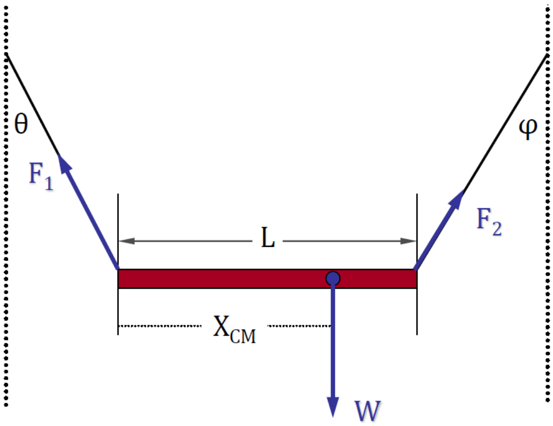
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ
ΤΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι (14/1/2015)

1ο ΘΕΜΑ: Η πυκνότητα μιας κυλινδρικής ανομοιογενούς ράβδου μήκους L δίνεται από τη σχέση $\rho(x) = \rho_0\left(1+\frac{x}{L}\right)$, όπου x η απόσταση από τη μια άκρη της ράβδου και ρ_0 σταθερά.

(α) Να βρεθεί η απόσταση του κέντρου μάζας της ράβδου X_{CM} από το ελαφρύτερο άκρο της.

(β) Η ράβδος κρέμεται από δύο αβαρή σχοινιά πακτωμένα σε δύο κατακόρυφα στηρίγματα και ισορροπεί οριζόντια, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Εάν οι γωνίες των σχοινιών με τα κατακόρυφα στηρίγματα είναι θ και φ αντίστοιχα, να βρεθεί η μεταξύ των σχέση που ικανοποιείται στην κατάσταση ισορροπίας της ράβδου.



Λύση

(α) Το κέντρο μάζας δίνεται από τη σχέση:

$$X_{CM} = \frac{\int^{M} x\,dm}{\int^{M} dm} = \frac{\int^{V} x\cdot\rho(x)\,dV}{\int^{V}\rho(x)\,dV} = \frac{\int_0^L x\cdot\rho(x)\cdot S\cdot dx}{\int_0^L \rho(x)\cdot S\cdot dx} = \frac{\rho_0\cdot S\int_0^L x(1+x/L)dx}{\rho_0\cdot S\int_0^L (1+x/L)dx} = \frac{\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L + \left.\frac{x^3}{3L}\right|_0^L}{\left.x\right|_0^L + \left.\frac{x^2}{2L}\right|_0^L} = \frac{\frac{L^2}{2}+\frac{L^3}{3L}}{L+\frac{L^2}{2L}} = \frac{5}{9}L$$

Η απόσταση κατά συνέπεια του ελαφρύτερου άκρου της ράβδου από το κέντρο βάρος είναι:

$$\boxed{X_{CM} = \frac{5}{9}L}$$

(β) Η στατική ισορροπία της ράβδου επιβάλλει μηδενικό άθροισμα δυνάμεων καθώς και μηδενική συνολική ροπή.

$$\begin{Bmatrix} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum \tau = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1\sin\theta = F_2\sin\varphi \\ F_1\cos\theta + F_2\cos\varphi = W \\ F_2\cos\varphi\cdot L - W\cdot X_{CM} = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1\sin\theta = F_2\sin\varphi \\ F_1\cos\theta + F_2\cos\varphi = W \\ F_2\cos\varphi\cdot L - W\cdot 5/9L = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1\sin\theta = F_2\sin\varphi \\ F_1\cos\theta + F_2\cos\varphi = W \\ W = 9/5\ F_2\cos\varphi \end{Bmatrix}$$

Αντικαθιστώντας την τρίτη εξίσωση στην δεύτερη καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$\begin{Bmatrix} F_1\sin\theta = F_2\sin\varphi \\ F_1\cos\theta + F_2\cos\varphi = 9/5\ F_2\cos\varphi \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1\sin\theta = F_2\sin\varphi \\ F_1\cos\theta = 4/5 F_2\cos\varphi \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{F_1\sin\theta}{F_1\cos\theta} = \frac{5}{4}\frac{F_2\sin\varphi}{F_2\cos\varphi} \Rightarrow$$

$$\boxed{\tan\theta = \frac{5}{4}\tan\varphi}$$

2ο ΘΕΜΑ: Ένα πουλί πετά στο επίπεδο XZ με διανυσματική ταχύτητα που δίνεται συναρτήσει του χρόνου t (σε s) από τη σχέση:

$$\vec{u} = (4 - 3t^2)\hat{i} + 0\hat{j} + 10\hat{k} \ \ (m/s)$$

(α) Να υπολογισθεί το διάνυσμα θέσης και η επιτάχυνσή του, εάν για t=0 βρίσκεται στην αρχή των αξόνων $\{x_0=0, y_0=0, z_0=0\}$.

