ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις Μηχανικής ΙΙ
12 Σεπτεμβρίου 2022

Απαντήστε στα ακόλουθα 3 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα.
Σύνολο μονάδων 110 (άριστα το 100).
Καλή σας επιτυχία.

Πρόβλημα Α [40 μονάδες]

Δύο σωματίδια ίδια μάζας, m το καθένα, κινούνται επί του άξονα x, ασκώντας **σταθερή** έλξη, μεγέθους F, το ένα στο άλλο.

1. Να γραφεί η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας $V(x_1, x_2)$ που οδηγεί στην παραπάνω αλληλεπίδραση.

2. Υποθέστε ότι αρχικά τα σωματίδια βρίσκονται **ακίνητα** στις θέσεις $x_1(0) = 1, x_2(0) = -1$. Αφού γράψετε την Λαγκρανζιανή του συστήματος, επιβεβαιώστε ότι οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν, οδηγούν στην αναμενόμενη (νευτώνεια) κίνηση των δύο σωμάτων.

3. Ποια η τιμή της δράσης του συστήματος μέχρι τη σύγκρουσή τους; Πόση θα ήταν η δράση αυτή αν η κίνηση των δύο μαζών εξελισσόταν με σταθερή ταχύτητα στο ανωτέρω χρονικό διάστημα καταλήγοντας στο ίδιο σημείο σύγκρουσης;

Πρόβλημα Β [35 μονάδες]

Δύο σωματίδια μάζας m και φορτίου q και $-q$ αντίστοιχα, κινούνται εντός μαγνητικού πεδίου που περιγράφεται από το ανυσματικό δυναμικό $\mathbf{A} = \left(x + \frac{x^2}{2}\right)\hat{\mathbf{y}}$. (Τα δύο σωματίδια, λόγω πολύ ασθενικού φορτίου, θεωρούμε ότι δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.) **Δεν** υπάρχει βαρυτικό πεδίο. Υπάρχει μόνο μαγνητικό πεδίο.

1. Να βρεθεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου που συνεπάγεται το παραπάνω ανυσματικό δυναμικό.

2. Να αποδείξετε ότι, αν τα σωματίδια είναι δεσμευμένα να κινούνται και τα δύο στο επίπεδο $x = -1$, τότε εκτελούν ευθύγραμμες ομαλές κινήσεις, χρησιμοποιώντας κατάλληλους πολλαπλασιαστές Lagrange.

3. Ποια η δύναμη του παραπάνω δεσμού στο εκάστοτε σωματίδιο, ως συνάρτηση της ταχύτητάς του; Εξηγήστε το αποτέλεσμά σας.

Πρόβλημα Γ [35 μονάδες]

Ένα φυσικό σύστημα περιγράφεται από τη Χαμιλτονιανή $H = \frac{1}{2}(p+x)^2$.

1. Να γραφούν και να λυθούν οι εξισώσεις Hamilton με αρχικές συνθήκες $p(0) = 1, x(0) = 1$, αφού πρώτα βρείτε μια συνάρτηση των x, p η οποία μένει σταθερή κατά την εξέλιξη της κίνησης.

2. Να υπολογιστεί η αγκύλη Poisson $\{\dot{x}, \dot{p}\}$.

3. Να βρεθεί και να σχεδιαστεί η κίνηση και η φορά της στο χώρο των φάσεων. Πότε το σύστημα θα βρεθεί στη θέση $x = 2, p = 0$;

4. Κατασκευάστε τη Λαγκρανζιανή του συστήματος και βρείτε ποιο απλό φυσικό σύστημα αυτή περιγράφει.

Λύσεις

Πρόβλημα Α

1. $$V = F|x_1 - x_2|$$

   έτσι ώστε $F_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1} = -F$ (αν $x_1 > x_2$) και $+F$ (αν $x_1 < x_2$)

2. $$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - F|x_1 - x_2|$$

   με εξισώσεις κίνησης

   $$m\ddot{x}_1 = -m\ddot{x}_2 = -F\Theta(x_1 - x_2) + F\Theta(x_2 - x_1)$$

   και επομένως με φυσική διαδρομή (σύμφωνη με αρχική/τελική κατάσταση)

   $$x_1(t) = 1 - \frac{F}{2m}t^2\ ,\ x_2(t) = -1 + \frac{F}{2m}t^2$$

   για το διάστημα ως τη σύγκρουση $t \in [0, \sqrt{2m/F}]$. Αυτή ακριβώς είναι η αναμενόμενη κίνηση για ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

