① ΜΜΦ 1.

01/10/2018 # Διάλεξη 1η

Βασική Μιγαδική Ανάλυση
Βιβλία: J. E. Marsden και M. J. Hoffman.

1. Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.

"Ορισμός": Το σύνολο C των μιγαδικών αριθμών είναι το εξής σύνολο

$$C = \{ x + iy : x, y \in R \} \quad (\text{όπου } i : i^2 = -1)$$

Στο C ορίζουμε δύο πράξεις:

1) Πρόσθεση: $\overbrace{(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)}^{\text{μιγαδικοί αριθμοί}} = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

2) Πολλ/σμο: $(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1)$

Θα γράφουμε συχνά $z = x + iy$, z μιγαδικός αρ. x πραγματικό μέρος του z ($x \equiv \operatorname{Re} z$) και y φανταστικό μέρος του z ($y \equiv \operatorname{Im} z$).

Προσοχή: Το φανταστικό μέρος του z, δηλ το y, είναι πραγματικός αριθμός.

②

Πρόταση (Ιδιότητες των πράξεων):

(Πρ.1) $z_1+z_2=z_2+z_1$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)

(Πρ.2) $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

(Πρ.3) $z+0=0+z=z$ (ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου).

(Πρ.4) $\forall z\in C$, $\exists$ μοναδικό $z'\in C$: $z+z'=z'+z=0$

Γράφουμε $z'=-z$. (ύπαρξη αντιθέτου).
Αν $z=x+iy$, τότε $-z=(-x)+i(-y)=-x-iy$.

(Πολλ.1) $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$ (αντιμεταθετική ιδιότητα).

(Πολλ.2) $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$ (προσεταιριστικότητα).

(Πολλ.3) $z\cdot 1=1\cdot z=z$ (ύπαρξη μοναδιαίου στοιχείου)

(Πολλ.4) $\forall z\in C$, $z\neq 0$, $\exists$ z' μοναδικό τ.ω. $z\cdot z'=z'\cdot z=1$

Γράφουμε $z'=z^{-1}=\frac{1}{z}$ (ύπαρξη αντιστρόφου)
Αν $z=x+iy$, τότε $z^{-1}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$

(Επιμεριστική) $z_1(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$

$z, z_1, z_2, z_3\in C$, $0,1\in R$ $(1=1+0i)$.

Παρατήρηση: Τα παραπάνω μας λένε ότι το $\mathbb{C}$ με τις δύο αυτές πράξεις, δηλ. η τριάδα $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, είναι ένα σώμα.

Έχουμε ακόμα:

$$z - w = z + (-w)$$
$$\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$$
$$z^n = \underbrace{z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ φορές}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

έχουμε ελευθερία συμβολισμού, αφού το $\mathbb{C}$ είναι σώμα.

Παρατήρηση: Το $\mathbb{C}$ ΔΕΝ είναι διατεταγμένο σώμα.

Δηλ. δυστυχώς, το $\mathbb{C}$ δεν έχει διάταξη, δεν μπορούμε να γράψουμε $z_1 < z_2$ κ.τ.λ.

Παρατήρηση: Το $\mathbb{R}$ είναι υπόσωμα του $\mathbb{C}$:

1) Ισχύει $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ (αφού αν $x \in \mathbb{R}$, τότε $x = x + i0 \in \mathbb{C}$).
2) η πρόσθεση και ο πολ/σμός στο $\mathbb{C}$ επεκτείνουν τις αντίστοιχες πράξεις του $\mathbb{R}$.

Στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2+1=0$ δεν έχει λύση, στο $\mathbb{C}$ όμως, έχει λύσεις, $\pm i$.

Πρόταση: Η εξίσωση $z^2 = w$, όπου $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, έχει ακριβώς δύο λύσεις.
(Άσκηση)

④

<u>Απόδειξη</u>: Γράφουμε $\left.\begin{aligned} z &= x+iy \\ w &= a+ib \end{aligned}\right\}$ (κανονική μορφή) ή (καρτεσιανή).

Άρα θέλουμε, $(x^2+iy)^2 = a+ib \iff x^2-y^2+2xyi =$
$= a+ib \iff \left.\begin{aligned} x^2-y^2 &= a \\ 2xy &= b \end{aligned}\right\}$

(i) $b=0$

Άρα, $a \neq 0$ γιατί $w \neq 0$ (Υ). Τότε, $2xy=0 \Rightarrow x=0$ ή $y=0$.

Αν $a>0$, τότε $y=0$, $a=x^2>0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{a}$

Αν $a<0$, τότε $x=0$, $a=-y^2<0 \Rightarrow y^2=-a>0 \Rightarrow$
$y=\pm\sqrt{-a}$

(ii) $b\neq 0$

Τότε, $x,y\neq 0$. $2xy=b \Rightarrow y=b/2x$.

Άρα, $x^2-b^2/4x^2=a \Rightarrow x^4-ax^2-b^2/4=0$

$x^2=s$

Έχουμε, $\Delta=(-a)^2-4\cdot\left(-\frac{b^2}{4}\right)=a^2+b^2>0$

Άρα, $s=x^2=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}>0$, αλλά με το "−", $s<0$, άτοπο

Άρα, έχουμε δύο λύσεις: $\pm\left(\left(\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)+i\dfrac{b}{2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}}\right)$

5

$\otimes$ προηγούμενο: Οι λύσεις της εξ. $z^2 = w$ συμβολίζονται με $\sqrt{w}$. Η συνάρτηση $f(z) = \sqrt{z}$ είναι δίτιμη συνάρτηση.

