ΕΚΠΑ. Τμήμα Φυσικής. Ακαδ. έτος 2022-2023
ΜΜΦ Ι - Φύλλο 2

1. Να δειχθεί ότι η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{(i-1)nz}$$
συγκλίνει ομοιόμορφα στο σύνολο $E_\alpha = \{x+iy \,:\, x+y \geq \alpha\}$ για κάθε $\alpha > 0$.

2. Να δειχθεί ότι αν οι συναρτήσεις $f(z)$ και $\overline{f(z)}$ είναι και οι δύο ολόμορφες στο $\mathbb{C}$ τότε η f είναι σταθερή.

3. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση (κατά σημείο και ομοιόμορφη) η ακολουθία συναρτήσεων
$$f_n(z) = (1+z)(1+z^2)(1+z^4)\ldots(1+z^{2^n}).$$

4. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (2^n+3^n)z^n\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n.$$

5. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 0 η συνάρτηση
$$f(x+iy) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x+iy}, & x+iy \neq 0, \\ 0, & x+iy = 0. \end{cases}$$

6. Να εξεταστούν ως προς τη διαφορισιμότητα οι συναρτήσεις $f(z) = |z|^2$ και $g(z) = z\mathrm{Re}(z) + \overline{z}\mathrm{Im}(z) + \overline{z}$.

7. Να δειχθεί ότι για τη συνάρτηση $f(x+iy) = \sqrt{|xy|}$ ικανοποιούνται οι συνθήκες Cauchy-Riemann στο $z=0$. Είναι η f διαφορίσιμη στο σημείο αυτό;

8. Να δειχθεί ότι η $u(x,y) = e^y \sin x + xy$ είναι αρμονική συνάρτηση. Να βρεθεί η συζυγής αρμονική $v(x,y)$ καθώς και η ολόμορφη συνάρτηση $f = u + iv$, ως συνάρτηση του z.