ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ
ΤΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι (12/3/2014)

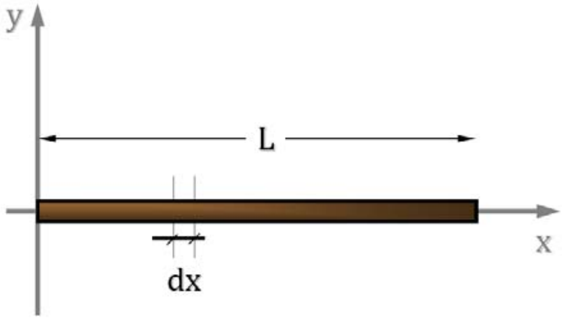
1ο ΘΕΜΑ: Μια κυλινδρική ανομοιογενής ράβδος μήκους L έχει πυκνότητα που δίνεται από τη σχέση

$$\rho(x)=\rho_0\left(1+c\frac{x}{L}\right)$$

όπου c θετική σταθερά και x η απόσταση από τη μια άκρη της ράβδου. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c εάν είναι γνωστό ότι το κέντρο μάζας της ράβδου απέχει τα 3/5 του μήκους της από το ελαφρύτερο άκρο.

Λύση

Τοποθετώντας τη ράβδο κατά μήκος του άξονα x με το ελαφρύτερο άκρο της στο σημείο (0,0), τότε το κέντρο μάζας θα δίνεται από τη σχέση:



$$X_{CM}=\frac{\int^{M} x\,dm}{\int^{M} dm}=\frac{\int^{V} x\rho(x)dV}{\int^{V}\rho(x)dV}=\frac{\int_0^L x\cdot\rho(x)\cdot S\cdot dx}{\int_0^L \rho(x)\cdot S\cdot dx}$$

όπου S η διατομή της ράβδου. Αντικαθιστώντας τη συναρτησιακή εξάρτηση της πυκνότητας από την απόσταση x λαμβάνουμε:

$$X_{CM}=\frac{\int_0^L x\cdot\rho_0\left(1+c\frac{x}{L}\right)dx}{\int_0^L \rho_0\left(1+c\frac{x}{L}\right)dx}=\frac{\int_0^L\left(x+c\frac{x^2}{L}\right)dx}{\int_0^L\left(1+c\frac{x}{L}\right)dx}=\frac{\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L+c\left.\frac{x^3}{3L}\right|_0^L}{\left.x\right|_0^L+c\left.\frac{x^2}{2L}\right|_0^L}=\frac{\frac{L^2}{2}+c\frac{L^3}{3L}}{L+c\frac{L^2}{2L}}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{c}{3}}{1+\frac{c}{2}}L\Rightarrow X_{CM}=\frac{3+2c}{6+3c}L$$

Επειδή όμως γνωρίζουμε πως $X_{CM}=\frac{3}{5}L$, έπεται ότι

$$X_{CM}=\frac{3}{5}L\Rightarrow\frac{3+2c}{6+3c}=\frac{3}{5}\Rightarrow 10c+15=9c+18\Rightarrow\boxed{c=3}$$

2ο ΘΕΜΑ: Η επιτάχυνση κινητού κινούμενου στο επίπεδο (xy) περιγράφεται από τις σχέσεις $\left\{\begin{matrix}a_x=-4\sin(2t)\\a_y=-12\cos(2t)\end{matrix}\right\}$ με αρχικές συνθήκες για t=0 τις $\left\{\begin{matrix}v_{x0}=2\\v_{y0}=0\end{matrix}\right\}$ και $\left\{\begin{matrix}x_0=1\\y_0=6\end{matrix}\right\}$. Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς του κινητού αυτού.

Λύση

Για τη συνιστώσα της επιτάχυνσης κατά την κατεύθυνση x ισχύει:

$$a_x=-4\sin(2t)\Rightarrow\frac{dv_x}{dt}=-4\sin(2t)\Rightarrow dv_x=-4\sin(2t)dt\Rightarrow\int_{v_{x0}}^{v_x}dv_x=\int_0^t-4\sin(2t)dt\Rightarrow$$

$$v_x-v_{x0}=2\cos(2t)\Big|_0^t\Rightarrow v_x-v_{x0}=2\cos(2t)-2\cos(0)\Rightarrow v_x-v_{x0}=2\cos(2t)-2\xrightarrow{v_{x0}=2}$$