Άσκηση: Να λυθεί η εξίσωση $az^2 + bz + c = 0$ (*), όπου $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$

Λύση: Έχουμε, (*) $\Rightarrow z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow z^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}\cdot z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \Rightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow z = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \left(\text{ή } z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

2 λύσεις ($\Delta \neq 0$) — 1 λύση ($\Delta = 0$). $z = -\frac{b}{2a}$

Άσκηση: Να γραφεί σε κανονική μορφή ο αριθμός $z = \frac{\sqrt{2} - 5i}{7 + 2i}$.

Λύση: Πολλ. με τον συζυγή του παρανομαστή:

$$z = \frac{(\sqrt{2} - 5i)\cdot(7 - 2i)}{(7 + 2i)\cdot(7 - 2i)} = \frac{7\sqrt{2} - 35i - 2\sqrt{2}i - 10}{49 + 4 + \cancel{14i} - \cancel{14i}} =$$

$$= \frac{7\sqrt{2} - 10 + (-2\sqrt{2} - 35)i}{53} = \frac{7\sqrt{2} - 10}{53} + \left(-\frac{2\sqrt{2} + 35}{53}\right)$$

6.

02/10/2018 # Διάλεξη 2η

Παράδειγμα: $\sqrt{-4} = \pm 2i$

$\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}\, i$

Σύμβαση: Αν έχουμε $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, τότε με $\sqrt{\alpha}$ συμβολίζουμε την θετική λύση της $x^2 = \alpha$.

Ορισμός: ο συζυγής ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ είναι $\bar{z} = x - iy$.

Πρόταση: (ιδιότητες συζυγούς):

i) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

ii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

iii) $\overline{(z_1/z_2)} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$

iv) $(\bar{\bar{z}}) = z$

v) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$

Αποδ. (ii):

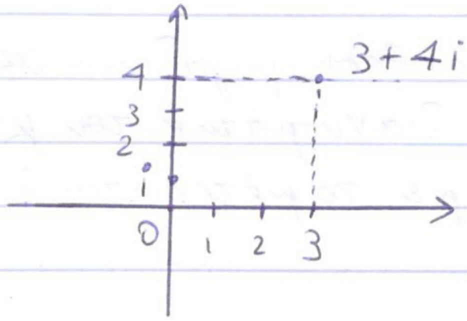
Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Τότε, $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$.

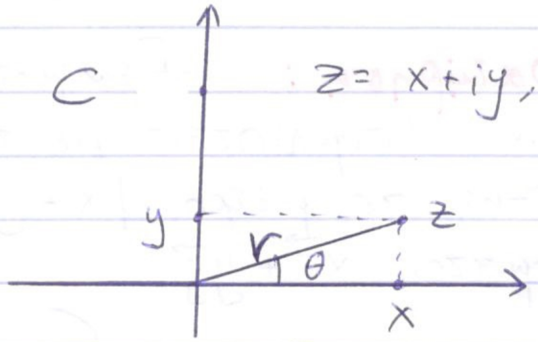
$$\overline{z_1 z_2} = \overline{\underbrace{x_1x_2 - y_1y_2}_{x} + i\underbrace{(x_1y_2 + x_2y_1)}_{y}} = \overbrace{x_1x_2 - y_1y_2}^{x} - i\overbrace{(x_1y_2 + x_2y_1)}^{y}.$$

Ενώ, $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (x_1 - iy_1)\cdot(x_2 - iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + y_1x_2)$

2. Το μιγαδικό επίπεδο, Μέτρο, Όρισμα.

Γεωμετρικά "ταυτίζουμε" το $\mathbb{C}$ με το $\mathbb{R}^2$ "ταυτίζοντας" το $x+iy \in \mathbb{C}$ με το ζεύγος $(x,y) \in \mathbb{R}^2$





Υπάρχουν τότε $r>0$ και $\theta \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\} (*)$

Το r ορίζεται μονοσήμαντα και δίνεται από

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

ενώ θ δεν ορίζεται μονοσήμαντα. Προσθέτοντας $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ σε κάποιο θ, για το οποίο η $(*)$ εξακολουθεί να ισχύει.

Ορισμός: Ο αριθμός $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = x+iy$ ονομάζεται μέτρο ή απόλυτη τιμή του z.

Πρόταση (Ιδιότητες μέτρου):

i) $|z_1 \cdot z_1| = |z_1|\cdot|z_2|$

ii) $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$

iii) $|\bar{z}| = |z|$ vii) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

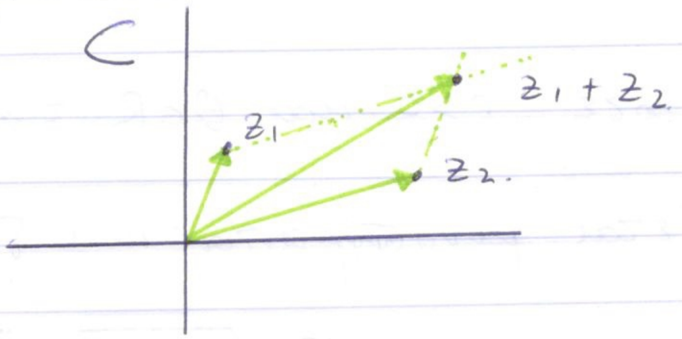
iv) $|Re z| \le |z|$

v) $|Im z| \le |z|$

vi) (τριγωνική ανισότητα):

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

Παρατήρηση: Γεωμετρικά, η πρόσθεση μιγαδικών αριθμών "συμπίπτει" με την πρόσθεση διανυσμάτων του R^2. Επίσης, το μέτρο $|x+iy|$ συμπίπτει με το μέτρο του διανύσματος $x\vec{i} + y\vec{j}$.



Απόδειξη (i): Έστω $z_1, z_2 \in C$, τότε $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$.

