ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2022-2023
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι
(24/1/2023)

Να απαντήσετε και στα 5 ισοδύναμα θέματα. Χρόνος εξέτασης 3 h.

1ο ΘΕΜΑ

Από τις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε και να δικαιολογήσετε πλήρως τη σωστή απάντηση.

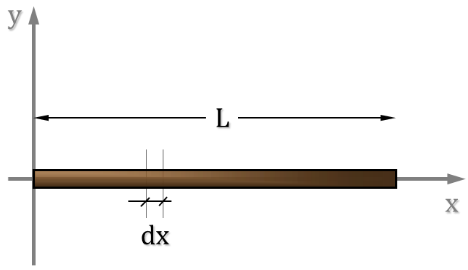
Ερώτηση 1

Η θέση του κέντρου μάζας μιας λεπτής, μη ομογενούς ράβδου μήκους L, η πυκνότητα της οποίας δίνεται από τη σχέση $\rho(x) = \rho_o + (\rho_o/L)x$ όπου ρ_o σταθερά και x η απόσταση από το ένα άκρο της είναι:

(α) (5/6) L (β) (3/2) L (γ) (5/9) L

Απάντηση

(Όπως στις διαφάνειες 04_Phys_I_2022_2023.pdf, σελ. 15)



Εάν η διατομή της ράβδου είναι S, για απειροστό μήκος dx ισχύουν:

$dV = S\,dx$ και $dm = \rho\,dV = \rho_0\left(1+\frac{x}{L}\right)S\,dx$, οπότε

$$x_{CM} = \frac{\int_0^L x\,dm}{\int_0^L dm} = \frac{\int_0^L \rho_0\left(x+\frac{x^2}{L}\right)S\,dx}{\int_0^L \rho_0\left(1+\frac{x}{L}\right)S\,dx} = \frac{L^2/2 + L^3/3L}{L + L^2/2L} = \frac{5}{9}L$$

Σωστή απάντηση το (γ).

Ερώτηση 2

Το πεδίο των επίπεδων δυνάμεων που περιγράφεται από τη σχέση $\vec{F}(x,y) = 2\lambda(x^2+y^2)\hat{i} + 2xy\,\hat{j}$, όπου λ πραγματική σταθερά, είναι συντηρητικό όταν:

(α) λ = 0 (β) λ = 1/2 (γ) λ = 2

Απάντηση

Για να είναι το πεδίο των δυνάμεων συντηρητικό πρέπει $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ (σχέση Euler), οπότε:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial[2\lambda(x^2+y^2)]}{\partial y} = \frac{\partial(2xy)}{\partial x} \Rightarrow 4\lambda y = 2y \Rightarrow \lambda = 1/2$$

Σωστή απάντηση το (β).

Ερώτηση 3

Εάν η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας είναι G, τότε η επιτάχυνση της βαρύτητας g στην επιφάνεια της Γης, η οποία θεωρείται σφαιρική με ακτίνα R και μάζα M, δίνεται από τη σχέση:

(α) $g = G\,R^2/M$ (β) $g = M/R^2$ (γ) $g = G\,M/R^2$

Απάντηση

Το βάρος σώματος μάζας m στην επιφάνεια της Γης είναι $mg = G\frac{mM}{R^2} \Rightarrow g = G\frac{M}{R^2}$

Σωστή απάντηση το (γ).

Ερώτηση 4

Ένα πλοίο επιπλέει τόσο στο γλυκό όσο και στο αλμυρό νερό. Σε σύγκριση με το γλυκό νερό, ο όγκος του αλμυρού νερού που εκτοπίζεται από το πλοίο είναι:

(α) μεγαλύτερος (β) μικρότερος (γ) ίσος

Απάντηση

Επειδή επιπλέει και στα δύο υγρά, το βάρος του σώματος (που είναι ίδιο) θα είναι ίσο με την άνωση.

Στο γλυκό νερό ισχύει $mg = V_\gamma \rho_\gamma g$, ενώ στο αλμυρό νερό $mg = V_\alpha \rho_\alpha g$. Άρα $V_\gamma \rho_\gamma = V_\alpha \rho_\alpha \Rightarrow \dfrac{V_\alpha}{V_\gamma} = \dfrac{\rho_\gamma}{\rho_\alpha}$

και επειδή $\rho_\gamma < \rho_\alpha \Rightarrow V_\alpha < V_\gamma$.

Σωστή απάντηση το (β).

2ο ΘΕΜΑ

Οι συντεταγμένες ενός κινούμενου σωματιδίου στο επίπεδο (xy) δίνονται από τις σχέσεις x(t) = κt και y(t) = 4 - λt^2 όπου κ=3 και λ=1.

(α) Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς.

(β) Να υπολογιστούν τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σαν συνάρτηση του χρόνου.