3. Η δράση λοιπόν για τη φυσική διαδρομή θα είναι

   $$S = \int_0^{\sqrt{2m/F}} 2 \times \{\frac{1}{2}m[(F/m)t]^2 + F[1 - (F/(2m))t^2]\}dt = \ldots = -(2/3)\sqrt{2mF}$$

   όπου το πολλαπλασιαστικό 2άρι οφείλεται στις 2 κινητικές ενέργειες και στις συμμετρικές θέσεις των δύο σωματιδίων. Αν ακολουθούνταν η μη φυσική διαδρομή

   $$x_1'(t) = -x_2'(t) = 1 - t\sqrt{\frac{F}{2m}}$$

   η δράση θα ήταν

   $$S' = \int_0^{\sqrt{2m/F}} 2 \times \left\{\frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{F}{2m}}\right)^2 + F\left[1 - t\sqrt{\frac{F}{2m}}\right]\right\}dt = \ldots = -(1/2)\sqrt{2mF}$$

   Αυτή είναι μεγαλύτερη από την S, όπως είναι αναμενόμενο για μια μη φυσική διαδρομή.

Πρόβλημα Β

1.
$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & x + x^2/2 & 0 \end{vmatrix} = (1+x)\hat{\mathbf{z}}\ .$$

2.
$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{z}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2+\dot{z}_2^2)+q\left[(x_1+x_1^2/2)\dot{y}_1-(x_2+x_2^2/2)\dot{y}_2\right]+\lambda_1(x_1+1)+\lambda_2(1+x_2)$$

με εξισώσεις κίνησης

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= q(1+x_1)\dot{y}_1+\lambda_1 \\ m\ddot{x}_2 &= -q(1+x_2)\dot{y}_2+\lambda_2 \\ m\dot{y}_1+q(x_1+x_1^2/2) &= c_1 \\ m\dot{y}_2-q(x_2+x_2^2/2) &= c_2 \\ m\dot{z}_1 &= c_3 \\ m\dot{z}_2 &= c_4 \\ x_1 &= -1 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$

με c_1, c_2, c_3, c_4 σταθερές. Επιβάλλοντας τη σχέση των δεσμών έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 \\ 0 &= \lambda_2 \\ m\dot{y}_1+q(-1/2) &= c_1 \\ m\dot{y}_2-q(-1/2) &= c_2 \\ m\dot{z}_1 &= c_3 \\ m\dot{z}_2 &= c_4 \end{aligned}$$

Οι παραπάνω σχέσεις περιγράφουν ομαλές κινήσεις.

3. Αφού και οι 2 πολλ/στές Lagrange είναι μηδενικοί οι δυνάμεις θα είναι μηδενικές. Αναμενόμενο αφού στο επίπεδο $x=-1$ το μαγνητικό πεδίο μηδενίζεται.

Πρόβλημα Γ

1.
$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = (x+p)\ ,\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(x+p)$$

Για να τις λύσουμε παρατηρούμε ότι η ποσότητα $x+p$ πρέπει να είναι σταθερά αφού η Χαμιλτονιανή είναι σταθερά της κίνησης. Επομένως

$$\dot{x} = 2 \; , \; \dot{p} = -2$$

δηλαδή

$$x(t) = 1 + 2t \; , \; p(t) = 1 - 2t \; .$$

2.

$$\{\dot{x}, \dot{p}\} = \{(x+p), -(x+p)\} = 0$$

λόγω της αντισυμμετρίας των αγκυλών Poisson.

3. Η κίνηση είναι κατά μήκος της ευθείας $x + p = 2$ με φορά προς τα κάτω (προς α αρνητικά του p) και δεξιά (προς τα θετικά του x). Το πέρασμα από το δοσμένο σημείο αυτό θα γίνει τη χρονική στιγμή $t = 1/2$ (με βάση τις εξισώσεις κίνησης).

4.

$$L = \dot{x}p - H = \dot{x}(\dot{x} - x) - \frac{1}{2}\left[x + (\dot{x} - x)\right]^2 = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - x\dot{x}$$

όμως ο τελευταίος όρος είναι μετασχηματισμός βαθμονόμησης, $\frac{d}{dt}(x^2/2)$, οπότε πρόκειται για τη Λαγκρανζιανή ελευθέρου σωματιδίου! Η Χαμιλτονιανή λοιπόν αυτή περιγράφει ένα ελεύθερο σωματίδιο.