(β) Να εξεταστεί εάν το πουλί θα ξαναπεράσει από την κατακόρυφο που περνάει από την αρχή των αξόνων. Εάν ναι, σε τι ύψος θα βρίσκεται τη στιγμή αυτή;

Λύση

(α) Οι συνιστώσες του διανύσματος θέσης θα είναι αντίστοιχα:

$$x(t) = \int u_x dt + C_x \qquad y(t) = \int u_y dt + C_y \qquad z(t) = \int u_z dt + C_z$$

Από τις ολοκληρώσεις αυτές προκύπτουν:

$$x(t) = \int (4 - 3t^2) dt + C_x = 4t - t^3 + C_x \xrightarrow{x_0 = 0} x(t) = 4t - t^3$$

$$y(t) = 0 + C_y \xrightarrow{y_0 = 0} y(t) = 0$$

$$z(t) = \int 10 dt + C_z = 10t + C_z \xrightarrow{z_0 = 0} z(t) = 10t$$

Το ζητούμενο διάνυσμα θέσης είναι λοιπόν

$$\boxed{\vec{r} = (4t - t^3)\hat{i} + 0\hat{j} + 10t\hat{k}}$$

Ομοίως, με παραγώγιση του διανύσματος της ταχύτητας, η επιτάχυνση υπολογίζεται:

$$\boxed{\vec{a} = -6t\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}}$$

(β) Η κατακόρυφος που περνάει από την αρχή των αξόνων ικανοποιεί τη σχέση $x = y = 0$. Άρα:

$$x(t) = 4t - t^3 = 0 \Leftrightarrow t(4 - t^2) = 0 \Leftrightarrow t \in \{-2, 0, +2\}$$

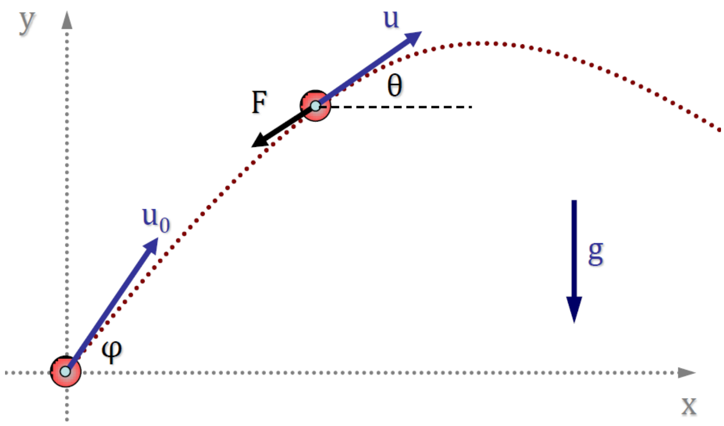
Κατά συνέπεια, τη χρονική στιγμή t=2s το πουλί θα ξαναπεράσει από τη κατακόρυφο αυτή και θα βρίσκεται σε ύψος

$$\boxed{z(t = 2) = 10 \cdot 2 = 20\,m}$$

Προφανώς η αρνητική τιμή του χρόνου αποτελεί φυσικά μη αποδεκτή λύση.

3ο ΘΕΜΑ: Υπολογίστε το μέγιστο ύψος βολής με αρχική ταχύτητα u_0 και γωνία φ, αν υπάρχει αντίσταση του αέρα $\vec{F} = -k\vec{u}$, όπου k θετική σταθερά.

Δίνονται η μάζα m και το k.