$$\boxed{v_x=2\cos(2t)}$$

\`

Εναλλακτικά, η ολοκλήρωση μπορεί να γίνει αόριστα, με προσαρμογή της εμφανιζόμενης σταθεράς ολοκλήρωσης στις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, δηλαδή:

$$a_x = -4\sin(2t) \Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = -4\sin(2t) \Rightarrow dv_x = -4\sin(2t)dt \Rightarrow \int dv_x = \int -4\sin(2t)dt \Rightarrow$$

$$v_x = 2\cos(2t) + c_1$$

Επειδή $v_x(t=0) = v_{x0} = 2$ έπεται $2 = 2\cos(0) + c_1 \;\Rightarrow\; 2 = 2 + c_1 \;\Rightarrow\; c_1 = 0$, άρα και πάλι

$$v_x = 2\cos(2t)$$

Για τη συνιστώσα της επιτάχυνσης κατά την κατεύθυνση y αντίστοιχα ισχύει:

$$a_y = -12\cos(2t) \Rightarrow \frac{dv_y}{dt} = -12\cos(2t) \Rightarrow dv_y = -12\cos(2t)dt \Rightarrow \int_{v_{y0}}^{v_y} dv_y = \int_0^t -12\cos(2t)dt \;\Rightarrow$$

$$v_y - v_{y0} = -6\sin(2t)\Big|_0^t \;\Rightarrow\; v_y - v_{y0} = -6\sin(2t) + 6\sin(0) \;\Rightarrow v_y - v_{y0} = -6\sin(2t) \xrightarrow{v_{y0}=0}$$

$$v_y = -6\sin(2t)$$

Ισοδύναμα, η αόριστη ολοκλήρωση δίνει:

$$\int dv_y = \int -12\cos(2t)dt \Rightarrow v_y = -6\sin(2t) + c_2 \xrightarrow{v_y(t=0)=0} 0 = 0 + c_2 \rightarrow c_2 = 0 \;\Rightarrow\; v_y = -6\sin(2t)$$

Συνεχίζοντας τις ολοκληρώσεις για την εύρεση των αποστάσεων παίρνουμε:

$$v_x = 2\cos(2t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2\cos(2t) \Rightarrow dx = 2\cos(2t)dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t 2\cos(2t)dt \;\Rightarrow\; x - x_0 = \sin(2t)\Big|_0^t$$

$$\Rightarrow\; x - x_0 = \sin(2t) - \sin(0) \;\Rightarrow\; x = x_0 + \sin(2t) \xrightarrow{x_0=1} x = \sin(2t) + 1 \;\Rightarrow$$

$$\boxed{x = \sin(2t) + 1}$$

$$v_y = -6\sin(2t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -6\sin(2t) \Rightarrow dy = -6\sin(2t)dt \Rightarrow \int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t -6\sin(2t)dt \;\Rightarrow\; y - y_0 = 3\cos(2t)\Big|_0^t$$

$$\Rightarrow\; y - y_0 = 3\cos(2t) - 3\cos(0) \;\Rightarrow\; y = y_0 + 3\cos(2t) - 3 \xrightarrow{y_0=6} y = 3\cos(2t) + 3 \;\Rightarrow$$

$$\boxed{y = 3\cos(2t) + 3}$$

Απαλοιφή του χρόνου από τις εξισώσεις αυτές δίνει την εξίσωση της τροχιάς του κινητού:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \sin(2t) + 1 \Rightarrow \sin(2t) = x - 1 \\ y = 3\cos(2t) + 3 \Rightarrow \cos(2t) = \dfrac{y-3}{3} \end{array}\right\} \xrightarrow{\sin^2(2t)+\cos^2(2t)=1} \boxed{\frac{(x-1)^2}{1^2} + \frac{(y-3)^2}{3^2} = 1}$$

Η τροχιά του κινητού είναι δηλαδή έλλειψη με κέντρο το (1,3) και ημιάξονες (a,b)=(1,3).

3ο ΘΕΜΑ: Στην καρότσα ενός φορτηγού βρίσκεται ένα κουτί μάζας m που απέχει απόσταση L=8m από το άκρο της. Όταν το φορτηγό ξεκινάει (και κινείται αποκλειστικά σε ευθεία πορεία) η επιτάχυνση του είναι $a_\varphi=5 m/s^2$. Το κουτί **ολισθαίνει** μέχρι το άκρο της καρότσας με συντελεστή τριβής ολίσθησης μ=0.10.