Τότε, $|z_1 \cdot z_2|^2 = |x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)|^2 \overset{⊛}{=}$

$= (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 = x_1^2x_2^2 \cancel{- 2x_1x_2y_1y_2} + y_1^2y_2^2 +$

$x_1^2y_2^2 \cancel{+ 2x_1y_1x_2y_2} + x_2^2y_1^2 = x_1^2 \cdot (x_2^2 + y_2^2) + y_1^2(x_2^2 + y_2^2) =$

$= (x_2^2 + y_2^2) \cdot (x_1^2 + y_1^2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$

⊛ προσοχή! Είναι ΜΕΤΡΟ, όχι απόλυτο ($|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $|z|^2 = x^2 + y^2$)

Ορισμός: Έστω $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Ονομάζουμε όρισμα του z, κάθε αριθμό $\theta \in \mathbb{R}$ τ.ω. $z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$.

Γράφουμε $\theta = \arg(z)$. δηλ. είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα

Παρατήρηση: Το όρισμα είναι πλειότιμη συνάρτηση.

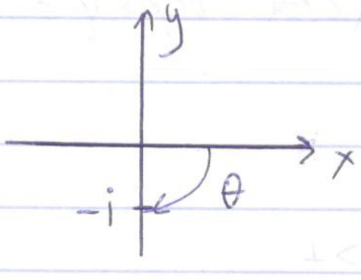
Παράδειγμα: $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Ορισμός: Έστω $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Το μοναδικό $\theta \in (-\pi, \pi]$, για το οποίο έχουμε $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, ονομάζεται πρωτεύον όρισμα του z και συμβολίζεται με $\mathrm{Arg}(z)$.

Παρατήρηση: Το πρωτεύον όρισμα είναι μονότιμη συνάρτηση.

Παράδειγμα: $\mathrm{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$

$\arg(-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$



Ορισμός: Η μορφή $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ ονομάζεται πολική μορφή του z ($z \neq 0$).

* Άσκηση (προς λύση): Έστω $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| < |b|$, και έστω $f(z) = \dfrac{az + b}{\bar{a} + \bar{b}z}$. Να δειχθεί ότι αν $|z| = 1$ τότε $|f(z)| = 1$.

(10.)

Έστω $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $r_1 = |z_1|$ και $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, $r_2 = |z_2|$. Τότε:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)) = \underbrace{r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i(\sin(\theta_1+\theta_2))}_{\text{πολική μορφή! του } z_1\cdot z_2}$$

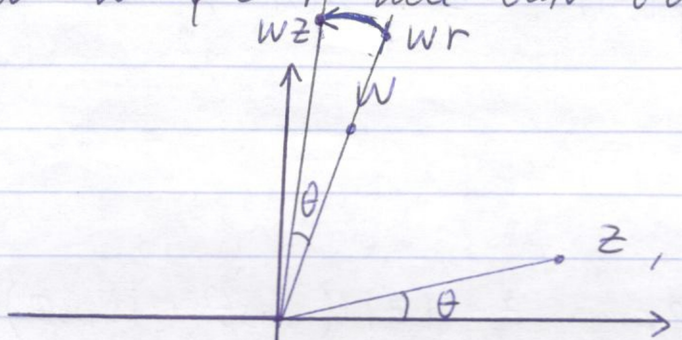
Πρόταση:

i) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

ii) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

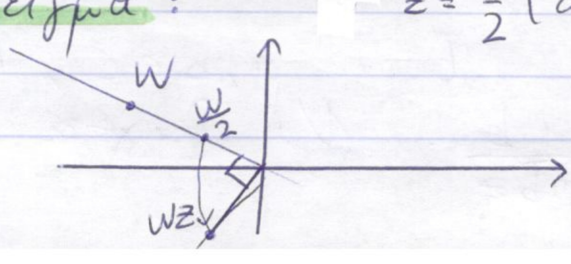
Γεωμετρική ερμηνεία του πολ/σμού: (sos)

Αν πολλ/σουμε το $w \in \mathbb{C}$ με τον $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, τότε ο wz προκύπτει από το w πολλ/ζοντας το μήκος του w με r και στην συνέχεια στρέφοντας κατά θ.

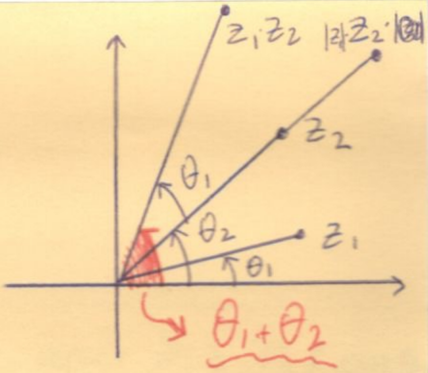


Παράδειγμα: $z = \frac{1}{2}(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})) \left(= \frac{i}{2}\right)$

$|z| = \frac{1}{2}$



(10.)



βλ. γεωμετρική ερμηνεία πολ/σμου.