Λύση

Για την κατακόρυφη συνιστώσα της κίνησης σε τυχαίο σημείο της τροχιάς ισχύει:

$$-mg - F\sin\theta = \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow -mg - kv\sin\theta = \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow mg - kv_y = \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow -g - \frac{k}{m}v_y = \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dv_y}{g + \frac{k}{m}v_y} = -dt \Rightarrow \int_{v_{y0}}^{v_y} \frac{dv_y}{g + \frac{k}{m}v_y} = \int_0^t -dt \Rightarrow \frac{m}{k}\ln\frac{g + \frac{k}{m}v_y}{g + \frac{k}{m}v_{y0}} = -t \qquad (1)$$

Είναι προφανές, πως η εξίσωση αυτή συνδέει την ταχύτητα v_y με τον χρόνο κίνησης t της βολής. Από τη σχέση (1) μπορούμε να εκφράσουμε την κατακόρυφη ταχύτητα v_y σαν συνάρτηση του χρόνου:

$$\frac{g + \frac{k}{m}v_y}{g + \frac{k}{m}v_{y0}} = e^{-\frac{k}{m}t} \Rightarrow v_y = \left(\frac{mg}{k} + v_{y0}\right)e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k} \qquad (2)$$

Επίσης, από τη σχέση (1) μπορεί να υπολογισθεί ο χρόνος ανόδου t_{max} θέτοντας $v_y = 0$:

$$\frac{m}{k}\ln\frac{g}{g + \frac{k}{m}v_{y0}} = -t_{max} \Rightarrow t_{max} = \frac{m}{k}\ln\left\{1 + \frac{k}{mg}v_{y0}\right\} \qquad (3)$$

Το ζητούμενο λοιπόν ανώτατο σημείο ανόδου $h = h_{max}$ βρίσκεται από την χρονική ολοκλήρωση της ταχύτητας v_y, όπως αυτή περιγράφεται στην εξίσωση (2), με πάνω όριο ολοκλήρωσης τον χρόνο t_{max}:

$$h_{max} = \int_0^{t_{max}} v_y\, dt = \int_0^{t_{max}} \left\{\left(\frac{mg}{k} + v_{y0}\right)e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}\right\} dt$$

4ο ΘΕΜΑ: Τα ασταθή σωματίδια 1 και 2 εκπέμπονται από πηγή, ακίνητη στο εργαστήριο, σε αντίθετες κατευθύνσεις με ταχύτητες $V_1 = 0.6c$ και $V_2 = 0.8c$ αντίστοιχα.

(α) Εάν ο μέσος χρόνος ζωής των (σε ηρεμία) είναι $\tau_1^0 = 8\,\text{ns}$ και $\tau_2^0 = 3\,\text{ns}$ αντίστοιχα, να υπολογισθεί η μέση απόσταση στο σύστημα του εργαστηρίου μεταξύ των δύο σημείων αφανισμού των ασταθών αυτών σωματιδίων.

(β) Υποθέτοντας πως τα σωματίδια αυτά (1 και 2) είναι τα προϊόντα διάσπασης του ακίνητου σωματιδίου της εργαστηριακής πηγής, ποιος είναι ο λόγος των μαζών τους m_1/m_2 (σε ηρεμία) ώστε να ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής;

Λύση

(α) Ο μέσος χρόνος ζωής των σωματιδίων στο σύστημα του εργαστηρίου θα είναι διεσταλμένος κατά τον παράγοντα Lorentz:

$$\tau_1 = \tau_1^0 \cdot \gamma_1 = \frac{\tau_1^0}{\sqrt{1-\beta_1^2}} = \frac{8\text{ns}}{\sqrt{1-0.6^2}} = \frac{8\text{ns}}{0.8} = 10\text{ns}$$

$$\tau_2 = \tau_2^0 \cdot \gamma_2 = \frac{\tau_2^0}{\sqrt{1-\beta_2^2}} = \frac{3\text{ns}}{\sqrt{1-0.8^2}} = \frac{3\text{ns}}{0.6} = 5\text{ns}$$

Η απόσταση των δύο σημείων αφανισμού θα δίνεται λοιπόν από τη σχέση:

$$S = S_1 + S_2 = V_1\tau_1 + V_2\tau_2 = (10\text{ns})\times(0.6c) + (5\text{ns})\times(0.8c) = 6\text{ns}\cdot c + 4\text{ns}\cdot c = 10\text{ns}\cdot c$$

$$\Rightarrow S = 10\cdot 10^{-9}\text{s}\times 3\cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\boxed{S = 3\text{m}}$$

(β) Η αρχή διατήρησης της ορμής επιβάλλει:

$$p_1 = p_2 \Leftrightarrow m_1 V_1 \gamma_1 = m_2 V_2 \gamma_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{V_2\gamma_2}{V_1\gamma_1} \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{0.8\times\frac{1}{0.6}}{0.6\times\frac{1}{0.8}} = \frac{0.64}{0.36} = \frac{16}{9}$$

Άρα

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{16}{9}}$$