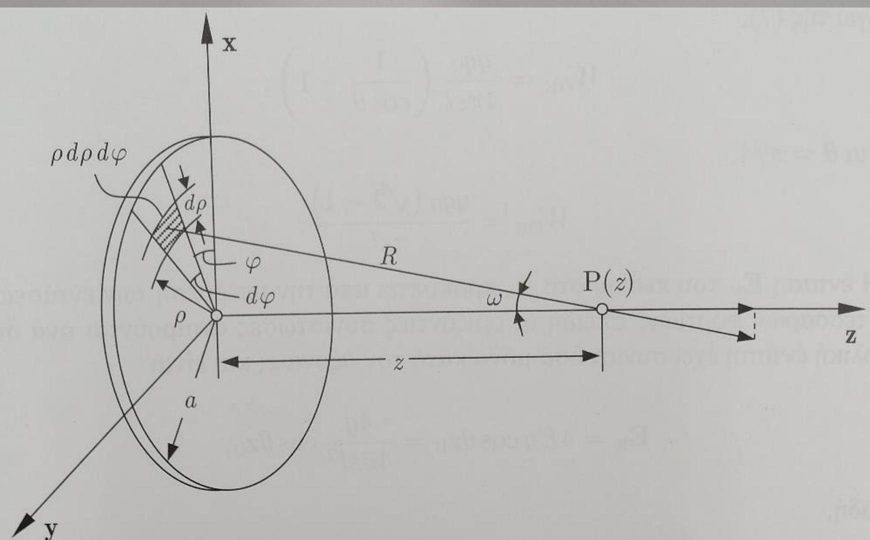
ΛΥΣΗ: Έστω ο κυκλικός δίσκος του σχήματος, που είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με μια επιφανειακή πυκνότητα φορτίου ρ_s. Ζητείται ο υπολογισμός των ϕ και $\mathbf{E}$ στα σημεία P του άξονα Oz.

Το απειροστό δυναμικό $d\phi$ που οφείλεται στο στοιχειώδες φορτίο

$$dQ = \rho_s \rho d\rho d\varphi \tag{1}$$

είναι

$$d\phi = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon R} = \frac{\rho_s \rho d\rho d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+\rho^2)^{1/2}}$$



ΣΧΗΜΑ 2.3

Άρα, το δυναμικό, ως προς το άπειρο, που οφείλεται σ' όλο το φορτίο του δίσκου είναι

$$\phi = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=a} \frac{\rho_s \rho d\rho d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+\rho^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{\rho d\rho}{(z^2+\rho^2)^{1/2}} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\left[\left(z^2+a^2\right)^{1/2} - z\right], \tag{2}$$

ή, αν Q είναι το συνολικό φορτίο του δίσκου ($Q = \pi a^2 \rho_s$),

$$\phi(z) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\left[\left(z^2+a^2\right)^{1/2} - z\right]. \tag{3}$$

Για τον υπολογισμό της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης $\mathbf{E}$, παρατηρούμε, λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας, ότι η συνιστώσα της $\mathbf{E}$ η παράλληλη προς το επίπεδο του δίσκου είναι μηδενική. Έτσι, η μοναδική συνιστώσα που απομένει είναι η E_z. Η απειροστή ένταση dE που οφείλεται στο στοιχειώδες φορτίο dQ είναι

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\rho_s \rho d\rho d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 \left(z^2+\rho^2\right)} \tag{4}$$

Η συνιστώσα dE_z της dE κατά τον άξονα Oz, είναι

$$dE_z = \frac{\rho_s z \rho d\rho d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+\rho^2)^{3/2}} \tag{5}$$

Η ζητούμενη ένταση προκύπτει από την ολοκλήρωση της (5) πάνω σ' όλη την επιφάνεια του δίσκου

$$E_z = \int_0^{2\pi}\int_0^a dE_z = \frac{z\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{\rho d\rho}{(z^2+\rho^2)^{3/2}} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{1}{(z^2+\rho^2)^{1/2}}\right]_0^a \quad (6)$$

