ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Ασκήσεις εξάσκησης
στις Βασικές Μαθηματικές Μεθόδους

1. Έστω τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$. Αν οι αριθμοί $p = |\vec{a} \cdot \vec{b}|$ και $q = |\vec{a} \times \vec{b}|$ είναι ίσοι, τι συμπέρασμα βγάζετε για τη γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους τα δύο διανύσματα;

   Απ: $\theta = \pi/4$ ή $\theta = 3\pi/4$.

2. Έστω δύο διανύσματα του επιπέδου με συντεταγμένες $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (x, 0)$. Να ζωγραφιστεί το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = (\vec{a} \cdot \vec{b})/|\vec{b}|$ για όποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση.

   Απ: $f(x) = \pm 1$ αναλόγως ου προσήμου του x.

3. Υπολογίστε το εξωτερικό γινόμενο $\vec{a} \times \vec{b}$ των διανυσμάτων $\vec{a} = \lambda\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}$ και $\vec{a} = \hat{\mathbf{x}} + \lambda\hat{\mathbf{y}}$.

   Απ: $\hat{\mathbf{z}}(\lambda^2 - 1)$.

4. Υπολογίστε τη στερεά γωνία που "βλέπει" σε ένα δακτύλιο γύρω από τον ισημερινό μιας σφαίρας ο οποίος αντιστοιχει σε γωνίες $\theta \in [\pi/2 - \theta_0, \pi/2 + \theta_0]$ και $\phi \in [0, 2\pi]$, όπου $\theta_0 < \pi/2$ είναι μια γωνία που καθορίζει το εύρος του δακτυλίου.

   Απ: $4\pi \sin\theta_0$.

5. Να γράψετε την εξίσωση που ικανοποιούν οι σφαιρικές συντεταγμένες και περιγράφουν έναν παράλληλο στον ισημερινό κύκλο, ο οποίος έχει τη μισή περίμετρο από αυτήν του ισημερινού. Υπάρχουν πολλοί τέτοιοι παράλληλοι;

   Απ: 2. Οι $\theta = \pi/6$ ή $\theta = 5\pi/6$.

6. Δύο σημεια A, B πάνω στη μοναδιαία σφαίρα (σφαίρα ακτίνας 1) έχουν σφαιρικές συντεταγμένες

   $$(\theta_A = \pi/2, \phi = \pi/2) \ , \ (\theta_B = \pi/2, \phi_B = 3\pi/2) \ .$$

   Ποια η απόσταση των δύο αυτών σημείων (επί της ευθείας που τα ενώνει);

   Απ: 2.

7. Έστω οι πίνακες

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ , \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \ .$$

Ποιοι πολλαπλασιασμοί από τους ακόλουθους επιτρέπονται;

(i) $\mathbf{AB}$, (ii) $\mathbf{BA}$, (iii) $\mathbf{A}^\top\mathbf{B}$, (iv) $\mathbf{AB}^\top$, (v) $\mathbf{B}^\top\mathbf{A}$, (vi) $\mathbf{BA}^\top$, (vii) $\mathbf{B}^\top\mathbf{B}$, (viii) $\mathbf{BB}^\top$.

όπου $^\top$ συμβολίζει αναστροφή του πίνακα.

Απ: Επιτρεπτοί: (i), (iii), (v), (vii), (viii).

8. Υπολογίστε την ποσότητα $\delta_{1k}\delta_{2k}$, χρησιμοποιώντας την αθροιστική σύμβαση. Το k παίρνει τιμές $1, 2, 3, \ldots, N$ και το δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker.

Απ: 0.

9. Έστω οι πίνακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}$. Ο πίνακας $\mathbf{C}$ που ορίζεται μέσω της σχέσης

$$C_{ij} = A_{ik}B_{jk}$$

είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό ποιών πινάκων και με ποια σειρά;

Απ: $\mathbf{C} = \mathbf{AB}^\top$.

10. Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Απ: 3.

11. Βάσει του προηγούμενου ερωτήματος ποιος είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από τα διανύσματα των στηλών του πίνακα $\mathbf{C}$, δηλαδή τα

$$\vec{C}_1 = (1, 2, 0), \vec{C}_2 = (0, 0, 1), \vec{C}_3 = (2, 1, 0) \ .$$

Απ: 3 ή -3.

12. Αν δράσει ο παραπάνω πίνακας **C** στα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$, πώς θα τα μετασχηματίσει; Πόσος θα είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που ορίζουν τα 3 μετασχηματισμένα μοναδιαία διανύσματα;

    Απ: 3.

13. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα του πίνακα

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

    Απ: $\lambda_1 = 4, \mathbf{X}^{(1)} = (1,1,0), \lambda_2 = 3, \mathbf{X}^{(2)} = (0,0,1), \lambda_3 = -1, \mathbf{X}^{(3)} = (3,-2,0)$.

14. Να υπολογίσετε τους αριθμούς $z_1 = i^{(2/\pi)}$, $z_2 = (i^\star)^{(2i)}$, $z_3 = \Re(z_1 z_2)$.

    Απ: $z_1 = \cos 1 + i \sin 1, z_2 = e^\pi, z_3 = e^\pi \cos 1$.

15. Να αναπαραστήσετε γεωμετρικά (ως διανύσματα) στο μιγαδικό επίπεδο τους αριθμούς $z = e^{i\pi/2}, 2z^2, 3z^3, 4z^4$. Ποιο είναι το άθροισμα των 4 αυτών μιγαδικών αριθμών;

    Απ: $i, -2, -3i, 4, (2-2i)$.

16. Να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές του ερμιτιανού πίνακα

$$\mathbf{\Sigma} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

    Περιμένατε οι ιδιοτιμές να είναι πραγματικές;

    Απ: ± 1: Αναμενόμενο αφού είναι ερμιταιανός.