Έστω $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, r_1 ... $+$ $i\sin\theta_2)$, $r_2 = |z_2|$. Τότε:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin \ldots \sin\theta_1\cos\theta_2)) = \underbrace{r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i(\sin(\theta_1+\theta_2)))}_{\text{πολική μορφή! του } z_1\cdot z_2}$$

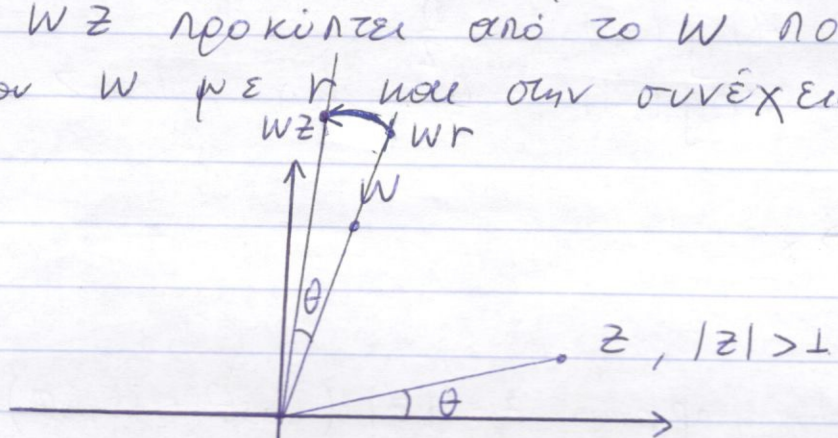
Πρόταση:

i) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

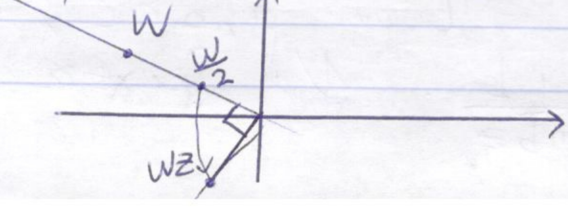
ii) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

Γεωμετρική ερμηνεία του πολ/σμού: (SOS)

Αν πολλ/σουμε το $w \in \mathbb{C}$ με τον $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, τότε ο wz προκύπτει από το w πολλ/ζοντας το μήκος του w με r και στην συνέχεια στρέφοντας κατά θ.



Παράδειγμα: $z = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \left(= \frac{i}{2}\right)$.



$|z| = \frac{1}{2}$

(11.)

Παρατήρηση: Αυτό που βλέπουμε είναι το εξής, για την πρόσθεση μιγαδικών "βολεύει" η κανονική/καρτεσιανή μορφή, ενώ για τον πολλ/σμο "βολεύει" η πολική μορφή.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί ο αριθμός $z=(\sqrt{3}+i)^{20}\cdot(1-i)^{30}$.

Ας πάρουμε την πολική μορφή.

Έστω n το πλήθος αριθμοί σε πολική μορφή $z_1, z_2, \ldots, z_n$, $z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$.
Τότε έχουμε $z_1\cdot z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n \cdot (\cos(\theta_1+\ldots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\ldots+\theta_n))$ (*). Επιλέγουμε τώρα $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = \cos\theta + i\sin\theta \equiv z$ και $|z| = r_1 = r_2 = \ldots = r_n \equiv r = 1$.

Τότε παίρνουμε: $z^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Πρόταση (Τύπος του de Moivre):

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$(\sqrt{3}+i)^{20} = 2^{20}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^{20} = 2^{20}\cdot\left(\cos\left(20\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(20\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2^{20}\cdot\left(\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right)\right) = 2^{20}\cdot\left(\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2^{20}\cdot\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2^{20}\cdot\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

(12.)

(*) αποδείξαμε ένα θεώρημα, τον πολλ/σμό και χρήση των $\cos(a+b), \sin(a+b)$.

$$(1-i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$(1-i)^{30} = 2^{15}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{30} = 2^{15}\cdot\left(\cos\left(-\frac{30\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{30\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 2^{15}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

(*)

Άρα,

$$z = 2^{35}\cdot\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= 2^{35}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 2^{35}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$= 2^{34}\cdot(\sqrt{3} - i)$$

3. n - τάξης ρίζα μιγαδικού αριθμού.

Θεωρούμε $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$ και την εξ. $z^n = w$, $n \in \mathbb{N}$.

Θεωρούμε ότι ο w δίνεται σε πολική μορφή $w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Θα αναζητήσουμε το z στη μορφή $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

γνωστοί

άγνωστοι

Έχουμε τότε:

$$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Άρα, πρέπει και αρκεί

$$\left.\begin{aligned} r^n &= \rho \\ \cos(n\theta) &= \cos(\varphi) \\ \sin(n\theta) &= \sin(\varphi) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} r^n &= \rho \\ \cancel{n\theta = \varphi + 2k\pi} \\ n\theta &= \varphi + 2k\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

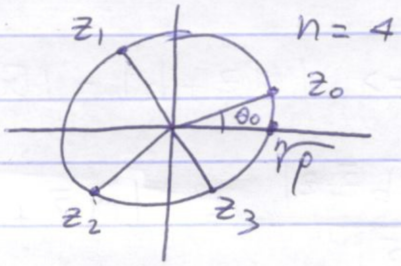
$$\Rightarrow \begin{aligned} r &= \sqrt[n]{\rho} \\ \theta &= \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Άρα $\forall k \in \mathbb{Z}$, ο αριθμός $z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\overset{\theta_k}{\boxed{\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)}} + i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right)$ είναι λύση της εξ.

Παρατηρούμε ότι $\theta_{k+1} - \theta_k = \frac{2\pi}{n}$

Άρα,
$$\theta_0 = \varphi/n$$
$$\theta_1 = \varphi/n + \frac{2\pi}{n}$$
$$\theta_2 = \varphi/n + 2\cdot\frac{2\pi}{n}$$
$$\vdots$$
$$\theta_{n-1} = \varphi/n + (n-1)\frac{2\pi}{n}$$
$$\theta_n = \varphi/n + \cancel{n}\frac{2\pi}{\cancel{n}} = \theta_0 + 2\pi.$$
και άρα $\boxed{z_n = z_0}$

Για τον ίδιο λόγο γενικότερα: $z_{n+k} = z_k$
(δηλ. $z_{n+1} = z_1$, $z_{n+2} = z_2$ ...).



