ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις Μηχανικής II

20 Σεπτεμβρίου 2021

Απαντήστε στα ακόλουθα 3 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα.
Σύνολο μονάδων 110 (άριστα το 100).
Καλή σας επιτυχία.

Πρόβλημα Α [35 μονάδες]

1 Η Λαγκρανζιανή ενός φυσικού συστήματος είναι η

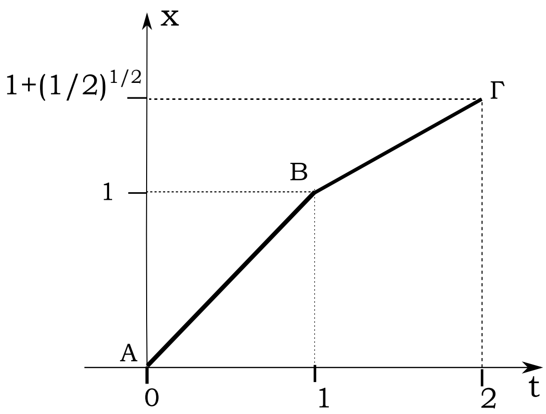
$$L = e^{at}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)\right),$$

όπου a μια σταθερά και $V(x)$ μια αυθαίρετη συνεχής συνάρτηση. Αφού γράψετε την εξίσωση κίνησης αναφέρατε τι φυσικό σύστημα περιγράφει αυτή. [**15 μονάδες**]

2 Ένα σωματίδιο μάζας $m = 1$ κινείται σε μια διάσταση σε κάποιο δυναμικό $V(x)$ και η φυσική του διαδρομή με άκρα $(x_A = 0, t_A = 0)$ και $(x_\Gamma = 1 + 1/\sqrt{2}, t_\Gamma = 2)$ παρουσιάζεται στο διπλανό διάγραμμα. Είναι

$$x_A = 0, t_A = 0,$$
$$x_B = 1, t_B = 1,$$
$$x_\Gamma = 1 + \sqrt{1/2}, t_\Gamma = 2.$$

Να βρεθεί η μορφή του $V(x)$, αν η δράση που αντιστοιχεί στην παραπάνω φυσική διαδρομή έχει τιμή $S_{A\Gamma} = 1$. [**20 μονάδες**]



Πρόβλημα Β [35 μονάδες]

Ένα φυσικό σύστημα απαρτίζεται από 3 σωματίδια, μάζας $m = 1$ το καθένα, τα οποία κινούνται σε μια ευθεία και αλληλεπιδρουν ανά δύο με δυναμικές ενέργειες της μορφής $V_{ij} = -\cos(x_i - x_j)$, όπου x_k η θέση στην ευθεία του k-οστού σωματιδίου.

1 Να γραφεί η Λαγκρανζιανή του προβλήματος και να γραμμικοποιηθεί γύρω από το σημείο ισορροπίας $x_1 = x_2 = x_3$, αφού δείξετε ότι πράγματι αυτό είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος. [**10 μονάδες**]

2 Να γραφούν οι πίνακες κινητικής και δυναμικής ενέργειας του συστήματος και να προσδιοριστούν οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος. [**15 μονάδες**]

3 Ελέγξτε για ποια μη μηδενική τιμή του Ω, μια κίνηση της μορφής

$$x_1 = \sin(\Omega t), x_2 = 0, x_3 = -\sin(\Omega t)$$

θα μπορούσε να περιγράφει μια φυσική κίνηση του συστήματος. [**10 μονάδες**]

Πρόβλημα Γ [40 μονάδες]

Η Χαμιλτονιανή ενός σωματιδίου που κινείται στο επίπεδο έχει τη μορφή

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + V(x,y).$$

1 Αν $V(x,y) = V_1(x) + V_2(y)$ όπου V_1, V_2 αυθαίρετες συνεχείς συναρτήσεις, να δειχτεί ότι οι ποσότητες

$$H_1 = \frac{p_x^2}{2} + V_1(x) \quad , \quad H_2 = \frac{p_y^2}{2} + V_2(y)$$

είναι σταθερές της κίνησης. [**10 μονάδες**]

2 Δείξτε ότι, αν η $V(x,y)$ είναι συνάρτηση της μορφής $V(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$, τότε διατηρείται η στροφορμή του σωματιδίου $L = xp_y - yp_x$. [**10 μονάδες**]

3 Γράψτε τις εξισώσεις Hamilton του σωματιδίου αν

$$V(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^4}{4}$$

και λύνοντάς τες δείξτε ότι για κατάλληλη επιλογή του $y(0)$, με $v_y(0) = 0$ το σωματίδιο θα επανέλθει στο αρχικό σημείο $(x(0), y(0))$ με την ίδια ακριβώς αρχική ταχύτητα $(v_x(0), v_y(0) = 0)$ μετά από συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Τα $x(0), v_x(0)$ είναι αυθαίρετα. [Υποδ: Θεωρήστε γνωστή την τιμή του ολοκληρώματος

$$A = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{2 - \cos^2\phi}},$$

αφού πρώτα δοκιμάσετε την ακόλουθη αλλαγή μεταβλητής στην y- εξίσωση κίνησης: $y = y(0)\sin\phi$.] [**20 μονάδες**]

Λύσεις

Πρόβλημα A

1. Η εξίσωση Euler-Lagrangeπαίρνει τη μορφή

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}e^{at}\right) = e^{at}(-V') \rightarrow$$
$$m\ddot{x} + ma\dot{x} = -V' \tag{1}$$

Με άλλα λόγια πρόκειται για ένα σωματίδιο που κινείται υπό την επίδραση μιας δύναμης $F = -V'$ και μιας γραμμικής τριβής της μορφής $-ma\dot{x}$.

