ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

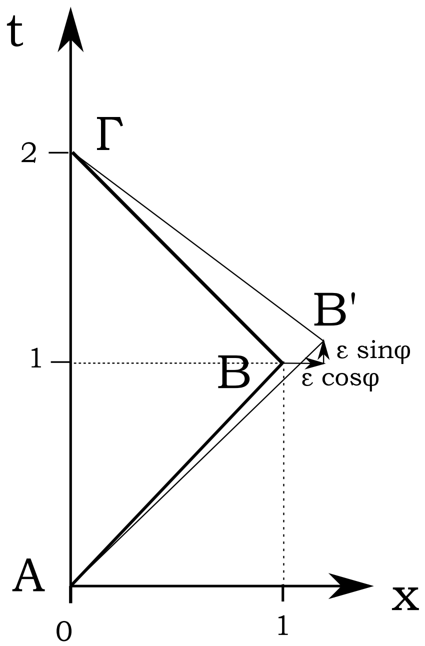
Εξετάσεις Μηχανικής ΙΙ

5 Ιουλίου 2021 - ΚΛΙΜΑΚΙΟ 1

Απαντήστε στα ακόλουθα 3 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα. Καλή σας επιτυχία.

Πρόβλημα Α [35 μονάδες]

Ένα ελεύθερο σωματίδιο μάζας 1, κινούμενο σε 1 διάσταση (τον άξονα x), εκτελεί τη διαδρομή που φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα χώρου-χρόνου.



1 Να υπολογιστεί η τιμή του συναρτησοειδούς της δράσης για τη διαδρομή ΑΒΓ του διαγράμματος. [**5 μονάδες**]

2 Συγκρίνετε την παραπάνω τιμή της δράσης με αυτήν που θα αντιστοιχούσε σε μια εναλλακτική διαδρομή ΑΒ′Γ, όπου το σημείο Β′ είναι πλησίον του Β και έχει συντεταγμένες $(x_{B'} = 1 + \epsilon \cos\phi, t_{B'} = 1 + \epsilon \sin\phi)$. [**15 μονάδες**]

3 Θεωρήστε ότι οι διαδρομές των παραπάνω ερωτημάτων αναφέρονται σε ένα ελεύθερο σωματίδιο το οποίο κινείται σε 1 διάσταση εντός του διαστήματος $x \in [0, 1]$ εξαιτίας απολύτως ελαστικών τοιχωμάτων που βρίσκονται στις θέσεις $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$ που δεν επιτρέπουν στο σωματίδιο να βγει εκτός του παραπάνω διαστήματος. Ποιες γωνίες ϕ των εναλλακτικών διαδρομών που περιγράφονται στο ερώτημα (2) είναι συμβατές με τα δεδομένα κίνησης εντός των ανακλαστικών τοιχωμάτων; Μπορείτε να εντοπίσετε τη φυσική διαδρομή για το πρόβλημα αυτό, βασισμένοι στην αρχή του Χάμιλτον; [Υπόδειξη: Αναπτύξτε την έκφραση για τη δράση της διαδρομής ΑΒ′Γ ως προς τη μικρή παράμετρο ϵ.] [**15 μονάδες**]

Πρόβλημα Β [35 μονάδες]

Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σε 1 διάσταση (επί του άξονα x) εντός του πεδίου $V(x) = -F_0 x$.

1 Να γραφεί η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου και να βρεθεί η εξίσωση κίνησής του αν $x(0) = v(0) = 0$. [**10 μονάδες**]

2 Το παραπάνω σωματίδιο υπόκειται και στο δεσμό $x = 0$. Να συμπληρωθεί η Λαγκρανζιανή του με κατάλληλο πολλαπλασιαστή Lagrange και να υπολογιστεί η αντίδραση του δεσμού. [**10 μονάδες**]

3 Το σωματίδιο (**χωρίς το δεσμό του ερωτήματος (2)**) φέρει και φορτίο Q και μπορεί τώρα να κινείται στον 3-διάστατο χώρο όπου υπάρχει, εκτός του αρχικού δυναμικού το οποίο μένει ακριβώς το ίδιο, ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που περιγράφεται από το ανυσματικό δυναμικό $\mathbf{A} = -\Lambda t \hat{\mathbf{x}}$. Να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς Λ, έτσι ώστε το σωματίδιο να κινείται ομαλά ανεξαρτήτως των αρχικών συνθηκών του. [**15 μονάδες**]

Πρόβλημα Γ [35 μονάδες]

Έστω η Λαγκρανζιανή

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{m\omega^2}{2}(x_1 - x_2 - 1)^2$$

1 Να υπολογιστούν οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος και οι αντίστοιχοι τρόποι ταλάντωσης αυτού (δεν είναι ανάγκη να τους κανονικοποιήσετε). [**15 μονάδες**]

2 Ελέγξτε αν μια κίνηση της μορφής

$$x_1(t) = 1/2 + 10t \quad , \quad x_2(t) = -1/2 + 10t$$

θα μπορούσε να περιγράφει κάποια εξέλιξη του συστήματος. [**10 μονάδες**]

3 Αφού γράψετε τη Χαμιλτονιανή του συστήματος, να υπολογίσετε με τη βοήθεια των αγκυλών Poisson την ποσότητα $\ddot{x}_1$ (την επιτάχυνση της συντεταγμένης x_1). [**10 μονάδες**]

Λύσεις

Πρόβλημα Α

1.

$$SAB\Gamma = \int_{t_A}^{t_\Gamma} [\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)]dt$$

με $V(x) = 0$ και $m = 1$. Στο πρώτο διάστημα

$$\dot{x}_{AB} = 1/1 = 1$$

και στο δεύτερο

$$\dot{x}_{B\Gamma} = -1/1 = -1.$$

Εκτελώντας τις πράξεις $S = 1$ (με $m = 1$).