Πρόταση: Η εξ. $z^n = w$, $w \neq 0$, έχει ακριβώς n λύσεις, τις

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right)$$

~~* Άσκηση (προς λύση):~~

$$\left|\frac{az+b}{\bar{a}+\bar{b}z}\right| = \frac{|az+b|\ (1)}{|\bar{a}+\bar{b}z|\ (2)}$$

14.

① $\Rightarrow \quad ||\alpha z| - |b|| \leq |\alpha z + b| \leq |\alpha z| + |b|$ (τριγ. ανισ.)

$\Rightarrow \quad ||\alpha| \cdot \cancel{|z|}^{1} - |b|| \leq |\alpha z + b| \leq |\alpha| \cdot \cancel{|z|}^{1} + |b|$

$\Rightarrow \quad ||\alpha| - |b|| \leq |\alpha z + b| \leq |\alpha| + |b|$

Από (γ): $|\alpha| < |b| \Rightarrow |\alpha| - |b| < 0$

② $\Rightarrow \quad ||\bar{\alpha}| - |\bar{b} z|| \leq |\bar{\alpha} + \bar{b} z| \leq |\bar{\alpha}| + |\bar{b} z|$

$\Rightarrow \quad ||\bar{\alpha}| - |\bar{b}|| \leq |\bar{\alpha} + \bar{b} z| \leq |\bar{\alpha}| + |\bar{b}|$

$\Rightarrow \quad ||\alpha| - |b|| \leq |\bar{\alpha} + \bar{b} z| \leq |\alpha| + |b|$

* Άσκηση (προς λύση):

Έστω $|f(z)| = 1$. Τότε,

$$\left| \frac{\alpha z + b}{\bar{\alpha} + \bar{b} z} \right| = 1 \iff \frac{|\alpha z + b|}{|\bar{\alpha} + \bar{b} z|} = 1 \iff |\alpha z + b| = |\bar{\alpha} + \bar{b} z|$$

$$|\bar{\alpha} + \bar{b} z| = \frac{|\bar{\alpha} + \bar{b} z|}{|\bar{z}|} \cdot |\bar{z}| = \frac{|\bar{\alpha} \bar{z} + \bar{b} \bar{z} \cdot z|}{|\bar{z}|}$$

$$|z| = |\bar{z}| \xRightarrow{|z|=1} |\bar{z}| = 1 \quad \text{και} \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1$$

Άρα, $|\bar{\alpha} + \bar{b} z| = |\bar{\alpha} \bar{z} + \bar{b}| = |\overline{\bar{\alpha} \bar{z} + \bar{b}}| = |\overline{\bar{\alpha} \bar{z}} + \bar{\bar{b}}| =$
$= |\bar{\bar{\alpha}} \cdot \bar{\bar{z}} + \bar{\bar{b}}| = |\alpha z + b|$

Αποδείξαμε ότι ισχύει $|\alpha z + b| = |\bar{\alpha} + \bar{b} z|$, άρα $|f(z)| = 1$.

(15.)

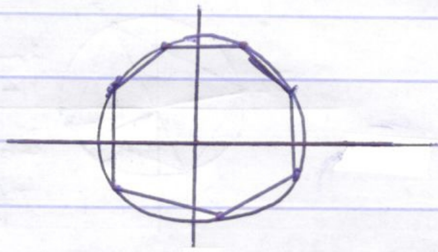
08/10/2018 # Διάλεξη 3η

Την προηγούμενη φορά είχαμε πει:

$z^n = w \Rightarrow \quad w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

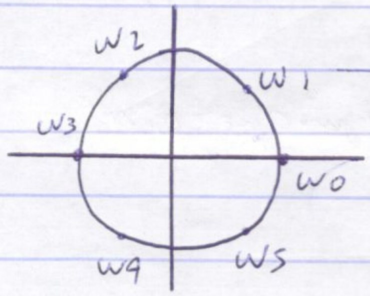
Οι λύσεις $z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right), \ k=0,1,\dots,n-1$

Παρατήρηση: Οι z_k είναι οι κορυφές ενός κανονικού n-γώνου



Ειδικότερα: $z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1} = 0$

Παρατήρηση: Αν $w=1$, οπότε έχουμε την $z^n = 1$, τότε $\rho=1$, $\varphi=0$ και άρα οι λύσεις είναι



$\left(w_k = e^{\frac{2k\pi}{n} i}\right), \quad k=0,\dots,n-1.$

δεν το ορίσαμε ακόμη.

$w_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

Αν πάμε πίσω στην $z^n = w$, τότε

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right) \overset{(*)}{=}$$
$$= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right)\cdot\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z_k = z_0 w_k$$

(*) $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$ ⇝ αναπτύξε τα και βγαίνει

Επίσης, $w_k = w_1^k$

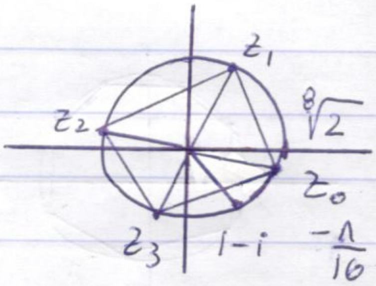
⊛ άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου.