(γ) Να βρεθεί η ακτίνα καμπυλότητας τη χρονική στιγμή t=2 s.

(δ) Σε κοινό γράφημα να σχεδιάσετε τα διανύσματα της ταχύτητας, της επιτρόχιας και κεντρομόλου επιτάχυνσης τη χρονική στιγμή t=2 s.

Απάντηση

(α) Με απαλοιφή του χρόνου καταλήγουμε στην εξίσωση της τροχιάς $y = 4 - \dfrac{x^2}{9}$.

(β) Παραγωγίζοντας το διάνυσμα θέσης παίρνουμε: $\vec{r}(t) = 3t\,\hat{i} + (4-t^2)\,\hat{j} \Rightarrow \vec{u}(t) = 3\hat{i} - 2t\,\hat{j} \Rightarrow \vec{a}(t) = -2\,\hat{j}$

(γ) 1ος τρόπος

Για t=2s το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης είναι: $a_T = \vec{a}\cdot\hat{u}_T = \vec{a}\cdot\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \dfrac{(-2\hat{j})\cdot(3\hat{i}-4\tilde{j})}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{8}{5}$. Άρα η κεντρομόλος συνιστώσα έχει μέτρο $a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{2^2 - \left(\dfrac{8}{5}\right)^2} = \dfrac{6}{5}$ και κατά συνέπεια η ακτίνα καμπυλότητας είναι:

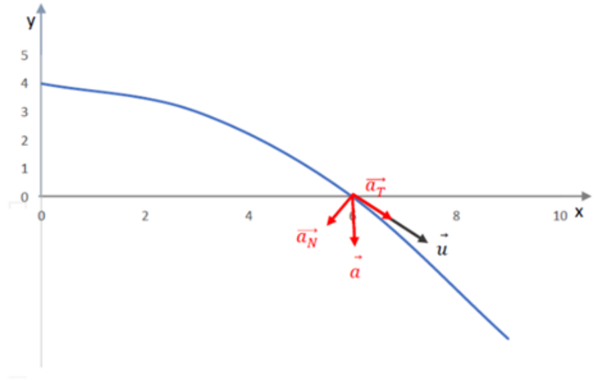
$$\rho = \frac{u^2}{a_N} = \frac{5^2}{6/5} = \frac{125}{6}.$$

(γ) 2ος τρόπος

Ισχύει $|\vec{u}\times\vec{a}| = |\vec{u}\times(\vec{a}_T + \vec{a}_N)| = |\vec{u}\times\vec{a}_N| = |\vec{u}||\vec{a}_N| \Rightarrow |\vec{a}_N| = \dfrac{|\vec{u}\times\vec{a}|}{|\vec{u}|}$, οπότε και $\rho = \dfrac{u^2}{a_N} = \dfrac{u^3}{|\vec{u}\times\vec{a}|}$.

Υπολογίζοντας το εξωτερικό γινόμενο $\vec{u}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -6\hat{k}$ καταλήγουμε στην $\rho = \dfrac{u^3}{|\vec{u}\times\vec{a}|} = \dfrac{5^3}{6} = \dfrac{125}{6}$.

(δ)



3ο ΘΕΜΑ

Ραδιενεργός πηγή εκπέμπει δύο υποατομικά σωματίδια 1 και 2 τα οποία κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις με ταχύτητες αντίστοιχα $V_1=\beta_1 c$ και $V_2=\beta_2 c$ ως προς ακίνητο παρατηρητή.
(α) Να υπολογισθεί η σχετική ταχύτητα V_{12} του ενός σωματιδίου ως προς το άλλο.
(β) Εάν το σωματίδιο 1 με μάζα m έχει ορμή mc ως προς τον ακίνητο παρατηρητή, ποια είναι η ταχύτητά του V_1;
(γ) Εάν επιπρόσθετα είναι γνωστό πως η κινητική ενέργεια του σωματιδίου 2 είναι ίση με την ενέργεια ηρεμίας του, ποια τιμή λαμβάνει τότε η σχετική ταχύτητα V_{12} ;

Απάντηση

(α) Το μέτρο της σχετικής ταχύτητας του ενός σωματιδίου ως προς το άλλο (όπως αποδεικνύεται στην σελ. 35 των διαφανειών *05_Phys_I_2022_2023.pdf*) δίνεται από τη σχέση:

$$V_{12} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} c$$

(β) Για το σωματίδιο (1) ισχύει:

$$p_1 = mc \Rightarrow \gamma_1 m V_1 = mc \Rightarrow \gamma_1 \frac{V_1}{c} = 1 \Rightarrow \gamma_1 \beta_1 = 1 \text{ και δεδομένου πως } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Leftrightarrow \beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}$$