2.

$$S_{AB'\Gamma} = \frac{1}{2}\frac{(1+\epsilon\cos\phi)^2}{1+\epsilon\sin\phi} + \frac{1}{2}\frac{(-(1+\epsilon\cos\phi))^2}{1-\epsilon\sin\phi}.$$

Ανάλογα με τη γωνία ϕ και το πρόσημο του ϵ μπορεί η δράση να είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη του 2. Π.χ. για $\epsilon = .1$ και $\phi = 0$

$$S_{AB'\Gamma} = 1.1^2 > S_{AB\Gamma}$$

και για $\phi = \pi$

$$S_{AB'\Gamma} = 0.9^2 < S_{AB\Gamma}$$

3. Για να κινείται το σωματίδιο εντός των ελαστικών τοιχωμάτων θα πρέπει

$$0 \leq 1+ \leq \epsilon\cos\phi \leq 1$$

οπότε για θετικά ϵ θα πρέπει $\epsilon < 1$ και $3\pi/2 \geq \phi \geq \pi/2$.

Αναπτύσσοντας την παραπάνω έκφραση για μικρά ϵ βρίσκουμε

$$S_{AB'\Gamma} = \frac{(1+\epsilon\cos\phi)^2}{(1-\epsilon^2\sin^2\phi)} = \ldots = 1 + 2\epsilon\cos\phi + \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

Συνεπώς αφού η δράση αλλάζει σε 1η τάξη τουλάχιστον η αρχική διαδρομή δεν είναι η φυσική (η φυσική είναι η $x(t) = 0$). Αν όμως θέσουμε $\phi = \pi/2$ ή $\phi = 3\pi/2$, αναγκάζοντας το σωματίδιο να φτάσει στο τοίχωμα $x = 1$, η διαδρομή ΑΒΓ είναι η φυσική γιατί λείπει ο όρος τάξης ϵ.

Πρόβλημα B

1.

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + F_0 x$$

που οδηγεί μέσω των εξισώσεων Euler-Lagrangeστην

$$m\ddot{x} = F_0$$

με λύση

$$x = \frac{F_0}{2m}t^2$$

για τις δοσμένες αρχικές συνθήκες.

2.

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + F_0 x + \lambda x$$

αφού ο δεσμός είναι $x = 0$. Από τις εξισώσεις Euler-Lagrange

$$m\ddot{x} = F_0 + \lambda \ , \ x = 0$$

οπότε $\lambda = -F_0$ και η αντίδραση του δεσμού είναι $\vec{N} = \nabla(\lambda x) = \hat{x}\lambda = -\hat{x}F_0$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο αφού το εν λόγω δυναμικό σπρώχνει το σωματίδιο με δύναμη F_0 και ο δεσμός αντιδρά σε αυτή τη δύναμη ώστε να παραμένει αυτό ακίνητο.

3.

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 + F_0 x + Q\vec{A}\cdot\dot{\vec{x}} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + F_0 x - Q\Lambda t\dot{x}.$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrangeμας δίνουν

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - Q\Lambda &= F_0 && (1) \\ m\ddot{y} &= 0 && (2) \\ m\ddot{z} &= 0 && (3) \end{aligned}$$

Για να κινείται το σωματίδιο με σταθερή ταχύτητα $\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$

$$\Lambda = \frac{-F_0}{Q}.$$

Πρόκειται για ηλεκτρικό πεδίο που αναιρεί τη δύναμη F_0.

Πρόβλημα Γ

1. Το σημείο ισορροπίας είναι το $x_{1e} = a, x_{2e} = b$ με $a - b = 1$, απροσδιόριστα, οπότε για τις καινούργιες συντεταγμένες $\xi = x_1 - a, \zeta = x_2 - b$ που μετράνε μετατοπίσεις από το σημείο ισορροπίας η L γίνεται
$$L = \frac{m}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\zeta}^2) - \frac{m\omega^2}{2}(\xi - \zeta)^2.$$
Οι πίνακες κινητικής-δυναμικής ενέργειας είναι
$$\mathbf{M} = m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{K} = m\omega^2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
οπότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\det(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M}) = 0$ παίρνει τη μορφή
$$(\omega^2 - \Omega^2)^2 - \omega^4 = 0$$
με λύση $\Omega_1 = 0, \Omega_2 = \pm\sqrt{2}\omega$. **Προσοχή!** Πρέπει να χρησιμοποιηθεί άλλο σύμβολο για τις άγνωστες ιδιοσυχνότητες από την παράμετρο ω.
Οι αντίστοιχοι τρόποι ταλάντωσης είναι
$$\Xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ Z = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
ή οποιαδήποτε πολλαπάσια αυτών.

2. Η εν λόγω κίνηση μπορεί να περιγραφεί ως ακολούθως από τους παραπάνω τρόπους ταλάντωσης με $a = 1/2, b = -1/2$
$$\begin{pmatrix} x_1 - 1/2 \\ x_2 + 1/2 \end{pmatrix} = \Xi[10t + 0] + Z[0\cos(\Omega_2 t) + 0\sin(\Omega_2 t)]$$

3. Με αφαρμογή του μετασχηματισμού Legendre βρίσκουμε
$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}[(x_1 - x_2 - 1)^2]$$
και
$$\ddot{x}_1 = \{\dot{x}_1, H\} = \{(p_1/m, H\} = \ldots = -\omega^2(x_1 - x_2 - 1).$$