Ισ' απόδ. : $z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1} = 0,\ n \geq 2.$

Έχουμε
$$z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1} = z_0 (w_0 + w_1 + \dots + w_{n-1}) =$$
$$= z_0 \underbrace{(1 + w_1 + w_1^2 + \dots + w_1^{n-1})}_{⊛} \overset{⊛}{=}$$
$$= z_0 \frac{1 - w_1^n}{1 - w_1} = 0$$

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξ. $z^4 = 1 - i$

Έχουμε $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$



Άρα οι λύσεις είναι:

$$z_k = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi/4 + 2k\pi}{4}\right)\right),\quad k = 0, \dots, 3.$$

Εφαρμογή του τύπου de Moivre στην τριγωνομετρία

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

Έστω $n = 4$. α' μέλος $= (\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos^4\theta + 4\cos^3\theta(i\sin\theta) +$
$$+ 6\cos^2\theta(i\sin\theta)^2 + 4\cos\theta(i\sin\theta)^3 + (i\sin\theta)^4 =$$
$$= (\cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta) + i(4\cos^3\theta\sin\theta$$
$$- 4\cos\theta\sin^3\theta)$$

Άρα,
$$\boxed{\begin{cases} \cos(4\theta) = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta \\ \sin(4\theta) = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta \end{cases}}$$

(17.)

Άσκηση (προς λύση): Λύση μαθητή.

$$f(z) = \frac{az+b}{\bar{a}+\bar{b}z}$$. Ν.Δ.Ο. αν $|z|=1$, τότε $|f(z)|=1$

Έστω $|z|=1$. $|f(z)| = \frac{|az+b|}{|\bar{a}+\bar{b}z|} = \frac{|az+b|}{|\overline{\bar{a}+\bar{b}z}|} = \frac{|az+b|}{|a+b\bar{z}|} =$

$$= \frac{|az+b|}{|a+b/z|} = \frac{|az+b|}{|z|\cdot|a+b/z|} = \frac{\cancel{|az+b|}}{\cancel{|az+b|}} = 1$$

4. Βασικές μιγαδικές συναρτήσεις:

i) Πολυωνυμικές συναρτήσεις

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (a_n \in \mathbb{C}),\ z \in \mathbb{C}$$

ii) Ρητές συναρτήσεις

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$, p, q πολυωνυμικές , Π.Ο. $= \mathbb{C} \setminus \{z : q(z)=0\}$

iii) Τετραγωνική ρίζα

$\sqrt{z}$ (δίτιμη συνάρτηση)

Γενικότερα, n-οστή ρίζα

$\sqrt[n]{z}$ (n-τιμη συνάρτηση)

$\sqrt[n]{z} = a \iff a^n = z$

iv) Εκθετική συνάρτηση.

$$e^z \text{ ή } \exp(z)$$

Θα περιμέναμε να ισχύει $e^{x+iy} = e^x \cdot \underbrace{e^{iy}}_{?}$

Είναι λογικό να έχουμε $e^{iy} = \overbrace{1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \dots}^{\text{Taylor}} =$

$$= 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots + i\left[y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\right] =$$

$$= \cos y + i \sin y$$

Ορισμός: Η εκθετική συνάρτηση e^z ή $\exp(z)$, ορίζεται ως $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$.

Ειδικότερα, $\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y}$ Τύπος του Euler

Παρατήρηση: Λόγω του τύπου Euler, θα γράφουμε την πολική μορφή ενός $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$

$$\boxed{z = |z| e^{i\theta}}$$

* Τύπος του de Moivre γίνεται: $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Πρόταση (Ιδιότητες εκθετικής συνάρτησης)

i) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

(19.)

(*) διότι, $e^z = e^{z+2\pi i}$ (κάνε αντικατάσταση $z \to z+2\pi i$)

f περιοδ. $\iff f(x) = f(x+T)$.

exp περιοδ. $\iff \exp(z) = \exp(z+T)$, $\underline{T = 2\pi i}$

ii) Η e^z είναι περιοδική με περίοδο $2\pi i$ (*)

iii) Το πεδίο τιμών της e^z είναι το $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

iv) $|e^{x+iy}| = e^x$

Αποδ. (i), (ii), (iv) απλές

Αποδ. (iii) : Προφανώς $e^z \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$.

Αντίστροφα, έστω $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$. Έστω $w = \rho e^{i\varphi}$, $z = x+iy$.
Τότε, $e^z = e^x e^{iy}$. Έστω ότι $w = e^z$, τότε,

$e^x = \rho \Rightarrow x = \ln\rho \equiv \log\rho$

$e^{iy} = e^{i\varphi} \Rightarrow y = \varphi + 2k\pi$.

(*) Βρήκαμε λοιπόν κάποια $z = \ldots$ Αν ισχύει η $w = e^z$. Έστω τώρα ότι $z = \ldots$, επιβεβ. ότι $e^z = w$

Δηλ. λύσεις είναι τα $z = \log\rho + \varphi i + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ (*)

τότε $w \in e^{\mathbb{C}}$ και $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\Rightarrow e^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

v) Τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Έχουμε ήδη δει ότι
$$\left.\begin{aligned} e^{iy} &= \cos y + i\sin y \\ e^{-iy} &= \cos y - i\sin y \end{aligned}\right\} \overset{\oplus}{\underset{\ominus}{\Rightarrow}} \boxed{\begin{aligned} \cos y &= \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\ \sin y &= \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \end{aligned}}$$

$$* \left\{\begin{aligned} \cosh(y) &= \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \ \text{υπερβολικό συνημίτονο} \\ \sinh(y) &= \frac{e^y - e^{-y}}{2}, \ \text{υπερβολικό ημίτονο} \end{aligned}\right\}$$

20.

Ορισμός: Οι συναρτήσεις $\cos(z)$ και $\sin(z)$ ορίζονται ως

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(z) &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \\ \sin(z) &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \end{aligned}} \quad , \quad z \in \mathbb{C}$$

09/10/2018 # Διάλεξη 4η

$$\left.\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \\ \sin z &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

Πρόταση (ιδιότητες τριγωνομ. συναρτήσεων)

i) $\cos(-z) = \cos(z)$, $\sin(-z) = -\sin(z)$

ii) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$

iii) οι $\cos z$ και $\sin z$ έχουν ως πεδίο τιμών το $\mathbb{C}$. Ειδικότερα δεν είναι φραγμένες.

iv) $\cos(z_1+z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$

$\sin(z_1+z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \sin(z_2)\cos(z_1)$.

v) Είναι περιοδικές με περίοδο 2π.