(α) Σχεδιάστε τις δυνάμεις πάνω στο κουτί εξηγώντας τι είναι η κάθε μία.

(β) Ποια είναι η επιτάχυνση a_κ του κουτιού ως προς το έδαφος;

(γ) Υπολογίστε το χρόνο που χρειάζεται το κουτί για να φτάσει στην άκρη της καρότσας.

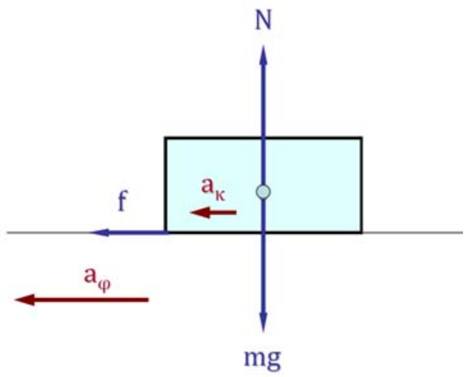
(δ) Προφανώς το κουτί στη συνέχεια πέφτει στο πίσω μέρος του φορτηγού από ύψος h=2m. Υπολογίστε σε ποια **οριζόντια απόσταση** μακριά από τη καρότσα πέφτει το κουτί όταν χτυπάει στο έδαφος και πόσο χρόνο διαρκεί αυτή η πτώση. Θεωρείστε το κουτί ως σημειακή μάζα και αγνοείστε τριβές με τον αέρα.

Λύση

(α) Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα (κουτί), όπως τις αντιλαμβάνεται ακίνητος παρατηρητής επί του εδάφους, είναι:

- Το βάρος του σώματος W=mg
- Η αντίδραση του δαπέδου N=W=mg
- Η δύναμη τριβής ολίσθησης f=μN.

Η δύναμη τριβής έχει την ίδια φορά με την κίνηση του φορτηγού. Φυσικά, αυτή αντιτίθεται στην ολίσθηση του σώματος σε σχέση με την καρότσα του φορτηγού.



(β) Η μόνη δύναμη που είναι υπεύθυνη για την κίνηση του κουτιού είναι η f, δεδομένου ότι η αντίδραση του δαπέδου N εξουδετερώνει το βάρος του σώματος W=mg. Άρα για τον ακίνητο παρατηρητή του εδάφους ισχύει:

$$a_\kappa = \frac{\sum F}{m} = \frac{f}{m} = \frac{\mu N}{m} = \frac{\mu mg}{m} \Rightarrow a_\kappa = \mu g = 0.10 \times 9.81\ m/s^2 \Rightarrow \boxed{a_\kappa = 0.981\ m/s^2}$$

(γ) Η κίνηση του κουτιού σε σχέση με την καρότσα είναι ομαλά επιταχυνόμενη. Η σχετική επιτάχυνση θα δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{a} = \vec{a}_\kappa - \vec{a}_\phi \Rightarrow a = -0.981 - (-5)\ m/s^2 \Rightarrow a = 4.019 m/s^2$$

Ο χρόνος λοιπόν που απαιτείται για να διανυθεί η απόσταση L είναι:

$$L = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{2\times 8m}{4.019 m/s^2}} \Rightarrow \boxed{t = 1.995\ s \approx 2\ s}$$

(δ) Παραμένοντας στο σύστημα του φορτηγού όπου η καρότσα είναι ακίνητη και το σώμα κινείται ομαλά επιταχυνόμενα, τότε το σώμα φτάνοντας στην άκρη της καρότσας θα εκτελέσει οριζόντια βολή από ύψος h, με οριζόντια αρχική ταχύτητα

$$v_0 = at = 4.019 m/s^2 \times 1.995 s = 8.02 m/s$$

και οριζόντια επιτάχυνση $a_\beta=5\ m/s^2$ δεδομένου ότι η τριβή σταματά πια να επενεργεί.

