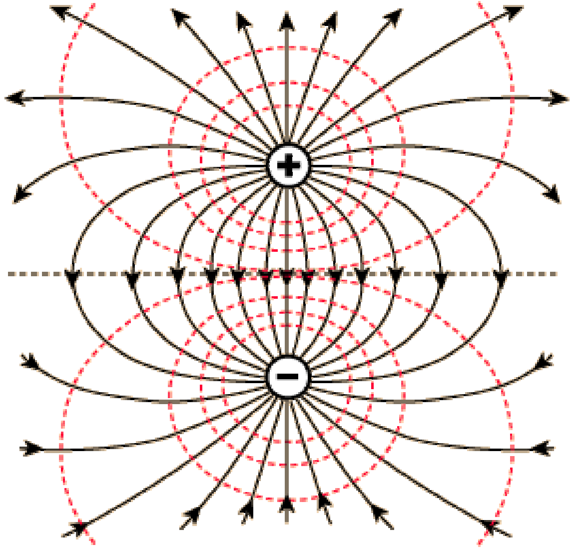


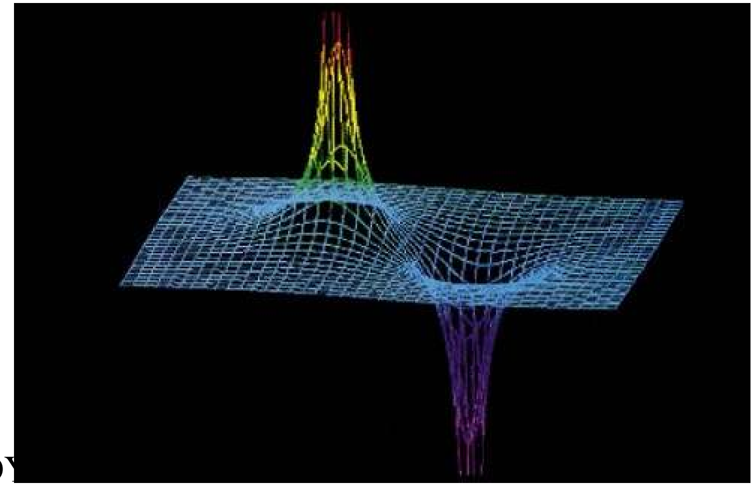
Χρησιμοποιώντας το βαθμωτό γινόμενο:

$$W = -q(\,\vec{E}\cdot\Delta\vec{L}_1 + \vec{E}\cdot\Delta\vec{L}_2 + \cdots + \vec{E}\cdot\Delta\vec{L}_6\,)$$

Ηλεκτρικό Δίπολο







Υπολογισμός Έντασης Πεδίου που δημιουργείται στους άξονες ηλεκτρικού διπόλου

Υπολογίζουμε το πεδίο στο σημείο P που βρίσκεται στον άξονα Z.

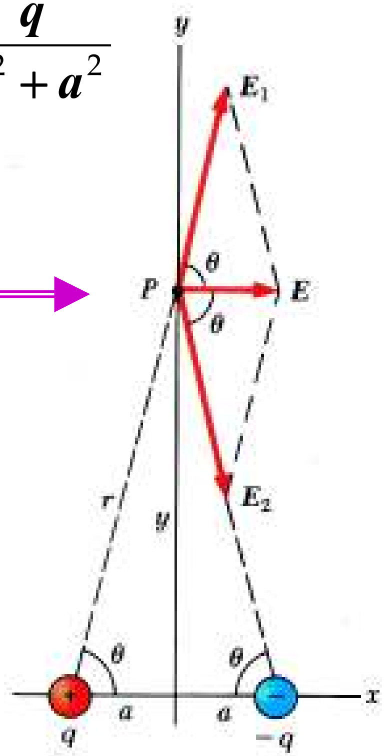
$$E_1 = E_2 = k\frac{q}{r^2} = k\frac{q}{y^2 + a^2}$$

$$E_{1y} = -E_{2y} \quad \Rightarrow E_{1y} + E_{2y} = 0$$

$$\vec{E} = 2E_1 \cos\theta \hat{i}$$

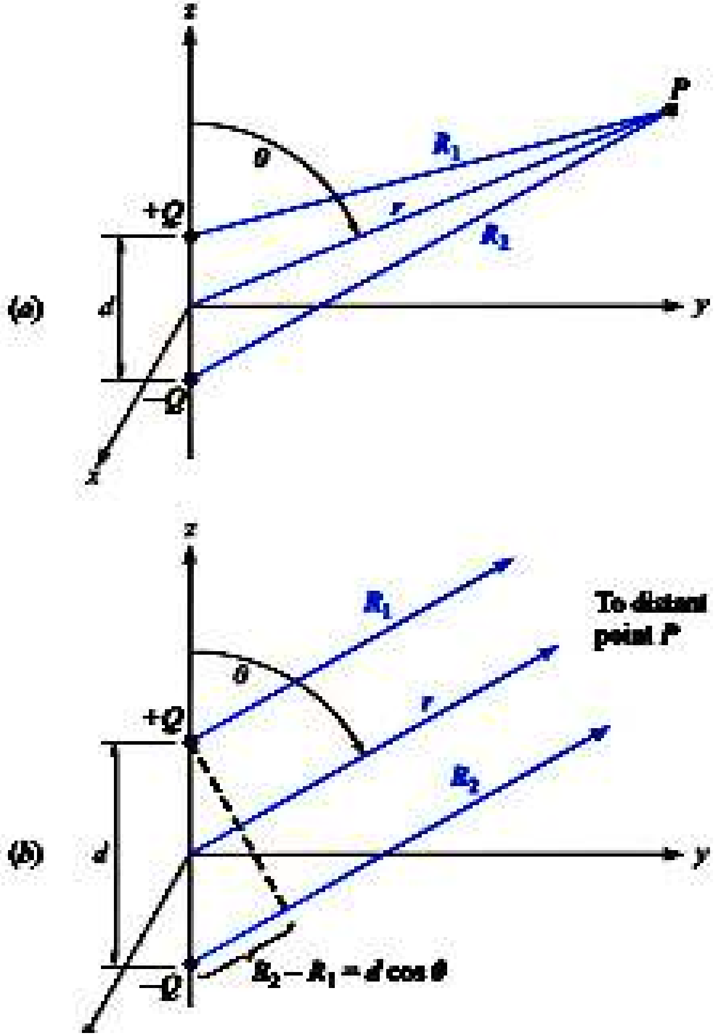
$$\cos\theta = \frac{a}{r} = a(y^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\vec{E} = 2k\frac{qa\hat{i}}{(y^2 + a^2)(y^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} = k\frac{2aq\hat{i}}{(y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$



$$\boxed{Aν \quad y \gg a \quad E = k\frac{2qa}{y^3}}$$

Ηλεκτρικό δίπολο



$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

$$R_2 - R_1 = d\cos\theta$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta}{R_1 R_2}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)\hat{\varphi}\right)$$

$$\vec{E} = -\left(-\frac{Qd\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{r} - \frac{Qd\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{\theta}\right)$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)}$$