ΕΚΠΑ. Τμήμα Φυσικής. Ακαδ. έτος 2020-2021
ΜΜΦ Ι - Φύλλο 2

1. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ υπάρχει στο $\mathbb{C}$ το
$$?? \lim_{z\to 0} \frac{|z|^\alpha}{z^2}.$$

2. Να δειχθεί ότι η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-i)^2 z^{2n}}{i-\overline{z}^n}$$
συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\overline{D}(r)$ για κάθε $r \in (0,1)$.

3. Να δειχθεί ότι αν οι συναρτήσεις $f(z)$ και $\overline{f(z)}$ είναι και οι δύο αναλυτικές στο $\mathbb{C}$ τότε η f είναι σταθερή.

4. (i) Να δειχθεί ότι οι εξισώσεις Cauchy-Riemann σε πολικές συντεταγμένες, $u = u(r,\theta)$, $v = v(r,\theta)$, γράφονται
$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta \, , \qquad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta$$
(ii) Να δειχθεί ότι μία C^2 συνάρτηση $u(r,\theta)$ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ αν και μόνο αν
$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0 \, .$$

5. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f(z)$ αναλυτική στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ τέτοια ώστε $e^{f(z)} = z$.

6. (i) Να δειχθεί ότι αν η $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική και $\overline{D}(z_0, r) \subset A$ τότε
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \, .$$
(ii) Να δειχθεί ότι αν μία συνάρτηση $u(x,y) : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι αρμονική και $\overline{D}\big((x_0,y_0), r\big) \subset A$ τότε
$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{S((x_0,y_0),r))} u(x,y) ds \, .$$

7. Έστω $t \in \mathbb{R}$. Να υπολογιστεί το
$$\int_{S(3)} \frac{e^{zt}}{z^2+1} dz \, .$$

8. Να αποδειχθεί ότι αν για μία ακέραια συνάρτηση f υπάρχουν $\alpha, c > 0$ ώστε $|f(z)| \leq c(1 + |z|^{\alpha})$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, τότε η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $[\alpha]$ (ακέραιο μέρος του α).

9. Έστω $f = u + iv$ ακέραια συνάρτηση. (i) Να δειχθεί ότι αν $u(x, y) \geq 1$, τότε η f είναι σταθερή. (ii) Να δειχθεί ότι αν η f δεν είναι σταθερή τότε κάθε μία από τις u και v δεν είναι ούτε κάτω φραγμένη ούτε άνω φραγμένη.