Ο χρόνος πτώσης του σώματος είναι:

$$h=\frac{1}{2}gt_\beta^2 \Rightarrow t_\beta=\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{2\times 2m}{9.81\,m/s^2}} \Rightarrow t_\beta=0.639s$$

Κατά συνέπεια το ζητούμενο βεληνεκές είναι:

$$R=v_0t_\beta+\frac{1}{2}a_\beta t_\beta^2=\left(8.02\times 0.639+\frac{1}{2}\times 5\times 0.639^2\right)m \Rightarrow \boxed{R=6.15m}$$

Εναλλακτική λύση

Για τον ακίνητο παρατηρητή του εδάφους, τη στιγμή που το σώμα εγκαταλείπει την καρότσα εκτελεί οριζόντια βολή από ύψος h, προς την κατεύθυνση κίνησης του φορτηγού, με αρχική ταχύτητα

$$v_\kappa=a_\kappa t=0.981\,m/s^2\times 1.995s=1.96\,m/s$$

Ο χρόνος πτώσης του σώματος είναι πάλι, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση:

$$h=\frac{1}{2}gt_\beta^2 \Rightarrow t_\beta=\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{2\times 2m}{9.81\,m/s^2}} \Rightarrow t_\beta=0.639s$$

Στη διάρκεια του χρόνου αυτού το κουτί διανύει οριζόντια απόσταση R_κ κινούμενο ομαλά (η τριβή έχει σταματήσει πια να επενεργεί), ενώ το επιταχυνόμενο φορτηγό, που ήδη έχει ταχύτητα v_φ , διανύει απόσταση R_φ. Και τα δύο σώματα κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση. Οι αποστάσεις αυτές είναι αντίστοιχα:

$$R_\kappa=v_\kappa t_\beta=1.96\,m/s\times 0.639s=1.25m$$

$$R_\phi=v_\phi t_\beta+\frac{1}{2}a_\phi=(5\,m/s^2\times 1.995s)\times 0.639s+\frac{1}{2}\times 5\,m/s^2\times 0.639^2s^2=7.40m$$

Κατά συνέπεια, η απόσταση κουτιού – καρότσας φορτηγού θα είναι

$$R=R_\phi-R_\kappa=(7.40-1.25)m \Rightarrow \boxed{R=6.15m}$$

4ο ΘΕΜΑ: Ο χρόνος ζωής ενός εν κινήσει ασταθούς υποατομικού σωματιδίου όπως καταγράφεται από φασματογράφο στο σύστημα του εργαστηρίου, από της δημιουργίας του μέχρι της διάσπασής του, είναι $2.5\times 10^{-8}s$. Εάν είναι γνωστό ότι το σωματίδιο αυτό σε ηρεμία έχει χρόνο ζωής $2.0\times 10^{-8}s$, να υπολογισθούν:

(α) Η σχετική του ταχύτητα σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός.

(β) Το μήκος του ανιχνευτή που το σωματίδιο αυτό «αντιλαμβάνεται» κατά την πτήση του, εάν στο εργαστήριο ο ανιχνευτής έχει πραγματικό μήκος 3.75m, παράλληλο με τη τροχιά του.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Λύση

(α) Ο χρόνος ζωής του σωματιδίου σε ηρεμία είναι ο ιδιοχρόνος του τ_0, ο οποίος για τον παρατηρητή του εργαστηρίου, όταν το σωματίδιο κινείται, φαίνεται διεσταλμένος κατά τον παράγοντα Lorentz γ. Άρα:

$$\tau = \tau_0 \gamma \Rightarrow \gamma = \frac{\tau}{\tau_0} \Rightarrow \gamma = \frac{2.5\times 10^{-8}\,\mathrm{s}}{2.0\times 10^{-8}\,\mathrm{s}} \Rightarrow \gamma = 1.25$$

Κατά συνέπεια:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow 1-\beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow \beta = \sqrt{\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}} = \sqrt{\frac{1.25^2-1}{1.25^2}} = \sqrt{0.36} \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}} = 0.60}$$

(β) Το μήκος του ανιχνευτή L_0 αποτελεί για τον πειραματιστή του εργαστηρίου το ιδιομήκος, ενώ για το κινούμενο σωματίδιο αυτό θα φαίνεται συσταλμένο κατά τον παράγοντα γ έχοντας μήκος L:

$$\mathrm{L}_0 = \mathrm{L}\gamma \Rightarrow \mathrm{L} = \frac{\mathrm{L}_0}{\gamma} \Rightarrow \mathrm{L} = \frac{3.75\mathrm{m}}{1.25} \Rightarrow \boxed{\mathrm{L} = 3.00\,\mathrm{m}}$$