ή

$$E_z = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\left[1 - \frac{z}{(z^2+a^2)^{1/2}}\right]. \quad (7)$$

Ας σημειωθεί ότι η ένταση E_z μπορεί να υπολογιστεί και κατευθείαν από τη σχέση $\mathbf{E} = \nabla\phi$. Πράγματι, από την εξίσωση (3) προκύπτει

$$E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\frac{\partial}{\partial z}\left[(z^2+a^2)^{1/2} - z\right] = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\left[1 - \frac{z}{(z^2+a^2)^{1/2}}\right],$$

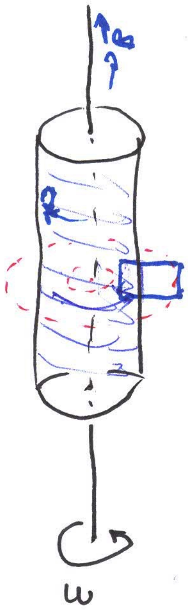
δηλαδή καταλήγουμε και πάλι στο ίδιο αποτέλεσμα.

Τέλος, από την εξίσωση (6), για $a \to \infty$, έχουμε

$$E_z = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \quad (8)$$

Η (8) δίνει την ένταση του πεδίου που παράγει μια ομοιόμορφα φορτισμένη απέραντη επίπεδη επιφάνεια.

Περιστρεφόμενος Κύλινδρος.



(1) $\vec{K} = \sigma\vec{v} = \sigma\vec{\omega}\times\vec{a} = \sigma\omega a\hat{\phi}$

dz

(i). Ομοιόμορφο σ.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & \rho < a, \\ \dfrac{\sigma a}{\varepsilon_0}\dfrac{1}{\rho}\hat{e}_\rho, & \rho > a. \end{cases}$$

(ii). Περιστροφή με ω.

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int |\vec{K}|\, dl_\perp$$

$$|\vec{B}|\cdot z = \mu_0 \int \sigma\omega a\, dz$$

$$\vec{B} = \mu_0\sigma\omega a\hat{k}$$

$$\vec{K} = \underbrace{\sigma\omega a}_{n^* I}\,\hat{e}_\varphi$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \mu_0\sigma\omega a\hat{k}, & \rho < a, \\ 0, & \rho > a. \end{cases}$$

(iii). $\omega(t) \rightarrow \vec{E}_1(\vec{r}) = E_1(\rho)\hat{e}_\rho$.

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = E_1(\rho)2\pi\rho = -\frac{d}{dt}\Phi_B(\rho)$$

$$= -\frac{d}{dt}\begin{cases} \mu_0\sigma\omega a\pi\rho^2, & \rho < a, \\ \mu_0\sigma\omega a\pi a^2, & \rho > a. \end{cases}$$

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0\sigma a}{2}\dfrac{d\omega}{dt}\rho\hat{e}_\rho, & \rho < a, \\ -\dfrac{\mu_0\sigma a^3}{2}\dfrac{d\omega}{dt}\dfrac{1}{\rho}\hat{e}_\rho, & \rho > a. \end{cases}$$

Επομένως:

$$\vec{E}_{επ}(\vec{r},t) = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0}{2}\sigma\dot{\omega} a \rho \,\hat{\varphi}, & \rho < a \\[2ex] -\dfrac{\mu_0}{2}\sigma\dot{\omega} a \dfrac{a^2}{\rho}\,\hat{\varphi}, & \rho > a. \end{cases}$$

Παρατήρηση:

$\rho > a$: συνυπάρχουν το αρχικό στατικό ηλ. πεδίο και το εξ επαγωγής:

$$\frac{|\vec{E}_{επ}|}{|\vec{E}|} = \frac{\frac{\mu_0}{2}\sigma\dot{\omega} a \frac{a^2}{\rho}}{\frac{|\sigma|}{\epsilon_0}\frac{a}{\rho}} = \mu_0\epsilon_0 \frac{|\dot{\omega}|a^2}{2} = \frac{1}{c^2}\frac{|\dot{\omega}|a^2}{2}$$

