ΕΚΠΑ. Τμήμα Φυσικής. Ακαδ. έτος 2020-2021
ΜΜΦ Ι - Φύλλο 1

1. Να απλοποιηθούν οι
$$z = \frac{(1-i)^{23}}{(\sqrt{3}-i)^{13}} \ , \qquad w = \frac{1}{1+\cos t + i \sin t} \quad \big(t \in (-\pi,\pi)\big) \, .$$

2. Να δειχθεί ότι οι ρίζες της εξίσωσης $z^n = w$ έχουν άθροισμα 0. *(Υπάρχουν τρεις (τουλάχιστον) διαφορετικές λύσεις. Για την μία από αυτές θεωρείστε πρώτα την περίπτωση $w = 1$)*

3. Έστω η συνάρτηση
$$f(z) = \frac{z-2i}{z+3-5i} \, .$$
Να δειχθεί ότι αν $|z-i| < 2$ τότε $|f(z)| < 1$.

4. Έστω $a, b \in \mathbb{C}$ με $|a| \neq |b|$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση
$$f(z) = \frac{az+b}{\overline{a}+\overline{b}z}$$
απεικονίζει τον ανοικτό μοναδιαίο κύκλο $S(1)$ στον εαυτό του.

5. Να δειχθεί ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ με $\sin(a/2) \neq 0$ ισχύει
$$\sin a + \sin(2a) + \ldots + \sin(na) = \frac{\cos\frac{a}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})a}{2\sin\frac{a}{2}} \, .$$

6. (i) Έστω $p(z)$ πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Να δειχθεί ότι αν το z_0 είναι ρίζα του $p(z)$ τότε και το $\overline{z_0}$ είναι ρίζα. (ii) Να βρεθούν όλες οι ρίζες του πολυωνύμου
$$p(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2$$
αφού επαληθευτεί ότι το i είναι μία ρίζα.

7. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος (δηλ. το σύνολο) όλων των $z \in \mathbb{C}$ για τα οποία $\mathrm{Re}(\frac{1}{z}) = 2$.

8. Έστω z_1, z_2, z_3 μιγαδικοί αριμθοί οι οποίοι σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο. Να αποδειχθεί ότι
$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 \, .$$

9. Να υπολογιστεί το $(3-4i)^{1+i}$.

10. Να δειχθεί ότι $z^{1/n} = \sqrt[n]{z}$ ως πλειότιμες συναρτήσεις.

11. Αποδείξτε ότι $\log z^2 \neq 2\log z$ (ως πλειότιμες συναρτήσεις). Όμως $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$. Τι συμβαίνει ;