2. Αφού η φυσική διαδρομή είναι ευθεία στο $x-t$ με σταθερή κατά διαστήματα ταχύτητα $v_{AB} = 1$ και $v_{\text{ΒΓ}} = 1/\sqrt{2}$ το σωματίδιο είναι ελεύθερο να κινείται, σε διαφορετικό σταθερό δυναμικό όμως, στις δύο περιοχές. Από διατήρηση της ενέργειας

$$\frac{1}{2}1^2 + V_{AB} = \frac{1}{2}(1/\sqrt{2})^2 + V_{\text{ΒΓ}} \rightarrow V_{\text{ΒΓ}} - V_{AB} = 1/4$$

Από τη δράση θα έχουμε

$$1 = S_{\text{ΑΓ}} = S_{\text{ΑΒ}} + S_{\text{ΒΓ}} = (\frac{1}{2}1^2 - V_{AB}) \cdot t_{AB} + (\frac{1}{2}(1/\sqrt{2})^2 - V_{\text{ΒΓ}}) \cdot t_{\text{ΒΓ}}$$
$$\rightarrow 1 = 3/4 - (V_{\text{ΑΒ}} + V_{\text{ΒΓ}}).$$

Από τις δύο τελικές σχέσεις βρίσκουμε

$$V_{\text{ΒΓ}} = 0, V_{AB} = -1/4.$$

Πρόβλημα B

1.

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - V_{12} - V_{23} - V_{31} \\ &= \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \cos(x_1 - x_2) + \cos(x_2 - x_3) + \cos(x_3 - x_1) \end{aligned}$$

Η κατάσταση ισορροπίας του συστήματος που μας ενδιαφέρει είναι η

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0, x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = x_3 - x_1 = 0$$

από την απαίτηση $\partial V_{i,j}/\partial x_k = 0$ για κάθε τριάδα i, j, k που ικανοποιείται από τις παραπάνω διαφορές. Για μικρά $(x_i - x_j)$

$$\cos(x_i - x_j) \simeq 1 - \frac{(x_i - x_j)^2}{2}$$

οπότε

$$
\begin{aligned}
L_{\text{γραμ}} &= \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)-\frac{1}{2}((x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2) \\
&= \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)-\frac{1}{2}(2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3-2x_3x_1)
\end{aligned}
$$

2.

$$
M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, K=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}
$$

Από τη χαρακτηριστική εξίσωση $\det(K-M\omega^2)=0$ καταλήγουμε στο $(\omega^2-3)^2\omega^2=0$ βρίσκουμε $\omega_1^2=0, \omega_2^2=\omega_3^2=3$ (η δεύτερη με εκφυλισμό 2).

3. Η δοσμένη κίνηση με συχνότητα Ω θα μπορούσε να είναι τρόπος ταλάντωσης του συστήματος αν $\Omega=\sqrt{3}$. Το ερώτημα είναι αν πράγματι το $(1,0,-1)^\top$ είναι τρόπος ταλάντωσης με αυτή την ιδιοσυχνότητα δηλαδή αν

$$
(K-3M)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

το οποίο εύκολα διαπιστώνουμε ότι ισχύει αφού

$$
K-3M=-\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Πρόβλημα Γ

1.

$$
\frac{dH_1}{dt}=\{H_1,H\}=\{H_1,H_1+H_2\}=\{H_1,H_1\}+\{H_1,H_2\}=0+0.
$$

Ο πρώτος μηδενισμός οφείλεται στις ιδιότητες των αγκυλών Poisson και η δεύτερη στο γεγονός ότι $H_1(x,p_x)$ και $H_2(y,p_y)$. Όμοια και $dH_2/dt=0$.

2. Καταρχάς υπολογίζουμε το

$$
\frac{\partial f}{\partial x}=f'\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}
$$

και αντίστοιχα για $\frac{\partial f}{\partial y}$. Επομένως

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \{xp_y - yp_x, H\} = \\ &= x\{p_y, V\} - y\{p_x, V\} + p_y\{x, p_x^2/2\} - p_x\{y, p_y^2/2\} \\ &= -xV'\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + yV'\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + p_y p_x - p_x p_y = 0\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x \\ \dot{p_x} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -x \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y \\ \dot{p_y} &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -y^3\end{aligned}$$

και για κάθε ζευγάρι καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -x \\ \ddot{y} &= -y^3.\end{aligned}$$

Η πρώτη περιγράφει αρμονικό ταλαντωτή με περίοδο 2π. Η 2η περιγράφει πάλι ταλαντωτή αλλά όχι αρμονικό, που με πολ/σμό με $\dot{y}$ καταλήγει σε

$$\frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{y^4}{4} = \text{σταθ} = \frac{y(0)^2}{4}$$

Ο χρόνος μετάβασης από το $-y(0)$ στο $y(0)$ (επιτρεπτή περιοχή κίνησης) είναι

$$\begin{aligned}/2 &= \int_{-y(0)}^{y(0)} \frac{dy}{\dot{y}} = \sqrt{2}\int_{-y(0)}^{y(0)} \frac{dy}{\sqrt{y(0)^4 - y^2}} \\ &= \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{y(0)\cos\phi d\phi}{y(0)^2\sqrt{1-\sin^4\phi}} = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos\phi d\phi}{y(0)\sqrt{1-(1-\cos^2\phi)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{y(0)}A. \end{aligned} \tag{2}$$

Επομένως αρκεί να φροντίσουμε $T = 2\pi$ για να συμπέσει η μια (η x) χρονική περίοδος με την άλλη (την y):

$$\pi = \frac{\sqrt{2}}{y(0)}A \rightarrow y(0) = \sqrt{2}\frac{A}{\pi}$$

είναι η σωστή επιλογή.