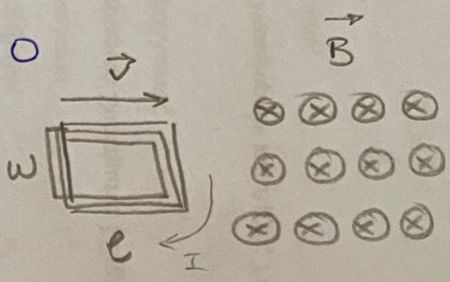
δηλαδή ο λόγος κάποιου χαρακτηριστικού μεγέθους του προβλήματος με διαστάσεις υ^2 προς το τετράγωνο της ταχύτητας του φωτός.

$\frac{\upsilon^2}{c^2} \ll 1 \rightarrow$ επίλυση με διαδοχικές προσεγγίσεις (ανάπτυγμα σε δυνάμεις $(\frac{\upsilon}{c})^2$)

α. την ώρα που εισέρχεται στο πεδίο

β. καθώς κινείται μέσα στο πεδίο

γ. την ώρα που βγαίνει απο το πεδίο



α.

άγνωστο

$F = N I l B = N I \underline{w} B$ (η δύναμη στο πλαί του πηνίου)

επαγόμενη ΗΕΔ $\quad |\varepsilon| = N\frac{d\Phi_B}{dt} = N\frac{d(Bwx)}{dt} = NBwv$

$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{NBwv}{R}$ αντίθετα απο τους δείκτες ρολογιού

$F = N\left(\frac{NBwv}{R}\right)wB = \frac{N^2B^2w^2v}{R}$ προς τα αριστερά

β. Όταν το πηνίο είναι όλο μέσα στο πεδίο

$\Phi_B = NBA =$ σταθερό

άρα $\varepsilon = 0,\ I = 0$ & $F = 0$

c. Καθώς το πηνίο αρχίζει να φεύγει απο το πεδίο, η ροή μειώνεται με ρυθμό Bwv άρα το μέτρο είναι το ίδιο με το α. αλλά τώρα το ρεύμα κινείται με τη φορά του ρολογιού άρα $F = \frac{N^2B^2w^2v}{R}$ προς τα αριστερά

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2019 – 2020

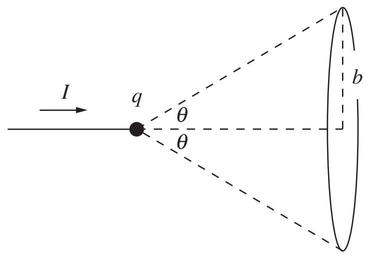
«ΦΥΣΙΚΗ ΙΙΙ»

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ
24 Φεβρουαρίου 2020

Να απαντηθούν τα 4 από τα 5 τα θέματα. Η ανάπτυξη κάθε θέματος να αρχίζει σε νέα σελίδα και να μην παρεμβάλλονται υπο-ερωτήματα από άλλα θέματα. Να αιτιολογούνται πλήρως οι απαντήσεις και οι αριθμητικοί υπολογισμοί να δίνονται με ακρίβεια δύο σημαντικών ψηφίων.

ΘΕΜΑ 4ο

Ένα ευθύγραμμο σύρμα μεγάλου μήκους φέρνει ρεύμα I στην αρχή των αξόνων, όπου αναπτύσσει αυξανόμενο σημειακό φορτίο q, έτσι ώστε $dq/dt = I$. Θεωρήστε τον κύκλο C ακτίνας b του σχήματος, ο οποίος φαίνεται υπό γωνία 2θ από το φορτίο.