βρίσκουμε $\beta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(γ) Για το σωματίδιο (2) ισχύει πως $K = E_0$ άρα $E = K + E_0 = 2E_0 \xrightarrow{E=\gamma E_0} \gamma_2 = 2$ και κατά συνέπεια $\beta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, οπότε η σχετική ταχύτητα λαμβάνει τη τιμή:

$$V_{12} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} c = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}} c = \frac{2\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)}{4 + \sqrt{6}} c = \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{5} c \approx 0.978c .$$

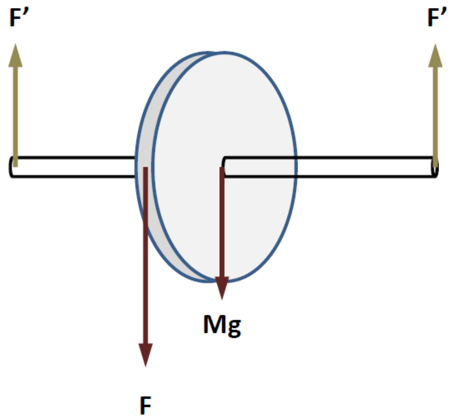
4ο ΘΕΜΑ

Δίσκος ακτίνας R=0.5 m και μάζας m=20 kg μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα και χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που περνάει από το κέντρο του δίσκου. Τραβώντας ένα σπάγγο, που είναι τυλιγμένος γύρω από την περιφέρεια του δίσκου, εφαρμόζουμε μία δύναμη F=9.8 N. Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου και η γωνιακή ταχύτητα μετά από 2s.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου: $I = \frac{1}{2} mR^2$

Απάντηση

Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στον δίσκο είναι το βάρος Mg και η προς τα κάτω έλξη F, καθώς και οι δυνάμεις F’ στα στηρίγματα.



Ισχύει πως $\tau = F\,R$ και από τη σχέση $I\dfrac{d\omega}{dt} = \tau$ με $I = \dfrac{1}{2}MR^2$

προκύπτει $F\,R = \left(\dfrac{1}{2}MR^2\right)a$, όπου α η γωνιακή επιτάχυνση.

Έτσι $a = \dfrac{2F}{M\,R} = 1.96$ rad/s^2, η δε γωνιακή ταχύτητα μετά από 2s, αν ο δίσκος ξεκινήσει από την ηρεμία, είναι $\omega = at = 3.92$ rad/s.

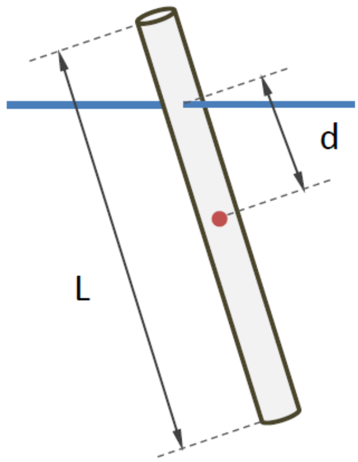
5ο ΘΕΜΑ

Ενας λεπτός χάρακας μήκους L χρησιμοποιείται σαν φυσικό εκκρεμές αναρτώμενος με μια πινέζα στον τοίχο. Ο χάρακας δύναται να περιστραφεί κατακόρυφα χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα διερχόμενο από το σημείο ανάρτησης της πινέζας. Σε ποιο σημείο του χάρακα θα πρέπει να τοποθετηθεί η πινέζα ώστε αυτός να έχει τη διπλάσια περίοδο με απλό μαθηματικό εκκρεμές, του οποίου το μήκος d είναι το ίδιο με την απόσταση του σημείου περιστροφής από το κέντρο μάζας του χάρακα;
Δίνεται η ροπή αδράνειας ράβδου ως προς άξονα περιστροφής που περνά από το κέντρο μάζας:

$$I_C = \frac{1}{12}mL^2$$

Απάντηση

Για το φυσικό εκκρεμές ισχύουν οι σχέσεις:



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd\sin\theta \quad (1)$$

$$I = \frac{1}{12}mL^2 + md^2 \quad (2)$$

$$\sin\theta \approx \theta \quad (3)$$

από τις οποίες προκύπτει η διαφορική εξίσωση της ταλάντωσης

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{12gd}{L^2+12d^2}\theta = 0.$$

Άρα $\omega^2 = \dfrac{12gd}{L^2+12d^2}\theta \Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L^2+12d^2}{12gd}}$.

Η περίοδος απλού εκκρεμούς με μήκος d είναι $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{d}{g}}$, οπότε από τη σχέση T=2 T_0 προκύπτει

$$2\pi\sqrt{\frac{L^2+12d^2}{12gd}} = 4\pi\sqrt{\frac{d}{g}} \Rightarrow d = \frac{L}{6}.$$