ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση επί Πτυχίω 31/5/2023
στις Βασικές Μαθηματικές Μεθόδους

Σύνολο μορίων στα 10 ερωτήματα=11 μόρια. Φροντίστε να είναι εμφανείς οι υπολογισμοί σας.
Καλή σας επιτυχία.

1. Ποιες από τις παρακάτω ποσότητες έχουν και ποιες δεν έχουν νόημα και γιατί; (Σκέτη αναφορά της έκφρασης που είναι σωστή ή λάθος δεν λαμβάνεται υπόψη.)

   (α) $\vec{a} \times (\vec{b} \cdot \vec{c})$

   (β) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

   (γ) προβ$_{\vec{b}}(\vec{c} \cdot \vec{a})$

   (δ) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \times (\vec{c} \cdot \vec{d})$

   [**4** $\times$ **0.25 μόρια**]

2. Υπολογίστε το διάνυσμα
$$\vec{X} = \text{προβ}_{\vec{a}}\vec{\Psi},$$
αν $\vec{\Psi} = (1, 1, 1)$ και $\vec{a} = (1, 1, 0)$. Στη συνέχεια υπολογίστε το
$$\vec{X}' = \text{προβ}_{\hat{a}}\vec{\Psi},$$
με $\hat{a}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\vec{a}$ και βρείτε τη σχέση μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{X}$ και $\vec{X}'$. [**0.4 + 0.4 + 0.2 μόρια**]

3. Υπολογίστε το άπειρο άθροισμα των διανυσμάτων
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\hat{e}_n}{2^n}$$
όπου το διάνυσμα $\hat{e}_n$ είναι: το μοναδιαίο $\hat{x}$ αν n: περιττό και $\hat{y}$ αν n: άρτιο. Δίνεται το άπειρο άθροισμα της γεωμετρικής σειράς:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a-1}$$
για $|a| > 1$. [**1.5 μόρια**]

4. Υπολογίστε τη στερεά γωνία την οποία καταλαμβάνει το κομμάτι της επιφάνειας μιας σφαίρας που εκτείνεται στην περιοχή που οι σφαιρικές συντεταγμένες καλύπτουν διάστημα $\theta \in [0, \pi/2]$ και $\phi \in [\pi/2, 3\pi/2]$. [**1 μόριο**]

5. Έστω ένας 2×2 συμμετρικός πίνακας $\mathbf{A}$ και $\mathbf{E}$ ο 2×2 πίνακας που έχει ως συνιστώσες τις συνιστώσες του πλήρως αντισυμμετρικού τανυστή 2ης τάξης: $E_{ij} = \epsilon_{ij}$. Να σχηματίσετε το γινόμενο $\mathbf{C} = \mathbf{E}^{\top}\ \mathbf{A}\ \mathbf{E}$. Πώς σχετίζεται ο πίνακας $\mathbf{C}$ με τα $\mathbf{A}^{-1}$ και $\det \mathbf{A}$; [**0.5+0.5 μόρια**]

6. Έστω ο πίνακας
$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} .$$
(i) Κατασκευάστε τον ερμιτιανό συζυγή του. (ii) Υπολογίστε το ίχνος του. (iii) Υπολογίστε το $C_{1i}\delta_{i2}$, όπου δ_{ab} το δέλτα του Kronecker χρησιμοποιώντας την αθροιστική σύμβαση. [**0.3+0.3+0.4 μόρια**]

7. Να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα του πίνακα
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
με $\epsilon > 0$. Τι συμβαίνει στο όριο $\epsilon \to 0$ στα ιδιοανύσματα και τις ιδιοτιμές αυτού; Ερμηνεύστε τα αποτελέσματά σας. [**0.5+0.3+0.2 μόρια**]

8. Ο πίνακας
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$
δρα στα διανύσματα:
$$\vec{\Psi}_1 = \begin{pmatrix} \kappa \\ 0 \end{pmatrix} ,\ \vec{\Psi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} ,$$
παραμορφώνοντας το παραλληλόγραμμο χωρίο που οριζόταν από τα διανύσματα $\vec{\Psi}_1, \vec{\Psi}_2$. Ποιός ο λόγος της επιφάνειας του τελικού (παραμορφωμένου) χωρίου προς την επιφάνεια του αρχικού χωρίου; [**1 μόριο**]

9. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = e^{\imath\phi}$ με $\phi \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τις ποσότητες (i) $w_1 = z^\star$, (ii) $w_2 = z - z^\star$, (iii) $w_3 = z^2$, (iv) $w_4 = z \cdot z^\star$. [**4× 0.25 μόρια**]

10. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = a + be^{\imath\phi}$, $z_2 = -a - be^{-\imath\phi}$, με $a, b, \phi \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει η ποσότητα $|z_1 - z_2|$, αν $a + b = 2$ και η ϕ μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή. [**1.5 μόρια**]