Α. Υπολογίστε τη ροή του ηλεκτρικού πεδίου από το φορτίο q, η οποία περνά μέσα από ένα σφαιρικό τομέα με κέντρο το φορτίο και σύνορο τον κύκλο C. Εξηγήστε γιατί η επιλογή της επιφάνειας ροής, με την προϋπόθεση ότι δεν τέμνει το σύρμα, δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα (π.χ. θα μπορούσε να είναι ο δίσκος με σύνορο τον κύκλο C).

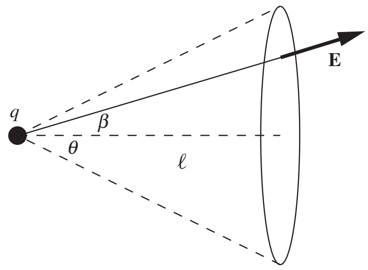
Β. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα, υπολογίστε την κυκλοφορία του μαγνητικού πεδίου πάνω στον κύκλο C από το νόμο Ampère-Maxwell,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \int_{S(C)} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

όπου η επιφάνεια S είναι ο σφαιρικός τομέας του ερωτήματος Α με σύνορο τον κύκλο C.

ΛΥΣΗ

Α. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο σε κάθε σημείο το σφαιρικού τομέα κι έχει μέτρο $q/(4\pi\varepsilon_0 R^2)$, όπου $R = b/\sin\theta$ είναι η ακτίνα της σφαίρας, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Για την ολοκλήρωση της ηλεκτρικής ροής πάνω στο σφαιρικό τομέα διαλέγουμε απειροστούς δακτυλίους που φαίνονται υπό γωνία 2β $(0 < \beta < \theta)$ από το φορτίο, άρα έχουν ακτίνα $R\sin\beta$, περίμετρο $2\pi R\sin\beta$ και απειροστό πλάτος $Rd\beta$. Το εμβαδό ενός τέτοιου δακτυλίου είναι συνεπώς $da = (2\pi R\sin\beta)(Rd\beta) = 2\pi R^2 \sin\beta d\beta$ και η ηλεκτρική ροή:



$$\int E da = \int_0^\theta \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot 2\pi R^2 \sin\beta d\beta = \frac{q}{2\varepsilon_0}\int_0^\theta \sin\beta d\beta = \frac{q}{2\varepsilon_0}(1-\cos\theta)$$

Το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της επιφάνειας S, γιατί αν εξαρτιόταν από αυτήν τότε διαλέγοντας δύο τέτοιες επιφάνειες, χωρίς να τέμνουν το σύρμα, θα περνούσε από αυτές διαφορετική ηλεκτρική ροή. Άρα από την κλειστή επιφάνεια που προκύπτει από την ένωσή τους θα περνούσε μη μηδενική ροή (η διαφορά των δύο ροών), η οποία θα παραβίαζε το νόμο του Gauss, αφού η κλειστή αυτή επιφάνεια δεν περικλείνει φορτία.

Β. Ο όρος του ρεύματος αγωγιμότητας $\mu_0 I$ στο νόμο Ampère-Maxwell μηδενίζεται, γιατί το ρεύμα I δεν περνά μέσα από την επιφάνεια S. Άρα, στην κυκλοφορία του μαγνητικού πεδίου πάνω στον κύκλο C συνεισφέρει μόνο ο όρος του ρεύματος μετατόπισης που, από το προηγούμενο αποτέλεσμα, είναι:

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0\varepsilon_0\int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\cdot d\mathbf{a} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0\varepsilon_0\frac{dq/dt}{2\varepsilon_0}(1-\cos\theta) = \frac{\mu_0 I}{2}(1-\cos\theta)$$

Το τελικό αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο όχι μόνο από την επιλογή της επιφάνειας S αλλά και από την ακτίνα b του συνόρου της (του κύκλου C), όπως αναμένεται, εφόσον όσο μεγαλώνει ο κύκλος τόσο μικραίνει το μαγνητικό πεδίο.

