



# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

## Τμήμα Φυσικής Εξέταση 19 Σεπτεμβρίου 2022 στις Βασικές Μαθηματικές Μεθόδους

Σύνολο μορίων στα 10 ερωτήματα=11 μόρια. Φροντίστε να είναι εμφανείς οι υπολογισμοί σας.

1. Ποια η στερεά γωνία υπό την οποία φαίνεται από το κέντρο ενός κύβου μια από τις τετραγωνικές πλευρές του; Εξαρτάται η απάντηση από το μέγεθος του κύβου; **[0.7+0.3 μόρια]**

2. Έστω δύο μοναδιαία διανύσματα  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  τα οποία σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία  $\pi/2$ . Να κατασκευαστεί με τη βοήθεια αυτών των δύο διανυσμάτων ένα τρίτο το οποίο να σχηματίζει γωνία  $\pi/3$  με το καθένα από τα δύο πρώτα. **[2 μόρια]**

3. Για τον πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

να υπολογιστεί η ορίζουσα  $\det(\mathbf{A}^{10})$ .

**[1 μόριο]**

4. Αν για δύο μιγαδικούς αριθμούς  $z, w$  ισχύει ότι  $z \cdot w$  είναι αμιγώς αρνητικός πραγματικός αριθμός και ο  $z^2/w$  είναι αμιγώς θετικός πραγματικός αριθμός, να βρεθούν τα  $\arg(z), \arg(w)$ . Αν επιπλέον τα μέτρα των  $z, w$  είναι  $|z| = |w| > 1$ , τι πρόσημο έχει ο  $z \cdot w + z^2/w$ ; **[0.6+0.4 μόρια]**

5. Από τα διανύσματα  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ , με  $\vec{a}, \vec{b}$  δύο όχι παράλληλα διανύσματα, να κατασκευαστούν (α) δύο διαφορετικές βαθμωτές ποσότητες, και (β) δύο νέα διανύσματα. **[0.5+0.5 μόρια]**

6. Δείξτε ότι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

έχει μόνο ένα ιδιοάνυσμα, βρείτε το, και εξηγήστε γιατί έχει μόνο ένα.

**[0.3+0.3+0.4 μόρια]**

7. Ποια η τιμή του  $\delta_{aa}$  και  $\epsilon_{aa3}$ , σύμφωνα με την αθροιστική σύμβαση, αν αναφερόμαστε σε έναν τρισδιάστατο χώρο; **[0.5+0.5 μόρια]**

8. Αν  $z^n = z$  για έναν μιγαδικό αριθμό  $z$  και  $n$  κάποιος φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1, να βρεθεί ο  $z$ . **[1 μόριο]**

9. Έστω η διαδρομή  $\phi = a\theta + b$  πάνω σε μια σφαίρα και  $\theta, \phi$  οι κλασικές σφαιρικές συντεταγμένες. Να σχεδιάσετε ποιοτικά τη διαδρομή αυτή ξεκινώντας από το Βόρειο πόλο ( $\theta = 0$ ) και καταλήγοντας στο Νότιο πόλο ( $\theta = \pi$ ). Αν η διαδρομή διέρχεται από τα σημεία  $A : (\theta = \pi/3, \phi = 0)$  και  $B : ((\theta = 2\pi/3, \phi = \pi)$ , να βρεθεί η συντεταγμένη  $\phi$  στο σημείο που η εν λόγω διαδρομή διέρχεται από τον Ισημερινό. **[0.5+0.5 μόρια]**

10. Υπολογίστε τον αντίστροφο του πίνακα  $\mathbf{A}$  για

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Υπόδ: Δοκιμάστε με έναν πίνακα παρόμοιας μορφής με τον  $\mathbf{A}$ , δηλαδή:

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

**[1 μόριο]**

Καλή Επιτυχία

## Απαντήσεις

1.  $4\pi/6 = 2\pi/3$
2.  $\pm\sqrt{2}(\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2) + (\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2)$
3.  $(-2)^{10} = 1024$
4.  $\arg(z) = \pi/3, \arg(w) = 2\pi/3$ , αρνητικός
5. Βαθμωτά:  $\vec{a} \cdot \vec{b}, |\vec{a} \times \vec{b}|, \vec{a} \cdot \vec{a}, \dots$ , Διανύσματα:  $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}), |\vec{a}|\vec{b}, (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}, (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} \times \vec{b}, \dots$
6.  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  με ιδιοτιμή 0 και  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  με ιδιοτιμή 5. Το 1ο αν και τυπικά είναι ιδιοάνυσμα επειδή έχει ιδιοτιμή 0 (λόγω του ότι ο πίνακας έχει ορίζουσα 0) εξαφανίζεται από τη δράση του πίνακα και μένει μόνο το 2ο.
7. 3, 0, αντίστοιχα.
8.  $z = e^{2\pi ik/(n-1)}$  με  $k \in \mathbb{N}$
9. Περιελίσσεται γύρω από τη σφαίρα καθώς προχωρά από το Βόρειο προς το Νότιο πόλο εκτελώντας συνολικά 1.5 περιστροφές.  $a = 3, b = -\pi, \phi|_{\text{ισημ}} = \pi/2$
- 10.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$