?

Αποδ. (iii) : Έστω $w \in \mathbb{C}$. Ζητούμε $z \in \mathbb{C}$: $\cos(z) = w$

Έχουμε,

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = w \Leftrightarrow \frac{(e^{iz})^2 + e^{iz}e^{-iz}}{2} = w e^{iz} \xLeftrightarrow{e^{iz} \equiv v} \frac{v^2+1}{2} = wv$$

$\Leftrightarrow \quad v^2 - 2wv + 1 = 0 \quad (1).$

21.

Η (1) έχει μία τουλάχιστον λύση. Τότε θέλαμε $z : e^{iz} = v_0$ ισχύει $v_0 \neq 0$, άρα επειδή $R(e^z) = C(v_0)$. $\exists$ τέτοιο z.

vi) Λογαριθμική συνάρτηση.

Ορισμός: Έστω $z \neq 0$. Τότε, $w = \log z \iff e^w = z$

$\ln z$

Είναι πλειότιμη συνάρτηση.

Έστω $z \neq 0$, $z = re^{i\theta}$. Έστω $w = x + iy$, τότε,

$$e^w = z \Rightarrow e^{x+iy} = re^{i\theta} \Rightarrow e^x e^{iy} = r e^{i\theta} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} e^x = r \\ e^{iy} = e^{i\theta} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \log r \\ y = \theta + 2k\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\log z = \log(re^{i\theta}) = \log r + i\theta + i2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}}$$

Παρατήρηση: Έχουμε δει ότι $\arg(re^{i\theta}) = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
Άρα,
$$\log z = \log|z| + i\arg(z)$$

Ορισμός: Η συνάρτηση $\operatorname{Log} z = \log|z| + i\operatorname{Arg}(z)$, $z \neq 0$, ονομάζεται πρωτεύον λογάριθμος.

Παράδειγμα: $\log(i) = i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i$
$\operatorname{Log}(i) = i\frac{\pi}{2}$

$|i| = 1$, $\arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

22.

Πρόταση (Ιδιότητες της $\log(z)$):

"Σύμβαση": $\log(z) = \log(re^{i\theta}) = \{ \log r + i\theta + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z} \}$

$A+B = \{ a+b \mid a \in A, b \in B \}$

$\lambda A = \{ \lambda a \mid a \in A, \lambda \in F \}$, όπου F κάποιο σώμα.

i) $e^{\log z} = z$

ii) $\log(e^z) = z + 2k\pi i$

iii) $\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$

iv) $\log(\sqrt[n]{z}) = \frac{1}{n} \log z$

! Προσοχή ! : $\log z^n \neq n \log z$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$

Αποδ. (i),(ii) άμεση συνέπεια ορισμού.

Αποδ. (iii): Έστω $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

Τότε, $\log z_1 + \log z_2 = \{ \log r_1 + i\theta_1 + 2k_1\pi i \mid k_1 \in \mathbb{Z} \} + \{ \log r_2 + i\theta_2 + 2k_2\pi i \mid k_2 \in \mathbb{Z} \} =$

$= \{ \log r_1 + \log r_2 + i(\theta_1 + \theta_2) + 2(k_1 + k_2)\pi i \mid k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \} =$

$= \{ \log(r_1 \cdot r_2) + i(\theta_1 + \theta_2) + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z} \} =$

$= \log(z_1 z_2)$

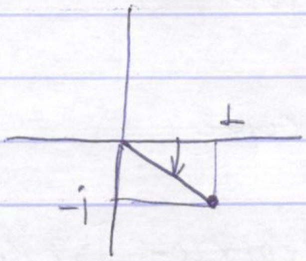
Αποδ. (iv) ⟶ Άσκηση (προς λύση).

$\log z^n \neq n\log z$, $n \geq 2$

$n=2$, $\log z^2 \neq 2\log z$. Όμως, $\log z^2 = \log(zz) = \log z + \log z$

Άρα, $2\log z \neq \log z + \log z$ Τι συμβαίνει; (προς λύση).

παράδειγμα: Να υπολογισθεί ο $\log(1-i)$



$1-i = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}i}$

Άρα, $\log(1-i) = \log\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}i + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$

$\mathrm{Log}(1-i) = \log\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}i$

vii) Η συνάρτηση a^z, $(a \in \mathbb{C},\ z \neq 0)$

Ορισμός: $a^{\overset{\text{"x"}}{z}} := e^{z\log a}$ $\quad (a^x)$

Είναι πλειότιμη συνάρτηση, γίνεται όμως μονότιμη αν επιλέξουμε συγκεκριμένη τιμή για το $\log a$.

viii) Η συνάρτηση z^b

Ορισμός: $\overset{\text{"x"}}{z}{}^b := e^{b\log z}$ $\quad (x^a)$

Είναι πλειότιμη συνάρτηση

Άσκηση: Ν.δ.ο. $\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$ (προς λύση)

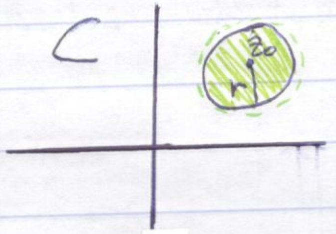
Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το $(i)^i$

Έχουμε: $(i)^i = e^{i\log i} = e^{i(0+\frac{\pi}{2}i+2k\pi i)} = \underbrace{e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}}_{\text{σύνολο αριθμών}}, \; k\in \mathbb{Z}$

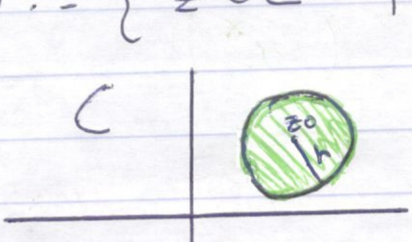
5. Όρια, Συνέχεια, Στοιχεία τοπολογίας.

