ΕΚΠΑ. Τμήμα Φυσικής. Ακαδ. έτος 2023-2024
ΜΜΦ Ι - Φύλλο 3

1. Έστω f ακέραια συνάρτηση με την ιδιότητα ότι $|f(z)| \leq 1+2|z|^3$, $z \in \mathbb{C}$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ τρία. [*Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε εκτιμήσεις Cauchy*]

2. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα ανώμαλα σημεία των συναρτήσεων:
$$f(z) = \frac{\sin 4z - 4z}{z^2} \quad , \quad g(z) = \frac{e^z - 1}{\sin^2 z} \quad , \quad h(z) = \sin(z + \frac{1}{z}).$$

3. Να βρεθούν τα $A, B \in \mathbb{C}$ για τα οποία ισχύει
$$\frac{1}{(e^z - 1)^2} = \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z} + g(z)$$
για κάποια συνάρτηση $g(z)$ η οποία είναι ολόμορφη στο $z = 0$.

4. Έστω f αναλυτική συνάρτηση με μία απλή ρίζα $z_0 \in D(1)$ και έστω ακόμη $g(z)$ ακέραια συνάρτηση. Να δειχθεί ότι
$$\int_{S(1)} \frac{g(z) f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i g(z_0) \,.$$

5. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα
$$\int_{S(1,5)} (1 + z + z^4) e^{\frac{1}{z^2}} dz \,, \qquad \int_{S(3)} \frac{z - 2}{(z - 2i)^2 (e^{iz} - 1)} dz.$$

6. Έστω το μιγαδικό πολυώνυμο
$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_z + a_0.$$
Να δειχθεί ότι
$$\int_{S(1)} z^{n-1} |p(z)|^2 dz = 2\pi i \, a_0 \, \overline{a_n} \,.$$

7. Έστω $f(z)$ ακέραια συνάρτηση με $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$. Να αποδειχθεί ότι η $f(z)$ είναι πολυώνυμο. [*Υπόδειξη: θεωρείστε τη συνάρτηση $f(1/z)$*]