ΘΕΜΑ 5ο

Η επαλληλία $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ των ηλεκτρικών πεδίων δύο επίπεδων κυμάτων που διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις,

$$\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{x}}E_0\cos(kz-\omega t) \qquad \text{και} \qquad \mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{x}}E_0\cos(kz+\omega t),$$

δημιουργεί ένα στάσιμο επίπεδο κύμα με ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}(2E_0)\cos kz\cos\omega t$, που χαρακτηρίζεται από σημεία $z = (2n+1)\pi/(2k)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ στον άξονα διάδοσης στα οποία μηδενίζεται σε όλους τους χρόνους και από χρόνους $t = (2n+1)\pi/(2\omega)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ στους οποίους μηδενίζεται σε όλα τα σημεία του άξονα διάδοσης. Βρείτε το μαγνητικό πεδίο που συνδέεται με αυτό το στάσιμο ηλεκτρικό κύμα με δύο τρόπους:

Α. Υπολογίζοντας τα μαγνητικά πεδία που συνδέονται με καθένα από τα δύο οδεύοντα ηλεκτρικά πεδία και προσθέτοντάς τα.

Β. Εφαρμόζοντας το νόμο του Faraday για να βρείτε το μαγνητικό πεδίο που συνδέεται με το ηλεκτρικό πεδίο του στάσιμου κύματος.

Προφανώς, τα δύο αποτελέσματα πρέπει να είναι τα ίδια.

ΛΥΣΗ

Α. Τα δύο οδεύοντα μαγνητικά πεδία πρέπει να βρίσκονται στον άξονα y, ώστε να είναι κάθετα και στα αντίστοιχα ηλεκτρικά πεδία, στον άξονα x, και στον άξονα διάδοσης z. Το μέτρα των δύο μαγνητικών πεδίων είναι $E_{1,2}/c = E_0/c\,\cos(kz\pm\omega t)$. Τα πρόσημα προσδιορίζονται από τη συνθήκη το διάνυσμα $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ να δείχνει στην κατεύθυνση διάδοσης του κάθε κύματος. Άρα, τα δύο μαγνητικά πεδία είναι:

$$\mathbf{B}_1 = \hat{\mathbf{y}}(E_0/c)\cos(kz-\omega t) \qquad \text{και} \qquad \mathbf{B}_2 = -\hat{\mathbf{y}}(E_0/c)\cos(kz+\omega t)$$

Η επαλληλία $\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ των δύο μαγνητικών πεδίων συνεισφέρει στο στάσιμο κύμα ένα μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{y}}(2E_0/c)\sin kz\sin\omega t$. Αυτό μηδενίζεται σε όλους τους χρόνους στα σημεία $z = n\pi/k$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$και σε όλα τα σημεία του άξονα διάδοσης στους χρόνους $t = n\pi/\omega$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Με άλλα λόγια, είναι "εκτός φάσης" με το ηλεκτρικό πεδίο.

Β. Από το νόμο του Faraday,

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla\times\mathbf{E} = \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial z}(2E_0\cos kz\cos\omega t) = -\hat{\mathbf{y}}(2kE_0)\sin kz\cos\omega t \;\Rightarrow\; \mathbf{B} = \hat{\mathbf{y}}(2kE_0/\omega)\sin kz\sin\omega t$$

Όμως στο οδεύον επίπεδο κύμα $\omega/k = c$, οπότε το μαγνητικό πεδίο είναι τελικά $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{y}}(2E_0/c)\sin kz\sin\omega t$, όπως και με τη μέθοδο Α. Στη χρονική ολοκλήρωση του νόμου Faraday η σταθερή ολοκλήρωσης παραλείπεται, εφόσον οποιοδήποτε χρονικά αμετάβλητο πεδίο μπορεί να προστεθεί στο ηλεκτρομανητικό κύμα χωρίς να το επηρεάσει.