Ορισμός: Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, $r>0$. Ορίζουμε

$$D(z_0,r) := \{ z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < r \}$$, ανοιχτός δίσκος



$$\bar{D}(z_0,r) := \{ z \in \mathbb{C} : |z-z_0| \le r \}$$, κλειστός δίσκος



$$S(z_0,r) := \{ z \in \mathbb{C} : |z-z_0| = r \}$$, κύκλος.

Ορισμός: Λέμε ότι η ακολουθία (z_n) συγκλίνει στο z, και γράφουμε $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ ή $z_n \to z$ αν $|z_n - z| \to 0$

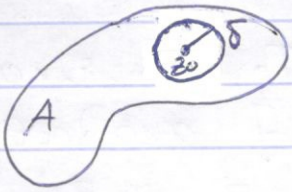
Παρατήρηση: Έστω $z_n = x_n + i y_n$, $z = x + iy$. Τότε,

$$z_n \to z \iff \left\{\begin{array}{l} x_n \to x \\ y_n \to y \end{array}\right\}$$

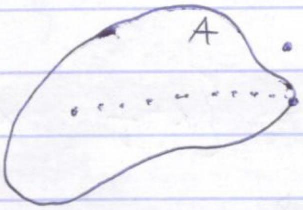
Η σύγκλιση είναι "ίδια" με το R^2.

Ορισμός:

i) Ένα σύνολο $A \subseteq C$ λέγεται ανοιχτό, αν $\forall z_0 \in A \ \exists \delta > 0 : D(z_0, \delta) \subset A$



ii) Ένα σύνολο $K \subseteq C$ λέγεται κλειστό, αν $\left.\begin{array}{l} z_n \in K \\ z_n \to z \end{array}\right\} \Rightarrow z \in K$.



Παρατήρηση: Μπορεί ένα σύνολο να μην είναι ούτε ανοιχτό, ούτε κλειστό.

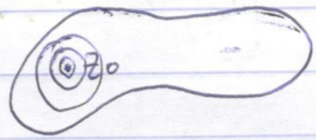
π.χ.

Παρατήρηση: Μόνο δύο σύνολα είναι ανοιχτά και κλειστά, το C και το $\emptyset$

(26.)

Ορισμός: Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$, $A \neq \emptyset$. Το $z_0 \in \mathbb{C}$ λέγεται **σημείο συσσώρευσης** του A αν

$$\forall \delta > 0, \quad A \cap D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\} \neq \emptyset.$$



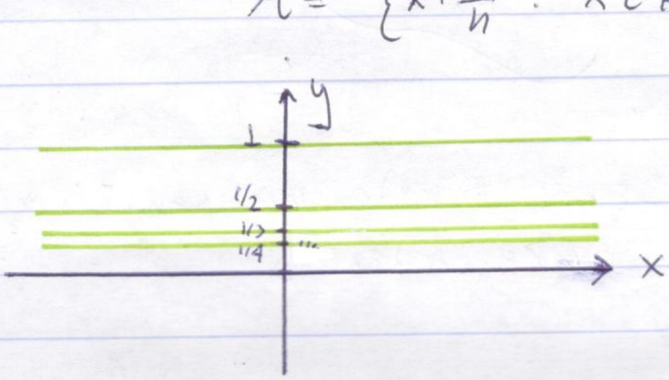
"όσο μικρή ακτίνα δ και αν πάρω, ή όσο μεγάλη, πάντα θα βρίσκω ένα στοιχείο του A".

Παρατήρηση: Το z_0 είναι σ.σ. του A αν και μόνο αν $\exists$ ακολουθία $(z_n) \subset A$, $z_n \neq z_0$, τ.ω. $z_n \to z$.

Συμβολισμός: $A' = \{z \in \mathbb{C} : z \text{ σ.σ. του } A\}$

Παράδειγμα:

$$A = \{x + \tfrac{i}{n} : x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$$



$A' = A \cup \mathbb{R}$

$A = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$

$A' = \emptyset$

$A = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, $A' = \mathbb{C}$

(27.)

Μιγαδικές συναρτήσεις (ΓΕΝΙΚΑ)

$f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Συμβολισμός: $A^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+iy \in A\}$

Για $x+iy \in A$ έχουμε $f(x+iy) \in \mathbb{C}$. Ορίζουμε:

$\operatorname{Re} f(x+iy) = u(x,y)$ και $\operatorname{Im} f(x+iy) = v(x,y)$

Οι u, v είναι ορισμένες στο $A^* \subseteq \mathbb{R}^2$ και

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y), \ \forall x+iy \in A$$

16/10/2018 # Διάλεξη 5η

Παραδείγματα:

1) $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \to \begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 \\ V(x,y) = 2xy \end{cases}$

2) $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 \to \begin{cases} u(x,y) = x^2 + y^2 \\ V(x,y) = 0 \end{cases}$

3) $f(z) = \log z \to \begin{cases} u(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2} \\ V(x,y) = \theta + 2k\pi i \end{cases}$

Ορισμός: Έστω $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in \mathbb{C}$ σ.σ. του A. Λέμε ότι η f έχει όριο το $w \in \mathbb{C}$ καθώς το $z \to z_0$, αν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: αν $z \in A$ και $0 < |z - z_0| < \delta$, τότε $|f(z) - w| < \varepsilon$.